第 2 講　公共財 (1) 最適条件（テキスト p.115–121）

太郎「もうすぐハロウィンだね」
花子「かぼちゃを持ち寄ってランタン作ろっか」

キーワード：非競合性と排除不可能性[1]

太郎がリンゴを食べたらそのリンゴを花子は食べることができない．競合している．

対価を払わないとリンゴを食べることができない．支払の有無によって消費の機会を排除している．

		排除できるか: no	排除できるか: yes
競合するか	no	純粋公共財	クラブ財
	yes	コモンズ	私的財

1. 社会的最適

問題 1

太郎と花子は私的財消費と公共財から効用を得る．太郎と花子の効用関数を，

$$\begin{aligned} u^A &= U(x^A, z) = \log x^A + \tfrac{1}{4}\log z \\ u^B &= U(x^B, z) = \log x^B + \tfrac{1}{4}\log z \end{aligned} \tag{1}$$

とする．x^A は太郎の私的財，x^B は花子の私的財，z は公共財を表す．

2 単位の私的財で 1 単位の公共財が生産できるとする．私的財の総量を 100 とすると，資源制約式は次式で与えられる．

$$100 = x^A + x^B + 2z \tag{2}$$

このとき，総効用 $(u^A + u^B)$ を最大にする (x^A, x^B, z) を求めよ．

解答

次の最適化問題を解けばよい．

$$\max_{x^A,\, x^B,\, z}\ u^A + u^B = \log x^A + \log x^B + \frac{1}{2}\log z \quad \text{subject to} \quad 100 = x^A + x^B + 2z$$

<u>解法 1</u>　z を消去する．

$$\max_{x^A,\, x^B}\ u^A + u^B = \log x^A + \log x^B + \frac{1}{2}\log\left(50 - \frac{x^A + x^B}{2}\right)$$

最適化条件は，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^A}(u^A + u^B) &= \frac{1}{x^A} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{2}}{50 - \frac{x^A + x^B}{2}} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^B}(u^A + u^B) &= \frac{1}{x^B} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{2}}{50 - \frac{x^A + x^B}{2}} = 0 \end{aligned}$$

明らかに，$x^A = x^B$．このとき，

$$\frac{1}{x^A} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{50 - x^A}$$

これを解いて，$x^A = 40$．$x^B = 40$．(2) 式より，$z = 10$．　$\cdots$（答）

---

[1]Samuelson PA (1954) The pure theory of public expenditure. *Review of Economics and Statistics.* 36(4): 387-389.

解法 2　ラグランジュ未定乗数法

ラグランジュ関数を,

$$L = \log x^A + \log x^B + \frac{1}{2}\log z + \lambda(100 - x^A - x^B - 2z)$$

とおく（$\lambda > 0$ はラグランジュ乗数）.

最適化条件は,

$$\frac{\partial L}{\partial x^A} = \frac{1}{x^A} - \lambda = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^B} = \frac{1}{x^B} - \lambda = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{2z} - 2\lambda = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - x^A - x^B - 2z = 0 \tag{6}$$

4 つの変数 x^A, x^B, z, λ について 4 本の方程式があるので解ける.

(3), (4), (5) 式より，$x^A = x^B = \frac{1}{\lambda}, z = \frac{1}{4\lambda}$．これらを (6) 式に代入する.

$$100 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} = \frac{5}{2\lambda}$$

この式から，$\lambda = \frac{1}{40}$ を得る．したがって，$(x^A, x^B, z) = (40, 40, 10)$ $\cdots$（答）

2. パレート最適（パレート効率）

ある配分を変更することで，(1) 誰も損をせず，(2) 少なくとも 1 人が得をするとき，この変更はパレート改善であるという．これ以上パレート改善できないような配分を，パレート最適という（テキスト 151 ページ）.

問題 2

上の問題で，パレート最適な配分を求めよ.

解答

花子の効用水準を u で固定する．次の問題を解けばよい.

$$\max_{x^A,\, x^B,\, z} u^A = \log x^A + \frac{1}{4}\log z \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} 100 = x^A + x^B + 2z \\ u = \log x^B + \frac{1}{4}\log z \end{cases}$$

ラグランジュ関数を,

$$L = \log x^A + \frac{1}{4}\log z + \lambda\left(100 - x^A - x^B - 2z\right) + \mu\left(\log x^B + \frac{1}{4}\log z - u\right)$$

とおく（$\lambda > 0, \mu > 0$ はラグランジュ乗数）.

最適化条件は,

$$\frac{\partial L}{\partial x^A} = \frac{1}{x^A} - \lambda = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^B} = -\lambda + \frac{\mu}{x^B} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{4z} - 2\lambda + \frac{\mu}{4z} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - x^A - x^B - 2z = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \log x^B + \frac{1}{4}\log z - u = 0 \tag{11}$$

5 つの変数 $x^A, x^B, z, \lambda, \mu$ について 5 本の方程式があるので解ける.

