第 19 講　不確実性 (1) 期待効用（テキスト p. 255 - 262）

先生「10% の確率で 100 万円が当たるくじがあります．いくらなら買ってもよいと思いますか」
太郎「そりゃ10 万円でしょ」
花子「私は 3 万円かな」

---

1. くじ

確率 α_1 で x_1 円，確率 α_2 で x_2 円が当たるくじがあるとする（$\alpha_1+\alpha_2=1$）．くじは，4 ページの図 1 のように表現できる．あるいは，図 2 の表で表現できる[1]．くじの（数学的）期待値は，

$$x^e = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

である．

2. 期待効用

このくじに対する期待効用 (expected utility) を，

$$EU = \alpha_1 U(x_1) + \alpha_2 U(x_2) \tag{1}$$

と定義する．$U(x)$ は，確実な所得 x 円が得られるときの効用を表す．(1) 式は，個人は不確実な状況で，所得の期待値ではなく，効用の期待値に関心を持つと仮定している．期待効用仮説という．

例　10% の確率で 100 万円が当たるくじがある．効用関数を $U(x)=\sqrt{x}$ とすると，このくじの期待効用は，

$$0.1 \times \sqrt{1000000} + 0.9 \times \sqrt{0} = 100$$

3. くじの私的な価格（確実性等価）

くじの期待効用と同じ効用水準を与える確実な所得を x^* とする．

$$\alpha_1 U(x_1) + \alpha_2 U(x_2) = U(x^*) \tag{2}$$

x^* は，くじのために払ってもよいと思う価格（の最大値）を表している．確実性等価 (certainty equivalent) という．

例　上の例では，$\sqrt{x}=100$ を解いて，確実性等価は，$x^*=10000$ 円．

問題 *1*

10% の確率で 100 万円が当たるくじがある．花子さんは確実な所得 x 円に対して $U(x)=x^{\frac{2}{3}}$ の効用を得るとする．花子さんが払ってもよいと思う，くじの最高価格 (確実性等価) を求めよ．ただし，$\sqrt{10}=3.16$ を用いよ．

---

[1]確率分布という．変数 X を確率変数という．

解答

(2) 式より，

$$0.1 \times 1000000^{\frac{2}{3}} + 0.9 \times 0^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$$

ここで，

$$0.1 \times 1000000^{\frac{2}{3}} = 10^{-1} \times (10^6)^{\frac{2}{3}} = 10^{-1+4} = 10^3$$

したがって，

$$x^{\frac{2}{3}} = 10^3 \Leftrightarrow x = (10^3)^{\frac{3}{2}} = 10^{4.5} = 10000\sqrt{10} = 31600$$

確実性等価は，31600 円. $\cdots$(答)

4. 図による理解（図 8.1, 8.2, 8.3）

作図の仕方

(1) ヨコ軸上に x_1, x_2 をとる.

(2) タテ軸上に $U(x_1), U(x_2)$ をとる.

(3) 内分点 $\alpha_1 U(x_1) + \alpha_2 U(x_2)$ をタテ軸上にとる[2].

(4) 右にいって，曲線から下に下ろしたところが，確実性等価 x^*.

(5) 右にいって，線分 A_1A_2 との交点 E から下に下ろしたところが，期待値 $x^e = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. [3]

効用関数 $U(x)$ の性質により，個人のリスクに対する態度を分類できる.

リスク回避的 (risk averse)	$\Leftrightarrow$	$U''(x) < 0$（上に凸）
リスク中立的 (risk neutral)	$\Leftrightarrow$	$U''(x) = 0$（直線）
リスク愛好的 (risk loving)	$\Leftrightarrow$	$U''(x) > 0$（下に凸）

（理由）図より，期待値 x^e と確実性等価 x^* の大小関係は次のように分類できる.

リスク回避的	$\Leftrightarrow$	$x^* < x^e$
リスク中立的	$\Leftrightarrow$	$x^* = x^e$
リスク愛好的	$\Leftrightarrow$	$x^* > x^e$

リスク中立的な個人は，期待値 x^e でくじを買ってもよいと考える．リスク回避者は期待値 x^e では買わない．リスク愛好者は，期待値よりも高い価格を払ってもよいと考える．言葉と整合的.

[2] 数直線上に 2 点 $A(a)$，$B(a)$ をとる．線分 AB を，$t : (1-t)$ に内分する点を $C(c)$ とすると，$c = (1-t)a + tb$ が成り立つ.

[3] 中点連結定理を復習してください.

