

第4講 企業行動の理論(3) 生産関数(テキスト p.77-83)

花子「TOEIC 対策してる？」

太郎「うん、7割は取れると思うけど、9割取るのは大変そうだなあ」

3.2節 生産技術と費用

生産要素と生産物の技術的關係を、関数を用いて表現する。生産関数という。

1. 生産要素が1つのとき

生産要素の投入量を z 、生産量を q とする。生産技術を、

$$q = f(z)$$

という関数で表現する。次の性質がある(図 3.3)。

(1) 右上がり。 $f'(z) > 0$

(2) (広域的に) 上に凸。 $f''(z) < 0$

生産要素を追加的に1単位増やすとき、追加的に増える生産量のことを限界生産性(marginal productivity, MP)という¹。限界生産性は、生産関数の接線の傾き $f'(z)$ で表される。生産量が増えるにしたがい限界生産性は低下する ($f''(z) < 0$)。限界生産性逓減の法則という。

生産要素の価格と固定費用が与えられれば、生産関数から費用関数を導出することができる。

例題(例 3.2.1)

ある企業の持つ技術が、生産関数

$$q = f(z) = 2z^{\frac{1}{2}}$$

で表せるとする。生産要素の価格を $w = 6$ 、固定費用を $c_0 = 1$ とする。この企業の費用関数 $C(q)$ を求めよ。また、限界費用、平均費用、平均可変費用を求め、供給関数 $q = q(p)$ を導出せよ。

解答

上の関係式から、

$$z = \frac{q^2}{4}$$

が得られる²。この式は、 q 単位生産するとき、生産要素が $q^2/4$ 単位必要であることを表している。したがって、費用関数は、

$$C(q) = c_0 + wz = 1 + \frac{3}{2}q^2$$

定義より、 $MC = 3q$ 、 $AC = \frac{3}{2}q + \frac{1}{q}$ 、 $AVC = \frac{3}{2}q$ 。

$p = MC$ 、 $p \geq AVC$ より、供給関数は、 $q = \frac{p}{3}$ 。

2. 生産要素が2つのとき

生産要素の投入量を z_1, z_2 とし、生産量を q とする。生産技術を次のような関数で表現する。

$$q = F(z_1, z_2) \tag{1}$$

¹限界生産力ともいう。

²数学では、逆関数 f^{-1} という。

例 1. コブ=ダグラス型生産関数³

$$q = Az_1^\alpha z_2^\beta \quad (0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, A > 0 \text{ は定数}) \quad (2)$$

例 2. レオンチェフ型生産関数⁴

$$q = \min \left\{ \frac{z_1}{a}, \frac{z_2}{b} \right\} \quad (a > 0, b > 0 \text{ は定数}) \quad (3)$$

問題 1 (2) 式の実生産関数は、生産要素の限界生産性が正かつ逓減することを示せ。

$$(\partial q / \partial z_1 > 0, \partial q / \partial z_2 > 0, \partial^2 q / \partial z_1^2 < 0, \partial^2 q / \partial z_2^2 < 0 \text{ を示す})$$

目標とする生産量を \bar{q} とする。生産要素の投入量の組合せ (z_1, z_2) はいくつもある。これらの組合せの軌跡を、等産出量曲線あるいは等量線 (isoquant) という。等量線とは、数式を用いると次のように表せる。

$$\bar{q} = F(z_1, z_2) \quad (4)$$

問題 2 等量線を平面 (z_1, z_2) 上に図示せよ。

$$(1) F(z_1, z_2) = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{q} = 10$$

$$(2) F(z_1, z_2) = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{2}{3}}, \quad \bar{q} = 20$$

$$(3) F(z_1, z_2) = \min \left\{ \frac{z_1}{2}, z_2 \right\}, \quad \bar{q} = 10$$

$$(4) F(z_1, z_2) = \min \left\{ \frac{z_1}{2}, z_2 \right\}, \quad \bar{q} = 20$$

