

第9講 消費者行動の理論 (4) 予算制約と効用最大化 (テキスト 32-38 ページ)

花子と太郎は、フルーツパーティの買い出しのためスーパーにいる。

予算は 3,000 円。リンゴは 1 個 200 円、ミカン は 1 個 100 円で売られている。

花子「うーん。それぞれ 10 個ずつでどう」

太郎「リンゴ買い過ぎでしょ。リンゴ 5 個、みかん 20 個がベスト」

1. 予算制約式と予算線

与えられた所得、価格のもとで、リンゴとみかんを消費する。リンゴの消費量を x_1 、みかんの消費量を x_2 とする。消費可能な財の組合せ (x_1, x_2) はいくつもある。所得を m (円)、リンゴの価格を p_1 (円)、みかんの価格を p_2 (円) とする。消費可能な組合せは、数式を用いると、

$$m \geq p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad (1)$$

と表現できる。(1) 式を満たす第 1 象限および両軸上の領域を消費可能集合 (consumption possibility set) という。特に、所得を残らず消費するとき、消費可能な組合せは、

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad (2)$$

と表現できる。(2) 式を予算制約式という¹。(2) 式を平面 (x_1, x_2) 上に描いたものを予算線という (図 2.7)。

予算線の性質

(i) 右下がり。傾き $-p_1/p_2$ 。

(ii) ヨコ軸との切片 m/p_1 、タテ軸との切片 m/p_2 。

比較静学

(i) 所得効果

所得 m が増加したとする。予算線は右上に平行移動する。

(ii) 価格効果

価格 p_1 が上昇したとする。予算線は、タテ軸との切片を中心に内側に回転する。

価格 p_2 が上昇したとする。予算線は、ヨコ軸との切片を中心に内側に回転する。

問題 1

$(m, p_1, p_2) = (3000, 200, 100)$ のとき、予算制約式は次式で与えられる。

$$3000 = 200x_1 + 100x_2$$

(1) 平面 (x_1, x_2) 上に予算線を図示せよ。

(2) 価格が一定のもとで、所得が $m = 4000$ になったときの予算線を図示せよ。

(3) 所得が一定のもとで、リンゴの価格が $p_1 = 300$ になったときの予算線を図示せよ。

¹消費可能な領域の境界なので、消費可能性フロンティア (consumption possibility frontier) ともいう。

2. 効用最大化

「消費者は、価格を所与として、予算制約のもとで効用が最大となるように財の消費量を決定する」という消費者の最適化問題は、次のように定式化される².

$$\max_{x_1, x_2} u = U(x_1, x_2) \quad \text{subject to} \quad m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad (3)$$

(3) の問題の解 (x_1^*, x_2^*) を主體的均衡という。上付きの * は、解であることを表す。均衡は、図 2.8 の点 P で表される。

最適化の条件は、

$$MRS_{21} = \frac{p_1}{p_2} \quad (4)$$

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad (5)$$

である³。

(5) 式は、均衡が予算線上にあることを意味する。(4) 式は、均衡において、無差別曲線と予算線が接していることを意味する。

(4), (5) 式を x_1, x_2 の連立方程式とみなして解けば、均衡解 (x_1^*, x_2^*) が求められる。

3. 需要関数と間接効用関数

主體的均衡における消費量 x_1^*, x_2^* は、価格 p_1, p_2 と所得 m の関数となる。需要関数 (demand function) という。

$$x_1^* = D_1(p_1, p_2, m) \quad (6)$$

$$x_2^* = D_2(p_1, p_2, m) \quad (7)$$

需要関数を効用関数に代入すると、主體的均衡における効用水準も価格 p_1, p_2 と所得 m の関数となる。間接効用関数 (indirect utility function) という (54 ページ)。

$$u^* = U(x_1^*, x_2^*) = V(p_1, p_2, m) \quad (8)$$

図 2.8 の読み解き方

リンゴとみかんは無数にある。しかし、私のお財布の中身は限られている。そこをどう表現するか。予算線である。私の悩みは、予算線 AB 上のどの点を選ぶのかというただ 1 点である。

