「財政 2」（宮澤和俊）　2024/12/18

第 12 講　公共投資 (3) 公共投資と経済成長

先生「今日は，公共投資を含む経済成長モデルを説明します」
花子「経済成長モデルって何だろ」
太郎「難しいとやだな」

例題 1

次のソロー・モデルを考える．

$$\text{財市場均衡式} \quad Y_t = C_t + I_t \tag{1}$$

$$\text{投資関数} \quad I_t = sY_t \tag{2}$$

$$\text{資本蓄積} \quad K_{t+1} = I_t \tag{3}$$

$$\text{マクロ生産関数} \quad Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{4}$$

$$\text{人口成長} \quad \frac{L_{t+1}}{L_t} = n \tag{5}$$

Y_t 国民所得，C_t 消費，I_t 投資，K_t 資本，L_t 労働，$0 < s < 1$ 貯蓄率（一定），$0 < \alpha < 1$ 資本分配率（一定），$n > 0$ 粗人口成長率（一定）

1. 消費関数が，$C_t = (1-s)Y_t$ となることを示せ．
2. 資本 K_t と労働 L_t に関する次の 2 本の漸化式を導出せよ．

$$\begin{cases} K_{t+1} = sAK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \\ L_{t+1} = nL_t \end{cases}$$

1 人あたり資本を k_t，1 人あたり所得を y_t とおく．

$$k_t = \frac{K_t}{L_t}, \quad y_t = \frac{Y_t}{L_t}$$

3. 1 人あたり所得が，$y_t = Ak_t^{\alpha}$ で与えられることを示せ．
4. 1 人あたり資本に関する次の漸化式を導出せよ．

$$k_{t+1} = \frac{s}{n} Ak_t^{\alpha} \tag{6}$$

5. 平面 (k_t, k_{t+1}) 上に，(6) 式の曲線と 45 度線を図示せよ．長期均衡がただ 1 つ存在し，広域的に安定であることを示せ．
6. 長期均衡における 1 人あたり資本 k^* が，

$$k^* = \left(\frac{sA}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{7}$$

となることを示せ．

7. 長期の経済成長率は，人口成長率に一致することを示せ．
8. 問題 1, 3, 6 の結果を用いて，長期均衡における 1 人あたり消費が次式で与えられることを示せ．

$$\frac{C_t}{L_t} = (1-s)A\left(\frac{sA}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{8}$$

9. 長期均衡における 1 人あたり消費が最大となる貯蓄率 s^* を求めよ．

解答

1. (1), (2) 式より，$C_t = Y_t - I_t = (1-s)Y_t$.
2. (2), (3), (4), (5) 式より.
3. (4) 式の両辺を L_t で割る.
4. 問題 2 の 2 式を辺々で割る.
5. 略
6. (6) 式で，$k_t = k_{t+1} = k^*$ とおく.
7. $Y_{t+1}/Y_t = (y^* L_{t+1})/(y^* L_t) = n$.
8. 略
9. (8) 式中の s の項に注目する.

$$f(s) = (1-s)s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - s^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

とおく．s で微分すると，

$$f'(s) = \frac{\alpha}{1-\alpha} s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} - \frac{1}{1-\alpha} s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{s} - 1 \right)$$

s	0		α		1
$f'(s)$		$+$	0	$-$	
$f(s)$	0	↗	極大	↘	0

増減表より，$s^* = \alpha$.

