

第 13 講 不確実性 (1) 期待効用 (テキスト 255-262 ページ)

先生「10% の確率で 100 万円が当たるくじがあります。いくらなら買ってもよいと思いますか」

太郎「そりゃ 10 万円でしょ」

花子「私は 3 万円かな」

1. くじ

確率 α_1 で x_1 円, 確率 α_2 で x_2 円が当たるくじがあるとする ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$)。くじは, 樹形図または表で表現できる¹。【板書】

くじの (数学的) 期待値 x^e は, 次式で与えられる。

$$x^e = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad (1)$$

2. 期待効用

このくじに対する期待効用 (expected utility) を,

$$EU = \alpha_1 U(x_1) + \alpha_2 U(x_2) \quad (2)$$

と定義する。 $U(x)$ は, 確実な所得 x 円が得られるときの効用を表す。 (2) 式は, 個人は不確実な状況で, 所得の期待値ではなく, 効用の期待値に関心を持つと仮定している。期待効用仮説という。

例 10% の確率で 100 万円が当たるくじがある。効用関数を $U(x) = \sqrt{x}$ とすると, このくじの期待効用は,

$$0.1 \times \sqrt{1000000} + 0.9 \times \sqrt{0} = 100$$

3. くじの私的な価格 (確実性等価)

くじの期待効用と同じ効用水準を与える確実な所得を x^* とする。

$$\alpha_1 U(x_1) + \alpha_2 U(x_2) = U(x^*) \quad (3)$$

x^* は, くじのために払ってもよいと思う価格 (の最大値) を表している。確実性等価 (certainty equivalent) という。

例 上の例では, $\sqrt{x} = 100$ 。確実性等価は, $x^* = 10000$ 円。

問題 1

10% の確率で 100 万円が当たるくじがある。花子は確実な所得 x 円に対して $U(x) = x^{\frac{2}{3}}$ の効用を得るとする。花子が払ってもよいと思う, くじの最高価格 (確実性等価) を求めよ。ただし, $\sqrt{10} = 3.16$ を用いよ。

解答 (2) 式より,

$$0.1 \times 1000000^{\frac{2}{3}} + 0.9 \times 0^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$$

整理すると,

$$x^{\frac{2}{3}} = 10^3 \Rightarrow x = 10^{4.5} = 10000\sqrt{10} = 31600$$

確実性等価は, 31600 円。

…(答)

¹確率分布という。変数 X を確率変数という。

4. 図による理解 (図 8.1, 8.2, 8.3)

作図の仕方

- (1) ヨコ軸上に x_1, x_2 をとる.
- (2) タテ軸上に $U(x_1), U(x_2)$ をとる.
- (3) 内分点 $\alpha_1 U(x_1) + \alpha_2 U(x_2)$ をタテ軸上にとる².
- (4) 右にいて、曲線から下に下ろしたところが、確実性等価 x^* .
- (5) 右にいて、線分 $A_1 A_2$ との交点 E から下に下ろしたところが、期待値 $x^e = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.³

個人のリスクに対する態度を、効用関数 $U(x)$ を用いて分類できる.

	効用関数	期待値 x^e と確実性等価 x^*
リスク回避的 (risk averse)	$U''(x) < 0$ (上に凸)	$x^* < x^e$
リスク中立的 (risk neutral)	$U''(x) = 0$ (直線)	$x^* = x^e$
リスク愛好的 (risk loving)	$U''(x) > 0$ (下に凸)	$x^* > x^e$

リスク中立的な個人は、期待値 x^e でくじを買ってもよいと考える. リスク回避者は期待値 x^e では買わない. リスク愛好者は、期待値よりも高い価格を払ってもよいと考える. 言葉と整合的.

5. リスクプレミアム

ある個人が、10% の確率で 100 万円が当たるくじを持っている. 効用関数が $U(x) = \sqrt{x}$ のとき、彼は、確実性等価 $x^* = 10000$ 円でくじを売ってもよいと考える (はず)⁴.

くじを購入する経済主体を、保険会社と呼ぼう. 保険会社は、大量のくじを個人から購入することで、くじ 1 本あたり平均して、 $x^e - x^* = 90000$ 円儲けることができる. 差額 ($x^e - x^*$) を、リスクプレミアムという. 取引の前後で、個人は無差別. 保険会社の利潤の分だけ社会的余剰が増える. 保険は、経済厚生を改善する制度である.

問題 2 上の例で、保険市場が完全競争的であるとする. このとき、

- (1) くじの取引価格は、 $x^e = 100000$ 円になる.
- (2) 上と同じだけ社会的余剰が増える.

なぜそうなるのか、理由を説明せよ.

問題 3

確率 $\frac{1}{3}$ で 160,000 円、確率 $\frac{2}{3}$ で 10,000 円が当たるくじがある.

- (1) 花子は確実な所得 x 円に対して $U(x) = \sqrt{x}$ の効用を得るとする. 花子が払ってもよいと思う、くじの最高価格 (確実性等価) を求めよ.
- (2) 花子がこのくじを所有しているとする. リスク中立的な経済主体は、(1) の価格でくじを購入することで利益を得る. 期待利益の大きさ (リスクプレミアム) を求めよ.

解答

(1)

$$\frac{1}{3} \times \sqrt{160000} + \frac{2}{3} \times \sqrt{10000} = \sqrt{x}$$

より、 $\sqrt{x} = 200$. したがって、 $x = 40000$ 円.

(2) 期待値は、

$$\frac{1}{3} \times 160000 + \frac{2}{3} \times 10000 = 60000 \text{ 円}$$

したがって、リスクプレミアムは、 $60000 - 40000 = 20000$ 円. …(答)

花子「私の効用関数が、先生にバレた」

太郎「リスクプレミアムって、ちょっとかつこいい」

²数直線上に 2 点 $A(a), B(b)$ をとる. 線分 AB を、 $t: (1-t)$ に内分する点を $C(c)$ とすると、 $c = (1-t)a + tb$ が成り立つ.

³中点連結定理を復習してください.

⁴人間は、同じモノであっても、売値 (所有物への評価額) を買値 (非所有物への評価額) よりも高くする傾向がある. 興味のある人は、行動経済学のテキストを読んでください.