「財政 2」（宮澤和俊） 2024/12/11

第 11 講　公共投資 (2) 最適な公共投資（テキスト p.189–193）

先生「今日は最適な公共投資について説明します」
太郎「出た，最適」

---

2 期モデル
効用関数

$$u = U(c_1, c_2)$$

c_1 第 1 期の消費，c_2 第 2 期の消費

第 1 期，第 2 期の資源制約式

$$w = c_1 + i_P + i_G \tag{1}$$

$$f(k, g) = c_2 \tag{2}$$

w 初期資源（定数），i_P 民間投資，i_G 公共投資，k 民間資本，g 公共資本

資本形成

$$k = i_P \tag{3}$$

$$g = i_G \tag{4}$$

(3), (4) 式を (1) 式に代入すると，第 1 期の資源制約式は，

$$w = c_1 + k + g \tag{5}$$

と表すことができる．以下，文脈に応じて g のことを公共資本と呼んだり，公共投資と呼んだりする（k も同じ）．

例題 1（社会的最適）

次の最適化問題を考える．

$$\max_{c_1, c_2, k, g} u = (1-\alpha)\log c_1 + \alpha \log c_2 \tag{6}$$

subject to

$$w = c_1 + k + g \tag{7}$$

$$Ak^{1-\beta}g^{\beta} = c_2 \tag{8}$$

$0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, A > 0$ は定数.

(1) 4 つの変数 c_1, c_2, k, g をコントロールするときの最適な資源配分を求めよ．
(2) $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.2$ とする．最適な民間投資率 k^*/w と公共投資率 g^*/w を求めよ．

解答

(1) (8) 式を (6) 式に代入する．

$$u = (1-\alpha)\log c_1 + \alpha\left[\log A + (1-\beta)\log k + \beta \log g\right] \tag{9}$$

ラグランジュ関数を,

$$L = (1-\alpha)\log c_1 + \alpha\left[\log A + (1-\beta)\log k + \beta \log g\right] + \lambda(w - c_1 - k - g)$$

とおく（$\lambda > 0$ はラグランジュ乗数）．

c_1, k, g に関する最適化条件は,

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{1-\alpha}{c_1} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1-\alpha}{\lambda}$$
$$\frac{\partial L}{\partial k} = \frac{\alpha(1-\beta)}{k} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\alpha(1-\beta)}{\lambda}$$
$$\frac{\partial L}{\partial g} = \frac{\alpha\beta}{g} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{\alpha\beta}{\lambda}$$

(7) 式に代入する.

$$w = \frac{1-\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha(1-\beta)}{\lambda} + \frac{\alpha\beta}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

したがって,

$$c_1^* = (1-\alpha)w$$
$$k^* = \alpha(1-\beta)w \tag{10}$$
$$g^* = \alpha\beta w \tag{11}$$

(10), (11) 式を (8) 式に代入すると,

$$c_2^* = A[\alpha(1-\beta)w]^{1-\beta}(\alpha\beta w)^\beta = A\alpha(1-\beta)^{1-\beta}\beta^\beta w$$

(2) (10), (11) 式より, $k^*/w = \alpha(1-\beta) = 0.24$, $g^*/w = \alpha\beta = 0.06$. 民間投資 24% , 公共投資 6%.

分権化経済における最適な公共投資

3 つの変数 c_1, c_2, k は民間部門が決める. g は政府が決める. 政府を先手番, 民間部門を後手番とするシュタッケルベルク均衡を求め, 最適な g を導出する.

先に後手番の問題を解き, 次に先手番の問題を解く. 後ろ向き帰納法 (backward induction) という.

1. 民間部門の問題

$$\max_{c_1,\,c_2,\,k} u = U(c_1, c_2)$$

subject to (5) and (2).

これを解いて, $c_1 = c_1(g), c_2 = c_2(g), k = k(g)$ を得る. 間接効用関数 $V(g) = U(c_1(g), c_2(g))$ が得られる.

2. 政府の問題

$$\max_g V(g) \quad \text{subject to} \quad (5) \text{ and } (2)$$

(2), (5) 式を目的関数に代入する.

$$V(g) = U(w - k(g) - g,\, f(k(g), g)) \tag{12}$$

g で微分すると,

$$V'(g) = U_1 \cdot \left(-\frac{dk}{dg} - 1\right) + U_2 \cdot \left(f_k \frac{dk}{dg} + f_g\right)$$
$$= U_2 \left[f_k \frac{dk}{dg} + f_g - \frac{U_1}{U_2}\left(1 + \frac{dk}{dg}\right)\right]$$

したがって,

$$V'(g) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_g = f_k \left(-\frac{dk}{dg}\right) + \frac{U_1}{U_2}\left(1 + \frac{dk}{dg}\right) \tag{13}$$

他方，$c_1 = c_1(g), k = k(g)$ を (5) 式に代入すると，

$$w = c_1(g) + k(g) + g$$

この式の両辺を g で微分すると，

$$0 = \frac{dc_1}{dg} + \frac{dk}{dg} + 1 \tag{14}$$

(13), (14) 式より，次の命題が得られる．

命題 1 公共投資の最適水準は，次式で与えられる．

$$f_g = f_k\left(-\frac{dk}{dg}\right) + \frac{U_1}{U_2}\left(-\frac{dc_1}{dg}\right) \tag{15}$$

