第 4 講　消費者行動の理論 (3) 予算制約と効用最大化（テキスト p.32 - 38）

花子さんと太郎くんは，フルーツパーティの買い出しのため，スーパーに来ている．
予算は 3,000 円．リンゴは 1 個 200 円，ミカンは 1 個 100 円で売られている．
花子さん「うーん．それぞれ 10 個ずつでどう」
太郎くん「リンゴ買い過ぎでしょ．リンゴ 5 個，みかん 20 個がベスト」

---

1. 予算制約式と予算線

与えられた所得，価格のもとで 2 つの財を消費する．消費可能な財の組合せ (x_1, x_2) はいくつもある．所得を m (円)，財 1 の価格を p_1 (円)，財 2 の価格を p_2 (円) とする．消費可能な組合せは，数式を用いると，

$$m \geqq p_1x_1 + p_2x_2 \tag{1}$$

と表現できる．(1) 式を満たす第 1 象限および両軸上の領域を消費可能集合 (consumption possibility set) という．特に，所得を残らず消費するとき，消費可能な組合せは，

$$m = p_1x_1 + p_2x_2 \tag{2}$$

と表現できる．(2) 式を予算制約式という[1]．(2) 式を平面 (x_1, x_2) 上に描いたものを予算線という（図 2.7）．

予算線の性質

(i) 右下がり．傾き $-p_1/p_2$．
(ii) ヨコ軸との切片 m/p_1，タテ軸との切片 m/p_2．

比較静学
(i) 所得効果
所得 m が増加したとする．予算線は右上に平行移動する．

(ii) 価格効果
価格 p_1 が上昇したとする．予算線はタテ軸との切片を中心に内側に回転する．
価格 p_2 が上昇したとする．予算線はヨコ軸との切片を中心に内側に回転する．

問題 *1*
$(m, p_1, p_2) = (3000, 200, 100)$ のとき，予算制約式は，

$$3000 = 200x_1 + 100x_2$$

となる．x_1 はリンゴの消費量を，x_2 はみかんの消費量を表す.
(1) 平面 (x_1, x_2) 上に予算線を図示せよ．
(2) 価格が一定のもとで，所得が $m = 4000$ になったときの予算線を図示せよ．
(3) 所得が一定のもとで，リンゴの価格が $p_1 = 300$ になったときの予算線を図示せよ．

---

[1]消費可能な領域の境界なので，消費可能性フロンティア（consumption possibility frontier）ともいう．

2. 効用最大化

「消費者は，価格を所与として，予算制約のもとで効用が最大となるように財の消費量を決定する」という消費者の最適化問題は，次のように定式化される[2].

$$\max_{x_1,\, x_2} \quad u = U(x_1, x_2) \quad \text{subject to} \quad m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \tag{3}$$

(3) の問題の解 (x_1^*, x_2^*) を主体的均衡という．上付きの*は，解であることを表す．均衡は，図 2.8 の点 P で表される．

最適化の条件は，

$$MRS_{21} = \frac{p_1}{p_2} \tag{4}$$

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \tag{5}$$

である[3].

(5) 式は，均衡が予算線上にあることを意味する．(4) 式は，均衡において，無差別曲線と予算線が接していることを意味する．

(4), (5) 式を x_1, x_2 の連立方程式とみなして解けば，均衡解 (x_1^*, x_2^*) が求められる．

3. 需要関数と間接効用関数

主体的均衡における消費量 x_1^*, x_2^* は，価格 p_1, p_2 と所得 m の関数となる．需要関数 (demand function) という．

$$x_1^* = D_1(p_1, p_2, m) \tag{6}$$

$$x_2^* = D_2(p_1, p_2, m) \tag{7}$$

需要関数を効用関数に代入すると，主体的均衡における効用水準も価格 p_1, p_2 と所得 m の関数となる．間接効用関数 (indirect utility function) という (54 ページ).

