第 21 講　ゲームの理論 (1) 標準型ゲーム（テキスト p. 335 - 345）

先生「同時手番ゲームを説明します．Normal form game と言います」
太郎「ゲームだって．面白そう」
花子「何だか難しそう」

例 *1*　囚人のジレンマ

共犯の疑いのある 2 人の囚人が，別々に取り調べを受けている．2 人がともに自白すると，刑期はともに 7 年．ともに黙秘すると，ともに 1 年．一方が自白し，もう一方が黙秘すると，自白した人は釈放され，黙秘した人は刑期が 10 年になる[1]．以上のルールを囚人たちが知っているとき，彼らは自白するか，あるいは黙秘するか.

		囚人 B	
		自白	黙秘
囚人 A	自白	$-7,\quad -7$	$0,\quad -10$
	黙秘	$-10,\quad 0$	$-1,\quad -1$

刑期（負の利得）を行列を用いて表す．利得行列という．左が囚人 A の利得，右が囚人 B の利得を表す．相手とのコミュニケーションが取れないので，相手の行動を所与として，最適な行動を選択する[2]．相手が自白するならば自白する．相手が黙秘するならば自白する．最適反応は，いずれの場合も自白．ナッシュ均衡は（自白，自白）．囚人たちの最適な状態（黙秘，黙秘）は実現しない.

問題 *1*　男女の争い (battle of the sexes)

太郎くんと花子さんが休日にデートにいく．太郎くんは，できればサッカーを観にいきたいと思っている．花子さんは，できれば映画を観にいきたいと思っている．利得表は次の通り．ナッシュ均衡を求めよ.

		花子	
		サッカー	映画
太郎	サッカー	100,　50	−10,　20
	映画	0,　0	50,　100

解答

(映画，映画）, (サッカー，サッカー）の 2 つ．ただし，左の要素が太郎の戦略（選択）を，右が花子の戦略を表す.

(考え方)

まず，太郎の立場で考える．花子がサッカーを選ぶとする．1 列に注目．喜んでサッカー（100 に下線を引く）．花子が映画を選ぶとする．2 列に注目．映画だよね. (50 に下線を引く）.

次に，花子の立場で考える．太郎がサッカーを選ぶとする．1 行に注目．50 と 20 なので，サッカー（50 に下線を引く）．太郎が映画を選ぶとする．2 行に注目．喜んで映画（100 に下線を引く）.

4 つのマスの中で，2 つの数字に下線が引かれているのがナッシュ均衡.

標準型ゲームは，(1) プレーヤー，(2) 戦略，(3) 利得から構成される[3]．均衡とは均衡戦略のことである.

---

[1] 司法取引という.
[2] 第 14 講のクールノー均衡を参照せよ.
[3] 行動の選択と戦略は厳密には異なる．この点は次回説明する.

例 *2*　マクシミン戦略（p. 340）

戦略にもいろいろある．もう一度，男女の争いモデルを考える．太郎はビビリである．ついつい最悪のシナリオを考えてしまう．自分がサッカーを選択したときの最悪の利得は -10 である．映画なら 0．最悪の状態を避けたいので，映画を選択する．花子もビビリだとすると，最悪のシナリオは，自分がサッカー，太郎が映画を選んだときの利得 0 である．したがって，花子は映画を選択する．均衡は（映画，映画）である．最悪を避ける戦略を，マクシミン戦略という[4]．

例 *3*　ゼロ和ゲーム（p. 341）

プレーヤーの利得の合計が一定であるとき，一方が得をすれば他方は損をする．ゼロ和ゲームという．

		花子 遊ぶ	花子 遊ばない
太郎	遊ぶ	40,　-40	-10,　10
	遊ばない	-30,　30	20,　-20

太郎は，遊ぼっていうと遊ぼっていう．遊ばないっていうと遊ばないっていう．真似するのが好き．花子は，遊ぼっていうと遊ばないっていう．遊ばないっていうと遊ぼっていう．あまのじゃく，へそ曲がり．