ただし，

$$\left(-\frac{dc_1}{dg}\right) + \left(-\frac{dk}{dg}\right) = 1$$

(15) 式の左辺は，公共投資の 限界便益 を表す．右辺は公共投資の 限界費用 を表す．公共投資を 1 単位増やすと将来の生産量が f_g だけ増える．つまり，限界便益は公共資本の限界生産力に一致する．

限界費用は 2 つある．たとえば，公共投資を 1 単位増やしたとき，民間投資が 1 単位減ったとしよう（$dk/dg = -1$）．このとき，将来の生産量は f_k だけ減る．(15) 式の右辺第 1 項は，生産サイドで測った費用を表している．次に，公共投資を 1 単位増やしたとき，第 1 期消費 c_1 が 1 単位減ったとしよう（$dc_1/dg = -1$）．無差別曲線の性質を利用すると，この厚生損失は，第 2 期消費が $MRS = U_1/U_2$ 単位だけ減った効果を持つ．(15) 式の右辺第 2 項は，消費サイドで測った費用を表している．一般的には，公共投資が 1 単位増えると，消費 c_1 も投資 k も減る．(15) 式の右辺は，投資減少の大きさ $(-dk/dg)$ と消費減少の大きさ $(-dc_1/dg)$ を用いて，f_k と MRS の加重平均により限界費用を算出できることを意味している．

例題 2（分権化経済）

民間部門の問題は，次のように定式化できる．

$$\max_{c_1,\,c_2,\,k} u = (1-\alpha)\log c_1 + \alpha \log c_2 \tag{16}$$

subject to

$$w = c_1 + k + g \tag{17}$$

$$Ak^{1-\beta}g^{\beta} = c_2 \tag{18}$$

taking g as given.

(1) 反応関数 $c_1 = c_1(g), k = k(g)$ を求めよ．
(2) 間接効用関数 $V(g)$ を求め，$V(g)$ を最大にする g^* を求めよ．
(3) シュタッケルベルク均衡において，(15) 式が成立することを確かめよ．

解答

(1) 例題 1 のラグランジュ関数を用いる．c_1, k に関する最適化条件より，

$$c_1 = \frac{1-\alpha}{\lambda}$$

$$k = \frac{\alpha(1-\beta)}{\lambda}$$

(7) 式に代入すると,

$$w - g = \frac{1-\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha(1-\beta)}{\lambda} = \frac{1-\alpha\beta}{\lambda}$$

したがって,

$$c_1 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}(w-g) \tag{19}$$

$$k = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}(w-g) \tag{20}$$

(2) (19), (20) 式を (9) 式に代入する.

$$\begin{aligned} V(g) &= (1-\alpha)\log\left[\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}(w-g)\right] + \alpha\left\{\log A + (1-\beta)\log\left[\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}(w-g)\right] + \beta\log g\right\} \\ &= (1-\alpha\beta)\ln(w-g) + \alpha\beta\log g + (\text{定数}) \end{aligned}$$

g で微分すると,

$$V'(g) = -\frac{1-\alpha\beta}{w-g} + \frac{\alpha\beta}{g} = \frac{\alpha\beta w - g}{(w-g)g}$$

したがって，$V(g)$ が最大になるのは，$g^* = \alpha\beta w$ のとき.

(3) $g^* = \alpha\beta w$ を (16), (17) 式に代入すると,

$$c_1^* = (1-\alpha)w$$
$$k^* = \alpha(1-\beta)w$$

(8) 式より,

$$c_2^* = A(k^*)^{1-\beta}(g^*)^\beta = A[\alpha(1-\beta)w]^{1-\beta}(\alpha\beta w)^\beta = A\alpha(1-\beta)^{1-\beta}\beta^\beta w$$

したがって，シュタッケルベルク均衡は，例題 1 の社会的最適に一致する.

限界代替率

$$MRS = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\frac{1-\alpha}{c_1}}{\frac{\alpha}{c_2}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{c_2}{c_1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{A\alpha(1-\beta)^{1-\beta}\beta^\beta w}{(1-\alpha)w} = A(1-\beta)^{1-\beta}\beta^\beta$$

限界生産力

$$f_g = \beta A k^{1-\beta} g^{\beta-1} = \beta A\left(\frac{k}{g}\right)^{1-\beta} = \beta A\left[\frac{\alpha(1-\beta)w}{\alpha\beta w}\right]^{1-\beta} = A(1-\beta)^{1-\beta}\beta^\beta$$

$$f_k = (1-\beta)Ak^{-\beta}g^\beta = (1-\beta)A\left(\frac{g}{k}\right)^\beta = (1-\beta)A\left[\frac{\alpha\beta w}{\alpha(1-\beta)w}\right]^\beta = A(1-\beta)^{1-\beta}\beta^\beta$$

また，(16), (17) 式より,

$$-\frac{dc_1}{dg} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}$$
$$-\frac{dk}{dg} = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}$$

が得られる.

均衡では，$f_g = f_k = MRS$ が成り立つので，たしかに (15) 式が成立する.

太郎「難しい！」

花子「効用が最大になる公共投資が最適ってところが経済学っぽいね」
