

## 第 20 講 不確実性 (2) 保険と資産選択 (テキスト p. 262 - 267)

花子「うちのお母さん，ボーナスの運用で悩んでみたい」

太郎「うちもそう．何かアドバイスできないかな」

2つの状態 (state) があり，確率  $\alpha$  で状態 1 が，確率  $(1 - \alpha)$  で状態 2 が実現する．状態 1 における所得を  $x_1$ ，状態 2 における所得を  $x_2$  とし，所得  $x$  から得られる効用を  $U(x)$  とすると，期待効用は次式で表される．

$$EU = \alpha U(x_1) + (1 - \alpha)U(x_2) \quad (1)$$

## 1. 計算による理解

## 例題 1 (損害保険)

葉子さんは，資産  $W$  を持っている．災害が発生する確率を  $\alpha$ ，発生しない確率を  $(1 - \alpha)$  とする．災害が発生すると，資産はゼロになる．発生しなければ資産は  $W$  のまま．ただし，次のような損害保険を利用できる．災害が発生したら，保険金  $D$  をもらえる．災害が発生しないときは，保険料  $pD$  を払う ( $0 < p < 1$  は定数)．葉子さんは，資産が  $x$  のとき， $U(x) = \log x$  の効用を得るとする．葉子さんにとっての最適な保険金  $D$  を求めよ．

## 解答

【図 1】各 state における資産は，

$$\begin{cases} x_1 = 0 + D \\ x_2 = W - pD \end{cases}$$

(1) 式に代入すると，葉子さんの期待効用は，保険金  $D$  の関数となる．

$$EU = \alpha \log D + (1 - \alpha) \log(W - pD) \quad (2)$$

定義域は，

$$0 < D < \frac{W}{p}$$

(2) 式を  $D$  で微分する<sup>1</sup>．

$$\begin{aligned} EU' &= \alpha \cdot \frac{1}{D} + (1 - \alpha) \cdot \frac{-p}{W - pD} \\ &= \frac{\alpha W - pD}{D(W - pD)} \end{aligned}$$

増減表は次の通り．

$D$	0	$\frac{\alpha W}{p}$	$\frac{W}{p}$
$EU'$	+	0	-
$EU$	↗	極大	↘

したがって，最適な保険金は，

$$D^* = \frac{\alpha W}{p} \quad (3)$$

である．

… (答)

<sup>1</sup>対数関数の微分法と，合成関数の微分法を利用する．

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

## 補足

保険会社は、災害がないと保険料収入  $pD$  を得る。災害が発生すると保険金  $D$  を支払う。保険会社の期待収益は、 $\pi = (1 - \alpha) \times pD - \alpha \times D$  である。保険市場が完全競争的であるとすると、 $\pi = 0$  より、保険料率は、

$$p^* = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (4)$$

となる。(4) 式を、保険数理的に公平な料率という (actuarially fair rate).

(4) 式を (3) 式に代入すると、

$$D^* = (1 - \alpha)W$$

このとき、

$$x_1^* = x_2^* = (1 - \alpha)W \quad (5)$$

が成り立つ。保険数理的に公平であれば、個人はどちらに転んでも同じ資産になるように保険に加入する。完全加入という。問題もあるが対策もある<sup>2</sup>。

## 例題 2 (資産選択 (ポートフォリオ))

葉子さんは、100 万円の資産運用を考えている。安全資産 (貨幣) と危険資産がある。安全資産の金利はゼロ。危険資産は、確率  $\frac{1}{5}$  で投資額の 5 倍になり、確率  $\frac{4}{5}$  で投資額の半分になるとする。葉子さんは、確実な資産  $y$  万円に対して、 $U(y) = \log y$  の効用を得るとする。葉子さんにとっての最適な資産選択を求めよ。

## 解答

【図 2】 危険資産への投資額を  $x$  万円とする ( $0 \leq x \leq 100$ )。

このとき、good state における資産は、

$$(100 - x) + 5x = 100 + 4x$$

である。

bad state における資産は、

$$(100 - x) + \frac{1}{2}x = 100 - \frac{1}{2}x$$

したがって、葉子さんの期待効用は、 $x$  の関数となる。

$$EU = \frac{1}{5} \log(100 + 4x) + \frac{4}{5} \log\left(100 - \frac{1}{2}x\right)$$

$x$  で微分する。

$$\begin{aligned} EU' &= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{100 + 4x} + \frac{4}{5} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{100 - \frac{1}{2}x} \\ &= \frac{200 - 10x}{5(100 + 4x)(100 - \frac{1}{2}x)} \end{aligned}$$

増減表は次の通り。

$x$	0	20	100
$EU'$	+	0	-
$EU$		↗ 極大 ↘	

したがって、 $x = 20$  のとき、期待効用が最大となる。

最適な資産選択は、危険資産 20 万円、安全資産 80 万円。

… (答)

<sup>2</sup>モラルハザード、アドバースセレクションを参照。

2. 図による理解 (図 8.5, 図 8.6)

例題 1 で,  $x_1, x_2$  を消去する代わりに,  $D$  を消去する. 最適化問題は,

$$\max_{x_1, x_2} EU = \alpha U(x_1) + (1 - \alpha)U(x_2)$$

subject to

$$x_2 = W - px_1 \tag{6}$$

と定式化できる. 図 8.5 の右下がりの線分は, (6) 式を図示したもの.