(7) 式より，$\lambda = \frac{1}{x^A}$．これを (8) 式に代入すると，$\mu = \frac{x_B}{x^A}$．λ と μ を (9) 式に代入する．

$$\frac{1}{4z} - \frac{2}{x^A} + \frac{x_B}{4zx^A} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^A - 8z + x^B = 0$$

この式と (10) 式より，$z^* = 10$，$x^{A*} + x^{B*} = 80$ を得る．

最後に (11) 式から，花子の私的財が得られる．

$$\log x^B = u - \log 10^{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad x^{B*} = \frac{e^u}{10^{\frac{1}{4}}}$$

太郎の私的財は $x^{A*} = 80 - x^{B*}$ である．花子の効用水準 u を上げると，x^{B*} が増え，x^{A*} が減る．公共財は 10 で一定である．

一般解を求めよう．

$$\max_{x^A,\, x^B,\, z} u^A = U^A(x^A, z) \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} 100 = x^A + x^B + 2z \\ u = U^B(x^B, z) \end{cases}$$

ラグランジュ関数

$$L = U^A(x^A, z) + \lambda\left(100 - x^A - x^B - 2z\right) + \mu\left[U^B(x^B, z) - u\right]$$

最適化条件

$$\frac{\partial L}{\partial x^A} = \frac{\partial U^A}{\partial x^A} - \lambda = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^B} = -\lambda + \mu\frac{\partial U^B}{\partial x^B} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial U^A}{\partial z} - 2\lambda + \mu\frac{\partial U^B}{\partial z} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - x^A - x^B - 2z = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = U^B(x^B, z) - u = 0 \tag{16}$$

(12) 式より，$\lambda = \frac{\partial U^A}{\partial x^A}$．これを (13) 式に代入すると，$\mu = \frac{\frac{\partial U^A}{\partial x^A}}{\frac{\partial U^B}{\partial x^B}}$．$\lambda$ と μ を (14) 式に代入する．

$$\frac{\partial U^A}{\partial z} - 2\frac{\partial U^A}{\partial x^A} + \frac{\frac{\partial U^A}{\partial x^A}}{\frac{\partial U^B}{\partial x^B}} \times \frac{\partial U^B}{\partial z} = 0$$

両辺を $\frac{\partial U^A}{\partial x^A}$ で割って整理すると，

$$\frac{\frac{\partial U^A}{\partial z}}{\frac{\partial U^A}{\partial x^A}} + \frac{\frac{\partial U^B}{\partial z}}{\frac{\partial U^B}{\partial x^B}} = 2 \quad \Rightarrow \quad MRS^A + MRS^B = 2 \tag{17}$$

を得る．(15), (16), (17) 式から (x^{A*}, x^{B*}, z^*) が求められる．

MRS^A は，ヨコ軸を公共財 z，タテ軸を私的財 x^A としたときの太郎の無差別曲線の接線の傾きの絶対値を表す．限界代替率という（テキスト 28 ページ）．限界代替率は，私的財で測った公共財の価値を表す．右辺の 2 は限界費用を表す[2]．

ランタンを 1 つ増やしたとしよう．太郎は自分のかぼちゃMRS^A 個分の喜びを感じる．花子は自分のかぼちゃMRS^B 個分の喜びを感じる．他方，ランタンを 1 単位増やすと，私用のかぼちゃが 2 個失われる．悲しい．(17) 式は，ランタンを増やすときの総効用が費用と一致する水準でランタンの個数を決めるのが望ましいことを意味している（まあそうだよね）．

花子「5 本の連立方程式！ありえへん」

太郎「最後は 1 本だから許す」

---

[2]テキストでは，公共財の生産技術を一般化している．その場合には，右辺は限界変形率 (Marginal Rate of Trasnformation, MRT) になる．

補足．生産可能性フロンティア，限界変形率，限界費用

テキスト 117 ページにある生産可能性フロンティアの式

$$F(X,Y)=0 \tag{7.2}$$

の意味を説明する．

労働のみを用いて，バナナ（私的財）と道路（公共財）を生産する．生産関数を，

$$\begin{cases} X=f(l_x) \\ Y=g(l_y) \end{cases}$$

とする．X はバナナ，Y は道路，l_x はバナナ部門の労働投入，l_y は道路部門の労働投入を表す．

労働の総量を 100 とすると，労働制約は次式で与えられる．

$$l_x+l_y=100 \tag{1}$$

例．労働の限界生産力が一定のケース

$$X=2l_x \tag{2}$$

$$Y=l_y \tag{3}$$

(2), (3) 式を (1) 式に代入して，l_x, l_y を消去する．

$$\frac{X}{2}+Y=100 \tag{4}$$

図 1．生産可能性フロンティア

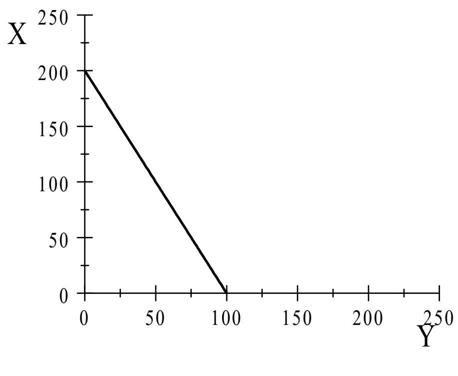

図 1 は，(4) 式を図示したもの．公共財 Y をヨコ軸にする．労働をすべてバナナ生産に投入すると 200 本収穫できる．労働をすべて道路建設に投入すると 100m つくれる．図の線分は，労働の配分 (l_x, l_y) を変更することで生産可能なバナナの本数と道路の長さの組合せ (X, Y) の軌跡を表している．生産可能性フロンティア (Production possibility frontier, PPF) という．(2), (3) 式のように技術が線型のとき，PPF は右下がりの線分で表せる．

生産可能性フロンティアの接線の傾きの絶対値を，限界変形率 (Marginal rate of transformation, MRT) という．上の例では，$MRT=2$ である．道路を 1m 延ばすには労働が 1 単位必要になる．バナナ部門の労働が 1 単位減るので，バナナが 2 本減る．つまり，道路の限界費用はバナナ 2 本分である．MRT は，バナナで測った道路のコストを意味しており，限界費用そのものである．

(4) 式の右辺の 100 を左辺に移行して，

$$F(X,Y)=\frac{X}{2}+Y-100$$

とおく．このとき，(4) 式は，テキストの (7.2) 式のように表すことができる．