問題 *2*

(1) ナッシュ均衡は存在しないことを示せ．

(2) マクシミン戦略での均衡を求めよ．

(3) (2) の均衡は安定的でないことを示せ．

解答

(1) 太郎目線の下線は，40 と 20 にある．花子目線の下線は，10 と 30 にある．2 つの数字に下線が引かれているマスがない．

(2) 太郎は，最悪の利得 -30 を避けたい．遊ぶを選ぶ．花子は，最悪の利得 -40 を避けたい．遊ばないを選ぶ．マクシミン戦略での均衡は,（遊ぶ，遊ばない）．

(3) 最初,（遊ぶ，遊ばない）の状態にあるとする．花子は満足．でも太郎はつまらない．花子が遊ばないっていうなら遊ばないっていう．均衡が（遊ばない，遊ばない）に移動する．

新しい均衡に太郎は満足．でも花子は気に入らない．太郎が遊ばないっていうなら遊ぼっていう．私はあまのじゃく．均衡が（遊ばない，遊ぶ）に移動する．

右上の均衡から始まって，右下，左下へと移動した．移動は止まらない．時計回りにいつまでも続く．ということは，安定的ではない．

例 *4*　混合戦略（p. 344）

確率 1 で戦略の 1 つを選ぶことを，純粋戦略という．1 以下の確率で，ランダムに戦略を選ぶことを，混合戦略という．

上のゼロ和ゲームにおいて，太郎が遊ぶを選択する確率を a，花子が遊ぶを選択する確率を b とする $(0 \leqq a, b \leqq 1)$．

		花子 遊ぶ　(b)	花子 遊ばない $(1-b)$
太郎	遊ぶ　(a)	40,　-40	-10,　10
	遊ばない $(1-a)$	-30,　30	20,　-20

[4]プレーヤー 1 の行動を，$\max_{x_1} \min_{x_2} u_1(x_1, x_2)$ と書くことができるのでマクシミンという．

太郎の期待利得を π_A とすると，

$$\begin{aligned}\pi_A &= 40ab - 10a(1-b) - 30(1-a)b + 20(1-a)(1-b)\\ &= (100b-30)a + 20 - 50b\end{aligned}$$

である．

太郎の最適化問題は，次のように定式化される．

$$\max_{0\leq a\leq 1} \pi_A = (100b-30)a + 20 - 50b \tag{1}$$

a の係数 $(100b-30)$ に注目する．係数が正ならば，(1) 式は右上がりの直線を表す．π_A が最大となるのは，$a=1$ のとき．係数が負ならば，右下がりの直線．$a=0$ で最大．係数がゼロのときは水平線を表す．どんな a でも良い．

以上をまとめると，

$$a^* = \begin{cases} 1 & & b > 0.3 \\ any & \text{if} & b = 0.3 \\ 0 & & b < 0.3 \end{cases} \tag{2}$$

が得られる．【図 1】は，平面 (a,b) 上の正方形の内部に，(1) 式を図示したものである．

花子の期待利得 π_B は，

$$\begin{aligned}\pi_B &= -40ab + 10a(1-b) + 30(1-a)b - 20(1-a)(1-b)\\ &= (50-100a)b + 30a - 20\end{aligned}$$

上と同様にして，b の係数 $(50-100a)$ の符号で場合分けして，最適な b を求める．

$$b^* = \begin{cases} 1 & & a < 0.5 \\ any & \text{if} & a = 0.5 \\ 0 & & a > 0.5 \end{cases} \tag{3}$$

(3) 式を図示すると【図 2】になる．

(2) 式は太郎の反応関数を，(3) 式は花子の反応関数を表す．2 つの反応曲線を，平面 (a,b) 上の正方形の内部に図示する【図 3】．反応曲線の交点は $E(0.5, 0.3)$ である．いったん点 E が達成されると，太郎も花子も行動を変える誘因を持たないので，ナッシュ均衡である．一般に，純粋戦略均衡が存在しない場合でも，混合戦略まで考えれば，均衡が存在することが知られている．

補足

太郎の反応曲線は右上がり．なぜか．b が大きいとは，花子が遊ぼっていう可能性が高いという意味．そういうとき，真似っこ太郎は遊ぼっていいたい．つまり，a を大きくする．

花子の反応曲線は右下がり．a が大きいということは，太郎が遊ぼっていう可能性が高い．そういうとき，あまのじゃく花子は遊ばないっていいたい．つまり，b を小さくする．反応曲線には，プレーヤーの性格が隠されている．