最適化の条件は,

$$MRS_{21} = \frac{\alpha U'(x_1)}{(1 - \alpha)U'(x_2)} = p \tag{7}$$

である. 図 8.5 の点  $E$  が均衡を表している.

特に, (4) 式が成り立つとしよう. (7) 式から,  $U'(x_1) = U'(x_2)$ . つまり,  $x_1 = x_2$  が得られる. 完全加入は効用関数に依存しない.

例題 2 で, good state の資産を  $x_2$ , bad state の資産を  $x_1$  とする.

$$\begin{cases} x_2 = 100 + 4x \\ x_1 = 100 - \frac{1}{2}x \\ 0 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

$x$  を消去すると,

$$x_2 = 900 - 8x_1, \quad (50 \leq x_1 \leq 100) \tag{8}$$

が得られる. (8) 式は, 2 点 (50, 500), (100, 100) を端点とする線分を表す<sup>3</sup>.

最適化問題は, 次のように定式化される.

$$\max_{x_1, x_2} EU = \frac{1}{5} \log x_2 + \frac{4}{5} \log x_1$$

subject to (8).

図 8.6 の点  $E$  が均衡を表している. 以下, 計算して確かめる.

最適化の条件は,

$$MRS_{21} = 8 \tag{9}$$

ここで,

$$MRS_{21} = \frac{\frac{4}{5} \frac{1}{x_1}}{\frac{1}{5} \frac{1}{x_2}} = \frac{4x_2}{x_1}$$

したがって, (9) 式より,  $x_2 = 2x_1$ . (8) 式より,  $(x_1^*, x_2^*) = (90, 180)$ . たしかに線分上にある. このとき,  $x = 20$ . つまり, 危険資産に 20 万円投資している.

太郎「効用関数が資産選択に影響するんだ」

花子「うちの保険どうなってるか, お母さんに聞いてみよっと」

<sup>3</sup>図 8.6 の青色の線分.

図1. 損害保険

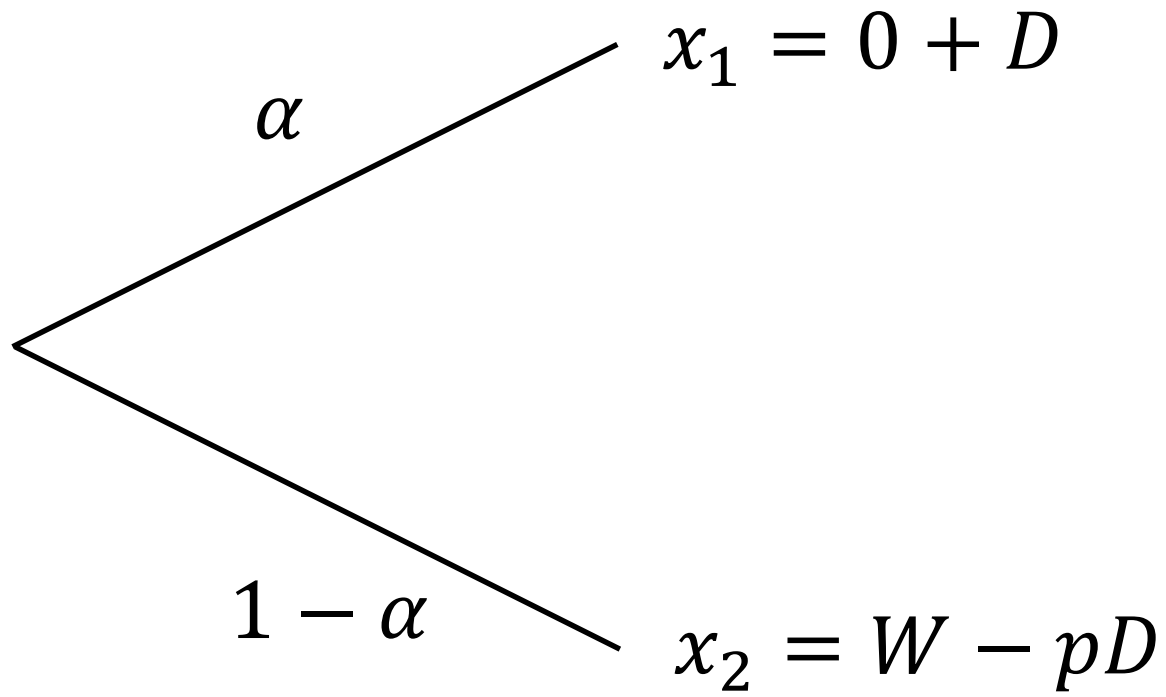


図2. 危険資産