5. リスクプレミアム

ある個人が，10% の確率で 100 万円が当たるくじを持っている．効用関数が $U(x) = \sqrt{x}$ のとき，彼は，確実性等価 $x^* = 10000$ 円でくじを売ってもよいと考える（はず）[4]．

くじを購入する経済主体を，保険会社と呼ぼう．保険会社は，大量のくじを個人から購入することで，くじ 1 本あたり平均して，$x^e - x^* = 90000$ 円儲けることができる．差額 $(x^e - x^*)$ を，リスクプレミアムという．

取引の前後で，個人は無差別．保険会社の利潤の分だけ社会的余剰が増える．保険は，経済厚生を改善する制度である．

問題 *2*

上の例で，保険市場が完全競争的であるとする．このとき，

(1) くじの取引価格は，$x^e = 100000$ 円になる．

(2) 上と同じだけ社会的余剰が増える．

なぜそうなるのか，理由を説明せよ．

解答

(1) 個人は 1 万円なら売ってもよいと思っている．では，1 万円で買い取れるか．買い取れない．なぜなら，2 万円で買い取りますという別の業者が現れるから．2 万円で買い取れるか．買い取れない．3 万円で買うよという業者が現れるから．儲けが期待できる限り，より高い値をつける業者が現れる．買値のつり上げが止まるのは，期待利潤がゼロになるとき．つまり，10 万円である．

(2) 保険会社の期待利潤はゼロ．個人は，1 万円で売ってもよいと思っていたのに，10 万円で売ることができた．消費者余剰は 9 万円．社会的余剰も 9 万円．

問題 *3*

確率 $\frac{1}{3}$ で 160,000 円，確率 $\frac{2}{3}$ で 10,000 円が当たるくじがある．

(1) 花子さんは確実な所得 x 円に対して $U(x) = \sqrt{x}$ の効用を得るとする．花子さんが払ってもよいと思う，くじの最高価格 (確実性等価) を求めよ．

(2) 花子さんがこのくじを所有しているとする．リスク中立的な経済主体は，(1) の価格でくじを購入することで利益を得る．期待利益の大きさ (リスクプレミアム) を求めよ．

解答

(1)

$$\frac{1}{3} \times \sqrt{160000} + \frac{2}{3} \times \sqrt{10000} = \sqrt{x}$$

を解く．左辺は，$\frac{1}{3} \times 400 + \frac{2}{3} \times 100 = 200$．したがって，$x = 40000$ 円．

(2) 期待値は，

$$\frac{1}{3} \times 160000 + \frac{2}{3} \times 10000 = 60000 \text{ 円}$$

したがって，リスクプレミアムは，$60000 - 40000 = 20000$ 円． $\cdots$(答)

花子「私の効用関数が，先生にバレた」

太郎「リスクプレミアムって，ちょっとかっこいい」

---

[4] 人間は，同じモノであっても，売値（所有物への評価額）を買値（非所有物への評価額）よりも高くする傾向がある．興味のある人は，行動経済学のテキストを読んでください．

図1. くじ

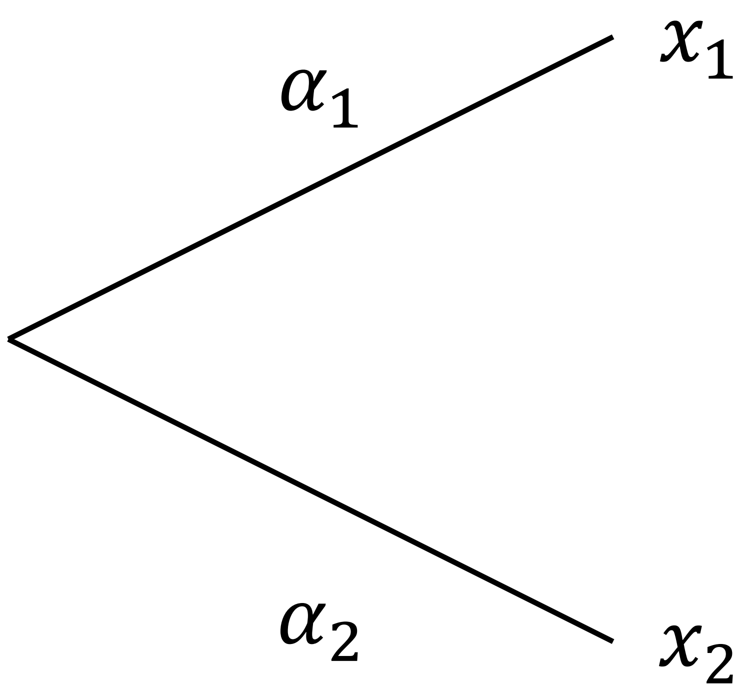

図2. くじ(2)

X	x_1	x_2	
確率P	α_1	α_2	1