

数学補論 (テキスト p.16 - 19)

1. 偏微分
2. 合成関数の微分法 (1 変数)
3. 合成関数の微分法 (2 変数)
4. 陰関数の定理 (implicit function theorem)
5. 自然対数の底 e
6. 対数関数の微分法
7. 逆関数の微分法
8. 指数関数の微分法

1. 偏微分

変数が 2 つ以上の関数の微分を**偏微分**という。変数の数だけ偏微分がある。
 ∂ (ラウンド) という記号を用いる。右下の添え字で表現することもある。

定義

関数 $u = U(x_1, x_2)$ に対して,

$$\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x_1 + h, x_2) - U(x_1, x_2)}{h}$$

$$\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x_1, x_2 + h) - U(x_1, x_2)}{h}$$

問題 1 関数 $u = U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ の偏微分 $\partial U / \partial x_1$, $\partial U / \partial x_2$ を, 定義を用いて求めよ。

解答

$$\frac{U(x_1 + h, x_2) - U(x_1, x_2)}{h} = \frac{(x_1 + h)^2 x_2 - x_1^2 x_2}{h}$$

$$= (2x_1 + h)x_2$$

であるから, 定義より,

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_1 + h)x_2 = 2x_1 x_2$$

$$\frac{U(x_1, x_2 + h) - U(x_1, x_2)}{h} = \frac{x_1^2(x_2 + h) - x_1^2 x_2}{h}$$

$$= x_1^2$$

であるから, 定義より,

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \lim_{h \rightarrow 0} x_1^2 = x_1^2$$

偏微分の意味

 $\partial u / \partial x_1$ x_2 を定数とみなして x_1 で微分する。 $\partial u / \partial x_2$ x_1 を定数とみなして x_2 で微分する。

問題 2 定義を使わず, 直観的に偏微分を求めよ。

(1) $u = U(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1 + 4x_2 + 5$

(2) $u = U(x_1, x_2) = 2x_1 x_2^3 + x_1^2 x_2^2$

2. 合成関数の微分法 (1 変数)

$$\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases} \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (2)$$

(証明)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \left[\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \right] \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= f'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

(注) $g(x+h) - g(x) = k$ とおくと, $h \rightarrow 0$ のとき, $k \rightarrow 0$ である.

問題 3 $y = (x^2 + x + 1)^3$ を微分せよ.

解答 $y = u^3$, $u = x^2 + x + 1$ とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 3u^2 \cdot (2x + 1) \\ &= 3(x^2 + x + 1)^2(2x + 1) \end{aligned}$$

3. 合成関数の微分法 (2 変数)

t の関数 $u = U(x_1(t), x_2(t))$ に対して,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \quad (3)$$

が成り立つ.

(証明) 定義より,

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x_1(t+h), x_2(t+h)) - U(x_1(t), x_2(t))}{h} \\ \Delta x_1 &= x_1(t+h) - x_1(t), \Delta x_2 = x_2(t+h) - x_2(t) \text{ とおく.} \\ &= \frac{U(x_1(t) + \Delta x_1, x_2(t) + \Delta x_2) - U(x_1(t), x_2(t))}{h} \\ &= \frac{U(x_1(t) + \Delta x_1, x_2(t) + \Delta x_2) - U(x_1(t), x_2(t) + \Delta x_2)}{h} \\ &\quad + \frac{U(x_1(t), x_2(t) + \Delta x_2) - U(x_1(t), x_2(t))}{h} \\ &= \frac{U(x_1(t) + \Delta x_1, x_2(t) + \Delta x_2) - U(x_1(t), x_2(t) + \Delta x_2)}{\Delta x_1} \frac{\Delta x_1}{h} \\ &\quad + \frac{U(x_1(t), x_2(t) + \Delta x_2) - U(x_1(t), x_2(t))}{\Delta x_2} \frac{\Delta x_2}{h} \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$ のとき, $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0$ であつて, $\Delta x_1/h \rightarrow dx_1/dt$, $\Delta x_2/h \rightarrow dx_2/dt$ であるから,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt}$$

が成り立つ.

