「初級ミクロ経済学 II–4」（宮澤和俊）　2024/10/25

第 5 講　企業行動の理論 (4) 費用最小化（テキスト p. 83–85）

父「生産水準を下げるわけにはいかない」
父「コストを 1 円でも下げる？当り前だ」
父「人件費がどんなに高くても，クビを切るわけにはいかないんだ」

企業は，生産要素の価格を所与として，ある生産水準を達成できる生産要素の組合せの中から，費用が最小となるものを選択する．

（前回の復習）等量線 (等産出量曲線) は右下がり．原点に関して凸．

1. 限界代替率

等量線 $\bar{q} = F(z_1, z_2)$ の接線の傾きの絶対値を，限界代替率 (marginal rate of substitution, MRS) という．限界代替率は，限界生産性の比に一致する．

$$MRS_{21} = -\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{F_1(z_1, z_2)}{F_2(z_1, z_2)} \tag{1}$$

MRS_{21} は，生産量を変えずに生産要素 1 を 1 単位増やすとき，節約できる生産要素 2 の投入量を表している．

例題　次の等量線の限界代替率 MRS_{21} を求めよ．

(1) $\bar{q} = 2z_1 + 3z_2$

(2) $\bar{q} = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}$

解答

(1) 傾きが $-2/3$ の直線．$MRS_{21} = 2/3$.

(1) の別解

$$MRS_{21} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{2}{3}$$

(2)

$$MRS_{21} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{1}{2} z_1^{-\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{z_2}{z_1}$$

2. 等費用線

生産要素の価格を w_1, w_2 とする．各生産要素を z_1, z_2 だけ投入するときの費用 c は，

$$c = w_1 z_1 + w_2 z_2 \tag{2}$$

である．費用 c が一定となる生産要素の組合せ (z_1, z_2) の軌跡を，等費用線 (isocost) という．

等費用線の性質（図 3.6）

(1) 右下がり．傾き $-w_1/w_2$.

(2) 費用水準 c が低いほど左下にある．

3. 費用最小化

目標とする生産水準を q とする.「企業は，生産要素の価格を所与として，ある生産水準を達成できる生産要素の組合せの中から，費用が最小となるものを選択する」という問題は，次のように定式化される.

$$\min_{z_1,\, z_2} c = w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad \text{subject to} \quad q = F(z_1, z_2)$$

この問題の主体的均衡は，図 3.6 の点 P で表される.

最適化の条件は,

$$MRS_{21} = \frac{w_1}{w_2} \tag{3}$$

$$q = F(z_1, z_2) \tag{4}$$

である.

(4) 式は均衡が等量線上にあることを意味する. (3) 式は均衡において，等費用線と等量線が接していることを意味する.

(3), (4) 式を z_1, z_2 の連立方程式とみなして解けば，均衡解 (z_1^*, z_2^*) が求められる.

4. 費用関数

主体的均衡における生産要素の投入量 z_1^*, z_2^* は，要素価格 w_1, w_2 と生産水準 q の関数となる.

$$z_1^* = z_1(w_1, w_2, q) \tag{5}$$

$$z_2^* = z_2(w_1, w_2, q) \tag{6}$$

(5), (6) 式を (2) 式に代入すると，主体的均衡における費用も要素価格 w_1, w_2 と生産水準 q の関数となる. 費用関数という.

$$c^* = w_1 z_1^* + w_2 z_2^* = C(w_1, w_2, q) \tag{7}$$

費用関数は，一般的に，要素価格 w_1, w_2，生産水準 q の増加関数である.

問題

生産要素の価格を w_1, w_2 とし，目標とする生産水準を q とする. 生産関数が次式で与えられるとき，要素需要および費用関数を求めよ.

(1) $F(z_1, z_2) = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}$

(2) $F(z_1, z_2) = \min\left\{\frac{z_1}{3}, \frac{z_2}{2}\right\}$

解答

(1) 企業の最適化問題は，次のように定式化できる.

$$\min_{z_1,\, z_2} c = w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad \text{subject to} \quad q = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}$$

最適化の条件は,

$$MRS_{21} = \frac{w_1}{w_2} \tag{8}$$

$$q = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

ここで,

$$MRS_{21} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{1}{2} z_1^{-\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{z_2}{z_1}$$

より，(8) 式から，

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{w_1}{w_2} \Leftrightarrow w_1 z_1 = w_2 z_2 \tag{10}$$

他方，(9) 式より，$q^2 = z_1 z_2$．$z_2 = q^2/z_1$ を (10) 式に代入し，z_2 を消去する．

$$w_1 z_1 = w_2 \times \frac{q^2}{z_1}$$

したがって，

$$z_1^* = q\sqrt{\frac{w_2}{w_1}}$$

同様にして，

$$z_2^* = q\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}$$

費用関数は，

$$c = w_1 z_1^* + w_2 z_2^* = 2q\sqrt{w_1 w_2}$$

(2) 企業の最適化問題は，次のように定式化できる．

$$\min_{z_1,\, z_2} \ c = w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad \text{subject to} \quad q = \min\left\{\frac{z_1}{3}, \frac{z_2}{2}\right\}$$

レオンチェフ型はとがっているので微分できない．等量線を図示する．まず，

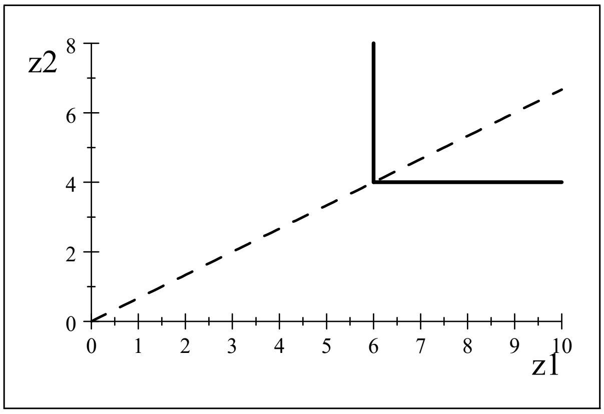
$$\min\left\{\frac{z_1}{3}, \frac{z_2}{2}\right\} = \begin{cases} \frac{z_1}{3} & \text{if} \quad \frac{z_1}{3} \leqq \frac{z_2}{2} \\ \frac{z_2}{2} & \quad\ \ \frac{z_1}{3} \geqq \frac{z_2}{2} \end{cases}$$

したがって，等量線の式は，

$$\begin{cases} q = \frac{z_1}{3} & \text{if} \quad z_2 \geqq \frac{2}{3} z_1 \\ q = \frac{z_2}{2} & \quad\ \ z_2 \leqq \frac{2}{3} z_1 \end{cases}$$

$q = \frac{z_1}{3} \Leftrightarrow z_1 = 3q$ は垂直線，$q = \frac{z_2}{2} \Leftrightarrow z_2 = 2q$ は水平線であることに注意して図を書く．

図．等量線（$q = 2$ のとき）



図より，明らかに，要素需要は，$(z_1^*, z_2^*) = (3q, 2q)$．
費用関数は，$c = w_1 z_1^* + w_2 z_2^* = (3w_1 + 2w_2)q$．

花子「パパの会社の技術はレオンチェフね」