太郎「今度の週末，サッカー観にいかない？」
花子「映画に決まってるじゃない」
（続く）

図1. 太郎の反応曲線

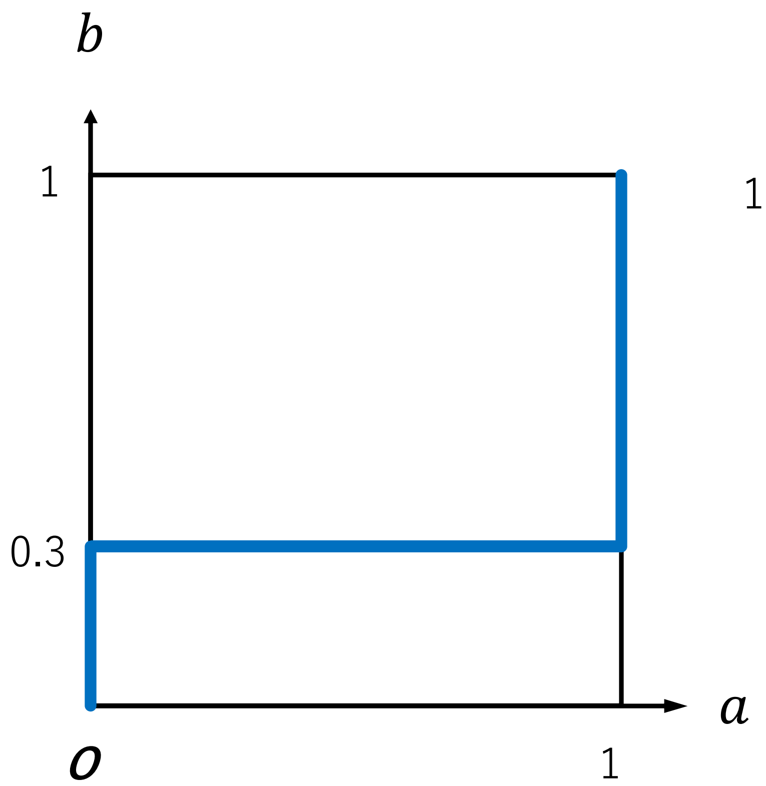

図2. 花子の反応曲線

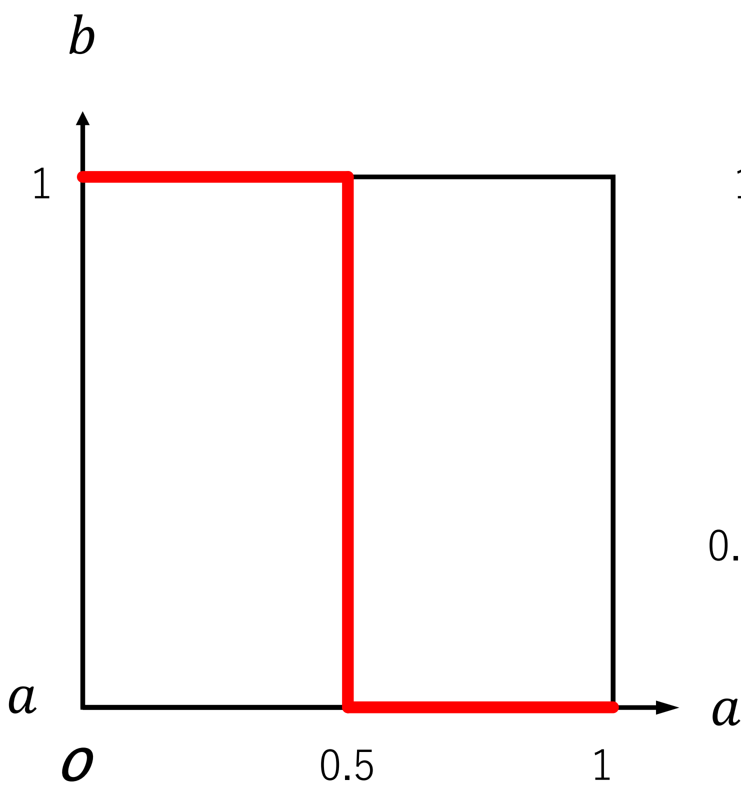

図3. ナッシュ均衡