どの点を選んだらいい？後は思考実験である。点 Q はどうだろう。リンゴがちょっと少ない気がする。よく見ると、点 Q を通る無差別曲線は、予算線ともう 1 点で交わっている。この点を S としよう。無差別なので、 $Q \sim S$ である。点 S では、みかんが少ない気がする。私は、 Q を選ぶこともできるし、 S を選ぶこともできる。でもこれってベストな選択なのだろうか。そもそも、無差別な点が存在すること自体、ベストとは言えないんじゃないの。

点 Q から予算線上を少し右下に移動しよう。この点を T とする。点 T を通る無差別曲線を引いてみる。 Q を通る無差別曲線よりも右上にある。ということは、 $T \succ Q$ である。 Q よりも T の方が効用が高い。良かった、 Q を選ばなくて、私が求めていたのは T なのか？いや、待て。 T を通る無差別曲線も、予算線と別の点で交わっている。最初の状況と同じである。ということは、まだ改善の余地がありそうだ。

点 T からさらに予算線上を右下に移動する。移動した点で無差別曲線を引いてみる。まだだ。もっとリンゴをくれ。

点 P に到達した。無差別曲線が予算線と接している。これ以上右下に移動すると、効用が下がる。そうなのだ。点 P こそ、私が探していた点なのだ。この点を選んで後悔する理由などあろうか。否。

²subject to は、「～の制約のもとで」の意味。

³1 階の条件 (first-order condition) という。1 階の条件は、解であるための必要条件。十分かどうかを調べるには 2 階の条件 (second-order condition) を利用する。単調性と希少性から、点 P において 2 階の条件が成立することを数学的に証明できる。

例題 1

効用関数が, $u = x_1^2 x_2$ であるとき, 需要関数および間接効用関数を求めよ. 予算制約式は (2) 式を用いよ.

解答

消費者の最適化問題は次のように定式化される.

$$\max_{x_1, x_2} u = x_1^2 x_2 \quad \text{subject to} \quad m = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

最適化の条件は,

$$MRS_{21} = \frac{p_1}{p_2} \quad (9)$$

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad (10)$$

である.

ここで,

$$MRS_{21} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{2x_1 x_2}{x_1^2} = \frac{2x_2}{x_1}$$

であるから, (9) 式より,

$$p_1 x_1 = 2p_2 x_2 \quad (11)$$

(11) 式を (10) 式に代入して, x_1 を消去すると,

$$m = 2p_2 x_2 + p_2 x_2 = 3p_2 x_2$$

したがって, $x_2^* = m/(3p_2)$.

(11) 式を (10) 式に代入して, x_2 を消去すると,

$$m = p_1 x_1 + \frac{1}{2} p_1 x_1 = \frac{3}{2} p_1 x_1$$

したがって, $x_1^* = 2m/(3p_1)$.

以上から, 需要関数は,

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{2m}{3p_1}, \frac{m}{3p_2} \right) \quad (12)$$

である.

(12) 式を効用関数に代入する. 間接効用関数は,

$$u^* = (x_1^*)^2 x_2^* = \left(\frac{2m}{3p_1} \right)^2 \frac{m}{3p_2} = \frac{4m^3}{27(p_1)^2 p_2}$$

(補足)

$(m, p_1, p_2) = (3000, 200, 100)$ とすると, (12) 式より, $(x_1^*, x_2^*) = (10, 10)$.

問題 2

効用関数が, $u = x_1 x_2^2$ であるとき, 需要関数および間接効用関数を求めよ. 予算制約式は (2) 式を用いよ.

$$x_1^* = m/(3p_1), x_2^* = 2m/(3p_2), u^* = 4m^3/(27p_1 p_2^2)$$

2 人の会話を聞いていた経済学者がつぶやいた.

「ふむ. 彼女の効用関数は, $u = x_1^2 x_2$, 彼の効用関数は, $u = x_1 x_2^2$ ってところか」
