第 21 講　ゲームの理論 (1) 標準型ゲーム

先生「同時手番ゲームを説明します．Normal form game と言います」
太郎「ゲームだって．面白そう」
花子「何だか難しそう」

例 1　囚人のジレンマ

共犯の疑いのある 2 人の囚人が，別々に取り調べを受けている．2 人がともに自白すると，刑期はともに 7 年．ともに黙秘すると，ともに 1 年．一方が自白し，もう一方が黙秘すると，自白した人は釈放され，黙秘した人は刑期が 10 年になる[1]．以上のルールを囚人たちが知っているとき，彼らは自白するか，あるいは黙秘するか.

		囚人 B	
		自白	黙秘
囚人 A	自白	-7,　-7	0,　-10
	黙秘	-10,　0	-1,　-1

刑期（負の利得）を行列を用いて表す．利得行列という．左が囚人 A の利得，右が囚人 B の利得を表す．相手とのコミュニケーションが取れないので，相手の行動を所与として，最適な行動を選択する[2]．相手が自白するならば自白する．相手が黙秘するならば自白する．最適反応は，いずれの場合も自白．ナッシュ均衡は（自白，自白）．囚人たちの最適な状態（黙秘，黙秘）は実現しない.

問題 *1*　男女の争い (battle of the sexes)

太郎くんと花子さんが休日にデートにいく．太郎くんは，できればサッカーを観にいきたいと思っている．花子さんは，できれば映画を観にいきたいと思っている．利得表は次の通り．ナッシュ均衡を求めよ.

		花子	
		サッカー	映画
太郎	サッカー	100,　50	-10,　20
	映画	0,　0	50,　100

標準型ゲームは，(1) プレーヤー，(2) 戦略，(3) 利得から構成される[3]．均衡とは均衡戦略のことである.

例 2　マクシミン戦略

戦略にもいろいろある．もう一度，男女の争いモデルを考える．太郎がサッカーを選択した場合，最悪の利得は -10 である．映画なら 0．最悪の状態を避けたいのならば，映画を選択する．同じように考えると，花子は映画を選択する．均衡は（映画，映画）である．最悪を避ける戦略をマクシミン戦略という[4].

---

[1] 司法取引という.
[2] 第 14 講のクールノー均衡を参照せよ.
[3] 行動の選択と戦略は厳密には異なる．この点は次回説明する.
[4] プレーヤー 1 の行動を，$\max_{x_1} \min_{x_2} u_1(x_1, x_2)$ と書くことができるのでマクシミンという.

例 3　ゼロ和ゲーム

プレーヤーの利得の合計が一定であるとき，一方が得をすれば他方は損をする．ゼロ和ゲームという．

		花子 遊ぶ	花子 遊ばない
太郎	遊ぶ	40,　−40	−10,　10
	遊ばない	−30,　30	20,　−20

ナッシュ均衡は存在しない．マクシミン戦略での均衡は（遊ぶ，遊ばない）．しかし，この均衡は安定的ではない（**問題** *2*　なぜ安定的ではないのか，説明せよ）．

例 4　混合戦略

確率 1 で戦略の 1 つを選ぶことを，純粋戦略という．1 以下の確率で，ランダムに戦略を選ぶことを，混合戦略という．上のゼロ和ゲームにおいて，太郎が遊ぶを選択する確率を a，花子が遊ぶを選択する確率を b とする $(0 \leqq a, b \leqq 1)$.

		花子 遊ぶ　(b)	花子 遊ばない $(1-b)$
太郎	遊ぶ　(a)	40,　−40	−10,　10
	遊ばない $(1-a)$	−30,　30	20,　−20

太郎の期待利得を π_A とすると，

$$\begin{aligned}\pi_A &= 40ab - 10a(1-b) - 30(1-a)b + 20(1-a)(1-b) \\ &= (100b-30)a + 20 - 50b\end{aligned}$$

である．期待利得の最大化問題を解くと次式を得る．

$$a^* = \begin{cases} 1 & & b > 0.3 \\ any & \text{if} & b = 0.3 \\ 0 & & b < 0.3 \end{cases} \tag{1}$$

花子の期待利得 π_B は，

$$\begin{aligned}\pi_B &= -40ab + 10a(1-b) + 30(1-a)b - 20(1-a)(1-b) \\ &= (50-100a)b + 30a - 20\end{aligned}$$

期待利得の最大化問題を解くと次式を得る．

$$b^* = \begin{cases} 1 & & a < 0.5 \\ any & \text{if} & a = 0.5 \\ 0 & & a > 0.5 \end{cases} \tag{2}$$

(1) 式は，太郎の反応関数，(2) 式は，花子の反応関数を表す．2 つの反応曲線を，平面 (a, b) 上の正方形の内部に図示する．反応曲線の交点は $E(0.5, 0.3)$ である．いったん点 E が達成されると，どちらも行動を変える誘因を持たないので，ナッシュ均衡である．一般に，純粋戦略均衡が存在しない場合でも，混合戦略まで考えれば，均衡が存在することが知られている．

太郎「今度の週末，サッカー観にいかない？」
花子「映画に決まってるじゃない」

講義資料　http://www1.doshisha.ac.jp/~kmiyazaw/