

第 8 講 企業行動の理論 (3) 生産関数

花子「もうすぐ中間試験ね」

太郎「7割は取れると思うけど、9割取るのは大変そうだなあ」

生産要素と生産物の技術的關係を、関数を用いて表現する。生産関数という。

1. 生産要素が 1 つのとき

生産要素の投入量を z 、生産量を q とする。生産技術を、

$$q = f(z)$$

という関数で表現する。次の性質がある。

(1) 右上がり。 $f'(z) > 0$

(2) (広域的に) 上に凸。 $f''(z) < 0$

生産要素を追加的に 1 単位増やすとき、追加的に増える生産量のことを限界生産性 (marginal productivity, MP) という¹。限界生産性は、生産関数の接線の傾き $f'(z)$ で表される。生産量が増えるにしたがい限界生産性は低下する ($f''(z) < 0$)。限界生産性逓減の法則という。

生産要素の価格と固定費用が与えられれば、生産関数から費用関数を導出することができる。

例題 (例 3.2.1)

ある企業の持つ技術が、生産関数

$$q = f(z) = 2z^{\frac{1}{2}}$$

で表せるとする。生産要素の価格が $w = 6$ 、固定費用が $c_0 = 1$ のとき、この企業の費用関数 $C(q)$ を求めよ。また、限界費用、平均費用、平均可変費用を求め、供給関数 $q = q(p)$ を導出せよ。

(解答) 上の関係式から、

$$z = \frac{q^2}{4}$$

が得られる²。この式は、 q 単位生産するとき、生産要素が $q^2/4$ 単位必要であることを表している。したがって、費用関数は、

$$C(q) = c_0 + wz = 1 + \frac{3}{2}q^2$$

定義より、 $MC = 3q$ 、 $AC = \frac{3}{2}q + \frac{1}{q}$ 、 $AVC = \frac{3}{2}q$ 。

$p = MC$ 、 $p \geq AVC$ より、供給関数は、 $q = \frac{p}{3}$ 。

¹限界生産力ともいう。

²数学では、逆関数 f^{-1} という。

2. 生産要素が2つのとき

生産要素の投入量を z_1, z_2 とし、生産量を q とする。生産技術を次のような関数で表現する。

$$q = F(z_1, z_2) \quad (1)$$

例1 コブ=ダグラス型生産関数³

$$q = Az_1^\alpha z_2^\beta \quad (0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, A > 0 \text{ は定数})$$

例2 レオンチェフ型生産関数⁴

$$q = \min \left\{ \frac{z_1}{a}, \frac{z_2}{b} \right\} \quad (a > 0, b > 0 \text{ は定数})$$

問題1 例1の生産関数では、生産要素の限界生産性は正かつ逓減することを示せ。

($\partial q / \partial z_i > 0, \partial^2 q / \partial z_i^2 < 0$ を示す)

目標とする生産量を \bar{q} とする。生産要素の投入量の組合せ (z_1, z_2) はいくつもある。これらの組合せの軌跡を、等産出量曲線あるいは等量線 (isoquant) という。等量線とは、数式を用いると次のように表せる。

$$\bar{q} = F(z_1, z_2) \quad (2)$$

問題2 等量線を平面 (z_1, z_2) 上に図示せよ。

(1) $F(z_1, z_2) = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{q} = 10$

(2) $F(z_1, z_2) = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{q} = 20$

(3) $F(z_1, z_2) = \min \left\{ \frac{z_1}{2}, z_2 \right\}, \quad \bar{q} = 10$

(4) $F(z_1, z_2) = \min \left\{ \frac{z_1}{2}, z_2 \right\}, \quad \bar{q} = 20$

生産要素の限界生産性が正かつ逓減すると仮定する。このとき、等量線には次のような性質がある。

- 性質1 右下がり。原点に関して凸。
- 性質2 生産水準 \bar{q} が高ければ高いほど、等量線は右上にある。
- 性質3 等量線は交わらない。

問題3 上の3つの性質を持つ理由を、言葉で説明せよ。

ミクロ経済学の授業を終えた太郎くんがつぶやいた。

「労働の限界生産性は逓減するらしい。勉強時間をもっと増やさないと」

講義資料 <http://www1.doshisha.ac.jp/~kmiyazaw/>

³係数 A を全要素生産性 (Total Factor Productivity, TFP) という。

⁴ a, b を投入係数という。