4. 陰関数の定理

無差別曲線 $\bar{u} = U(x_1, x_2)$ は, x_1 と x_2 の対応関係を「暗黙のうちに」(implicit に) 表している。つまり, x_2 を x_1 の関数とみなすことができる¹。

陰関数の定理

方程式 $\bar{u} = U(x_1, x_2)$ で表される関数 x_2 を x_1 で微分すると,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{U_1(x_1, x_2)}{U_2(x_1, x_2)} \quad (4)$$

が成り立つ。

(証明) $x_2 = f(x_1)$ とおく:

$$\bar{u} = U(x_1, f(x_1))$$

両辺を x_1 で微分する。 \bar{u} は定数なので, 左辺はゼロになる。右辺は, 合成関数の微分法を用いると,

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1}$$

したがって,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = -\frac{U_1(x_1, x_2)}{U_2(x_1, x_2)}$$

が成り立つ。

問題 4 効用関数を, $U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ とする。限界代替率 MRS_{21} を x_1, x_2 を用いて表せ。

解答

陰関数の定理より,

$$MRS_{21} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{U_1(x_1, x_2)}{U_2(x_1, x_2)}$$

ここで,

$$U_1 = 2x_1 x_2$$

$$U_2 = x_1^2$$

であるから,

$$MRS_{21} = \frac{2x_1 x_2}{x_1^2} = \frac{2x_2}{x_1}$$

問題 5 上の例で限界代替率 MRS_{12} を求め,

$$MRS_{12} = \frac{1}{MRS_{21}}$$

が成り立つことを確かめよ。

問題 6 次の効用関数の限界代替率 MRS_{21} を求めよ。

(1) $u = x_1 x_2^2$

(2) $u = x_1^3 x_2^2$

(3) $u = 2x_1 + 3x_2$

(1) $x_2/(2x_1)$, (2) $3x_2/(2x_1)$, (3) $2/3$

¹たとえば, 無差別曲線の式 $8 = x_1 x_2$ から, $x_2 = \frac{8}{x_1}$ という関数を求めることができる。

5. 自然対数の底 e

自然数 n が十分大きいとき,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

は, ある値に収束することが知られている (下の表を参照). この極限値を, ネイピア数, あるいは, 自然対数の底といい, e を用いて表す.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\dots \quad (5)$$

$x = 1/n$ とおく. $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow x \rightarrow 0$ なので,

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

でもある.

6. 対数関数の微分法

e を底とする対数 $\log_e x$ を自然対数という. e を省略して, $\log x$ とかく. $\ln x$ ともかく.

[公式]

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (7)$$

[証明] 定義を用いて, $f(x) = \log x$ の導関数を求め, (6) 式を利用する.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log \left(\frac{x+h}{x} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \log \left(\frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \log \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log (1+k)^{\frac{1}{k}} \\ &= \frac{1}{x} \log e \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ただし, $k = h/x$ であり, $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow k \rightarrow 0$.

(補足) 対数の公式 (真数条件 $A > 0$ など, 底の条件 $a > 0, a \neq 1$ などを満たすとき)

- (1) $\log 1 = 0$
- (2) $\log e = 1$
- (3) $\log A + \log B = \log AB$
- (4) $\log A - \log B = \log \frac{A}{B}$
- (5) $\log A^n = n \log A$
- (6) $\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2.00	2.250	2.370	2.441	2.488	2.522	2.546	2.566	2.581	2.594

7. 逆関数の微分法

[公式] $y = f(x)$ の逆関数 $x = g(y)$ に対して,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad (8)$$

が成り立つ.

[証明] 定義より,

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(y+h) - g(y)}{h}$$

$g(y+h) - g(y) = k$ とおく.

$g(y) = x$ を用いると, $g(y+h) = x+k \Leftrightarrow y+h = f(x+k)$.

さらに, $y = f(x)$ を用いると, $h = f(x+k) - f(x)$.

最後に, $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow k \rightarrow 0$ であるので,

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{f(x+k) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

8. 指数関数の微分法

[公式]

$$(e^x)' = e^x \quad (9)$$

[証明] $y = e^x$ とおく. 対数の定義より,

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$$

両辺を y で微分する. 対数関数の微分公式 (7) より,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

最後に, 逆関数の微分法 (8) 式を用いると,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = y = e^x$$

問題 7 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \log(2x+3)$

(2) $y = \log(x^2+x+2)$

(3) $y = e^{2x+1}$

(4) $y = e^x - e^{-x}$

(1) $2/(2x+3)$, (2) $(2x+1)/(x^2+x+2)$, (3) $2e^{2x+1}$, (4) $e^x + e^{-x}$