$$u^* = U(x_1^*, x_2^*) = V(p_1, p_2, m) \tag{8}$$

図 2.8 の読み解き方

リンゴとみかんは無数にある．しかし，私のお財布の中身は限られている．そこをどう表現するか．予算線である．私の悩みは，予算線 AB 上のどの点を選ぶのかというただ 1 点である．

どの点を選んだらいい？後は思考実験である．点 Q はどうだろう．リンゴがちょっと少ない気がする．よく見ると，点 Q を通る無差別曲線は，予算線ともう 1 点で交わっている．この点を S としよう．無差別なので，$Q \sim S$ である．点 S では，みかんが少ない気がする．私は，Q を選ぶこともできるし，S を選ぶこともできる．でもこれってベストな選択なのだろうか．そもそも，無差別な点が存在すること自体，ベストとは言えないんじゃないの．

点 Q から予算線上を少し右下に移動しよう．この点を T とする．点 T を通る無差別曲線を引いてみる．Q を通る無差別曲線よりも右上にある．ということは，$T \succ Q$ である．Q よりも T の方が効用が高い．良かった，Q を選ばなくて．私が求めていたのは T なのか？いや，待て．T を通る無差別曲線も，予算線と別の点で交わっている．最初の状況と同じである．ということは，まだ改善の余地がありそうだ．

点 T からさらに予算線上を右下に移動する．移動した点で無差別曲線を引いてみる．まだだ．もっとリンゴをくれ．

点 P に到達した．無差別曲線が予算線と接している．これ以上右下に移動すると，効用が下がる．そうなのだ．点 P こそ，私が探していた点なのだ．この点を選んで後悔する理由などあろうか．否．

[2] subject to は，「〜の制約のもとで」の意味．

[3] 1 階の条件（first-order condition）という．1 階の条件は，解であるための必要条件．十分かどうかを調べるには 2 階の条件（second-order condition）を利用する．単調性と希少性から，点 P において 2 階の条件が成立することを数学的に証明できる．

例題 *1*

効用関数が，$u = x_1^2 x_2$ であるとき，需要関数および間接効用関数を求めよ．予算制約式は (2) 式を用いよ．

解答

消費者の最適化問題は次のように定式化される．

$$\max_{x_1,\, x_2} \quad u = x_1^2 x_2 \quad \text{subject to} \quad m = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

最適化の条件は，

$$MRS_{21} = \frac{p_1}{p_2} \tag{9}$$

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \tag{10}$$

である．

ここで，

$$MRS_{21} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{2x_1 x_2}{x_1^2} = \frac{2x_2}{x_1}$$

であるから，(9) 式より，

$$p_1 x_1 = 2p_2 x_2 \tag{11}$$

(11) 式を (10) 式に代入して，x_1 を消去すると，

$$m = 2p_2 x_2 + p_2 x_2 = 3p_2 x_2$$

したがって， $x_2^* = \frac{m}{3p_2}$．

(11) 式を (10) 式に代入して，x_2 を消去すると，

$$m = p_1 x_1 + \frac{1}{2} p_1 x_1 = \frac{3}{2} p_1 x_1$$

したがって， $x_1^* = \frac{2m}{3p_1}$．

以上から，需要関数は，

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{2m}{3p_1}, \frac{m}{3p_2} \right) \tag{12}$$

である．

(12) 式を効用関数に代入する．間接効用関数は，

$$u^* = (x_1^*)^2 x_2^* = \left(\frac{2m}{3p_1} \right)^2 \frac{m}{3p_2} = \frac{4m^3}{27(p_1)^2 p_2}$$

（補足）

$(m, p_1, p_2) = (3000, 200, 100)$ とすると，(12) 式より，$(x_1^*, x_2^*) = (10, 10)$．

問題 *2*

効用関数が，$u = x_1 x_2^2$ であるとき，需要関数および間接効用関数を求めよ．予算制約式は (2) 式を用いよ．

---

2 人の会話を聞いていた経済学者がつぶやいた．

「ふむ．彼女の効用関数は，$u = x_1^2 x_2$，彼の効用関数は，$u = x_1 x_2^2$ ってところか」