例題 2

次のマクロ経済モデルを考える.

$$\text{財市場均衡式} \quad Y_t = C_t + I_t + G_t \tag{9}$$

$$\text{投資関数} \quad I_t = s(1-\tau)Y_t \tag{10}$$

$$\text{政府予算制約式} \quad G_t = \tau Y_t \tag{11}$$

$$\text{資本蓄積} \quad K_{t+1} = I_t + G_t \tag{12}$$

$$\text{マクロ生産関数} \quad Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{13}$$

$$\text{人口成長} \quad \frac{L_{t+1}}{L_t} = n \tag{14}$$

Y_t 国民所得，C_t 消費，I_t 民間投資，G_t 公共投資，K_t 資本，L_t 労働，$0 < s < 1$ 貯蓄率（一定），$0 < \alpha < 1$ 資本分配率（一定），$n > 0$ 粗人口成長率（一定），$0 < \tau < 1$ 所得税率（一定）

1. 消費関数が，$C_t = (1-s)(1-\tau)Y_t$ となることを示せ.
2. 資本 K_t と労働 L_t に関する次の 2 本の漸化式を導出せよ.

$$\begin{cases} K_{t+1} = [(1-\tau)s + \tau]AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \\ L_{t+1} = nL_t \end{cases}$$

1 人あたり資本を k_t，1 人あたり所得を y_t とおく.

$$k_t = \frac{K_t}{L_t}, \quad y_t = \frac{Y_t}{L_t}$$

3. 1 人あたり所得が，$y_t = Ak_t^{\alpha}$ で与えられることを示せ.

4. 1 人あたり資本に関する次の漸化式を導出せよ．

$$k_{t+1}=\frac{(1-\tau)s+\tau}{n}Ak_t^{\alpha} \tag{15}$$

5. 平面 (k_t,k_{t+1}) 上に，(15) 式の曲線と 45 度線を図示せよ．長期均衡がただ 1 つ存在し，広域的に安定であることを示せ．

6. 長期均衡における 1 人あたり資本 k^* が，

$$k^*=\left\{\frac{[(1-\tau)s+\tau]A}{n}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{16}$$

となることを示せ．

7. 長期の経済成長率は，人口成長率に一致することを示せ．

8. 問題 1, 3, 6 の結果を用いて，長期均衡における 1 人あたり消費が次式で与えられることを示せ．

$$\frac{C_t}{L_t}=(1-s)(1-\tau)A\left\{\frac{[(1-\tau)s+\tau]A}{n}\right\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{17}$$

9. 長期均衡における 1 人あたり消費が最大となる所得税率 τ^* を求めよ．

解答

1. (9), (10), (11) 式より，$C_t=Y_t-I_t-G_t=(1-\tau)Y_t-s(1-\tau)Y_t=(1-s)(1-\tau)Y_t$.
2. (10), (11), (12), (13), (14) 式より．
3. (13) 式の両辺を L_t で割る．
4. 問題 2 の 2 式を辺々で割る．
5. 略
6. (6) 式で，$k_t=k_{t+1}=k^*$ とおく．
7. $Y_{t+1}/Y_t=(y^*L_{t+1})/(y^*L_t)=n$.
8. 略
9. (17) 式中の τ の項に注目する．

$$f(\tau)=(1-\tau)[(1-\tau)s+\tau]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

　ここで，

$$x=(1-\tau)s+\tau$$

とおくと，

$$\tau=\frac{x-s}{1-s}\Rightarrow 1-\tau=\frac{1-x}{1-s}$$

したがって，

$$f(\tau)=\frac{1}{1-s}(1-x)x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}=g(x)$$

　例題 1 の問題 8 と同じなので，$g(x)$ が最大になるのは，$x^*=\alpha$ のとき．最適所得税率は，

$$(1-\tau)s+\tau=\alpha \quad\Rightarrow\quad \tau^*=\frac{\alpha-s}{1-s}$$

である．民間の貯蓄率が小さいとき（$s<\alpha$），公共投資をおこなうのが望ましい．

　このモデルでの公共投資の目的は，マクロの貯蓄率 $(1-\tau)s+\tau$ が，民間資本の生産弾力性 $\frac{K}{Y}\frac{\partial Y}{\partial K}=\alpha$ に一致するように誘導することである．

花子「先生，コピペ」
太郎「ソローモデルってちょっとかっこいい」
