

第 20 講 不確実性 (2) 保険と資産選択

花子「うちのお母さん，ボーナスの運用で悩んでみたい」

太郎「うちもそう．何かアドバイスできないかな」

2つの状態 (state) があり，確率 α で状態 1 が，確率 $(1 - \alpha)$ で状態 2 が実現する．状態 1 における所得を x_1 ，状態 2 における所得を x_2 とし，所得 x から得られる効用を $U(x)$ とすると，期待効用は次式で表される．

$$EU = \alpha U(x_1) + (1 - \alpha)U(x_2) \quad (1)$$

1. 計算による理解

例題 1 (損害保険)

葉子さんは，資産 W を持っている．災害が発生する確率を α ，発生しない確率を $(1 - \alpha)$ とする．災害が発生すると，資産はゼロになる．発生しなければ資産は W のまま．ただし，次のような損害保険を利用できる．災害が発生したら，保険金 D をもらえる．災害が発生しないときは，保険料 pD を払う ($0 < p < 1$ は定数)．葉子さんは，資産が x のとき， $U(x) = \log x$ の効用を得るとする．葉子さんにとっての最適な保険金 D を求めよ．

解答 各 state における資産は，

$$\begin{cases} x_1 = 0 + D \\ x_2 = W - pD \end{cases}$$

(1) 式に代入すると，葉子さんの期待効用は，保険金 D の関数となる．

$$EU = \alpha \log D + (1 - \alpha) \log(W - pD)$$

D で微分する¹．

$$\begin{aligned} EU' &= \alpha \cdot \frac{1}{D} + (1 - \alpha) \cdot \frac{-p}{W - pD} \\ &= \frac{\alpha W - pD}{D(W - pD)} \end{aligned}$$

増減表は次の通り．

D	0	$\frac{\alpha W}{p}$	$\frac{W}{p}$
EU'	+	0	-
EU	↗	極大	↘

したがって，最適な保険金は，

$$D^* = \frac{\alpha W}{p} \quad (2)$$

である．

… (答)

¹対数関数の微分法と，合成関数の微分法を利用する．

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

補足 保険会社の期待収益は、 $\pi = \alpha(-D) + (1 - \alpha)pD$ である。保険市場が完全競争的であるとすると、 $\pi = 0$ より、保険料率は、

$$p^* = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (3)$$

(3) 式を (2) 式に代入すると、各状態における資産は、

$$x_1^* = x_2^* = (1 - \alpha)W \quad (4)$$

となる。(保険数理的に) 公平な保険ならば、個人はどちらに転んでも同じ資産になるように保険に加入する。完全加入という。問題もあるが対策もある²。

例題 2 (資産選択 (ポートフォリオ))

葉子さんは、100 万円の資産運用を考えている。安全資産 (貨幣) と危険資産がある。安全資産の金利はゼロ。危険資産は、確率 $\frac{1}{4}$ で投資額の 6 倍になり、確率 $\frac{3}{4}$ で投資額の半分になるとする。葉子さんは、確実な資産 y 万円に対して、 $U(y) = \log y$ の効用を得るとする。葉子さんにとっての最適な資産選択を求めよ。

解答 危険資産への投資額を x 万円とする ($0 \leq x \leq 100$)。

このとき、good state における資産は、

$$(100 - x) + 6x = 100 + 5x$$

である。

bad state における資産は、

$$(100 - x) + \frac{1}{2}x = 100 - \frac{1}{2}x$$

したがって、葉子さんの期待効用は、 x の関数となる。

$$EU = \frac{1}{4} \log(100 + 5x) + \frac{3}{4} \log\left(100 - \frac{1}{2}x\right)$$

x で微分する。

$$\begin{aligned} EU' &= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{100 + 5x} + \frac{3}{4} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{100 - \frac{1}{2}x} \\ &= \frac{350 - 10x}{4(100 + 5x)(100 - \frac{1}{2}x)} \end{aligned}$$

増減表は次の通り。

x	0	35	100
EU'	+	0	-
EU	↗	極大	↘

したがって、 $x = 35$ のとき、期待効用が最大となる。

最適な資産選択は、危険資産 35 万円、安全資産 65 万円。

… (答)

太郎「効用関数が資産選択に影響するんだ」

花子「うちの保険どうなってるか、お母さんに聞いてみよっと」

講義資料 <http://www1.doshisha.ac.jp/~kmiyazaw/>

²モラルハザード、アドバースセレクションを参照。