$$(1) z_1 z_2 = 100 \text{ を満たす曲線}$$

$$(2) z_1 z_2 = 400 \text{ を満たす曲線}$$

$$(3) (20, 10) \text{ を頂点とする } L \text{ 字型}$$

$$(4) (40, 20) \text{ を頂点とする } L \text{ 字型}$$

生産要素の限界生産性が正かつ逓減すると仮定する。このとき、等量線には次のような性質がある。

性質 1. 右下がり。原点に関して凸。

性質 2. 生産水準 \bar{q} が高ければ高いほど、等量線は右上にある。

性質 3. 等量線は交わらない。

問題 3 上の 3 つの性質を持つ理由を、言葉で説明せよ。

略解

(性質 1) 生産要素を、労働時間とネットワーク利用とする。生産量が一定であるということは、労働時間を増やせば、ネットワーク利用を節約できる。限界生産力が正だから。したがって、等量線は右下がり。

(性質 2) 労働時間が少ないとする。労働の限界生産性は高い。したがって、ネットワーク利用を大幅に節約できる。労働時間が多いとする。限界生産性が低いので、ネットワーク利用をあまり節約できない。したがって、等量線は原点に関して凸。

(性質 3) 2 本の等量線 l_1, l_2 が交わっていると仮定する。 l_1 上の点 A , l_2 上の点 B について、労働時間、ネットワーク利用のいずれも、点 B の方が点 A よりも多くなるような点を取ることができる。定義より、点 A , 点 B における生産量は同じ。したがって、限界生産性が正であることに矛盾する。したがって、等量線は交わらない。

太郎「労働の限界生産性は逓減するらしい。勉強時間をもっと増やさないと」

³係数 A を全要素生産性 (Total Factor Productivity, TFP) という。

⁴ a, b を投入係数という。 $\min\{.,.\}$ の意味は、補論を参照せよ。

補足

レオンチェフ型生産関数と等量線

$\min\{.,.\}$ とは、カッコの中の2つの数のうち小さい方を選ぶという意味。たとえば、 $\min\{4, 2\} = 2$ である。文字を含むときは、場合分けをする。

$$\min\{a, 2\} = \begin{cases} a & \text{if } a \leq 2 \\ 2 & \text{if } a \geq 2 \end{cases}$$

(3) 式の等量線を求めよう。目標とする生産量を q とする。

$$q = \min\left\{\frac{z_1}{a}, \frac{z_2}{b}\right\} \quad (5)$$

ここで、

$$\min\left\{\frac{z_1}{a}, \frac{z_2}{b}\right\} = \begin{cases} \frac{z_1}{a} & \text{if } \frac{z_1}{a} \leq \frac{z_2}{b} \\ \frac{z_2}{b} & \text{if } \frac{z_1}{a} \geq \frac{z_2}{b} \end{cases}$$

であることから、(5) 式は、

$$\begin{cases} q = \frac{z_1}{a} & \text{if } z_2 \geq \frac{b}{a}z_1 \\ q = \frac{z_2}{b} & \text{if } z_2 \leq \frac{b}{a}z_1 \end{cases}$$

これを、平面 (z_1, z_2) 上に図示する。 $q = \frac{z_1}{a} \Leftrightarrow z_1 = aq$ は垂直線を表す。 $q = \frac{z_2}{b} \Leftrightarrow z_2 = bq$ は水平線を表す。 $z_2 \geq \frac{b}{a}z_1$ は、半直線 $z_2 = \frac{b}{a}z_1$ の上の領域を表す。 $z_2 \leq \frac{b}{a}z_1$ は、半直線の下領域を表す。以上をまとめると、半直線の上領域では垂直線を引き、下領域では水平線を引く。交点の座標は、 (aq, bq) である。レオンチェフ型生産関数の等量線は、L字型になる(下図)。

図. 等量線 ($a = 3, b = 2, q = 10$)

