

# 応用電波工学特論

---

出口 博之

同志社大学

2025 年 12 月 22 日

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>モード整合法</b>	<b>1</b>
1.1	ガラーキン法によるモード整合法（異なる単一導波路の接続）	1
1.1.1	不連続部のある導波路	1
1.1.2	不連続部の境界条件	2
1.1.3	ガラーキン法	2
1.1.4	規格化電圧, 電流	6
1.1.5	Self-Reaction の連続性	7
1.2	不連続部の散乱行列	8
1.3	複素電力に係る誤差	12
1.3.1	複素電力	12
1.3.2	誤差の定義	15
1.4	Self-Reaction が連続となるステップ状不連続問題	16
1.4.1	導波路#1 が#2 より大きい場合	16
1.4.2	導波路#2 が#1 より大きい場合	16
1.5	モード関数の内積について (TE-TE, TM-TM)	18
1.6	モード関数の内積について (TE-TM)	20
1.6.1	ストークスの定理を用いた計算	20
1.6.2	ガウスの発散定理を用いた別の導出	21
1.7	ガラーキン法によるモード整合法（2 線路からなる導波路と単一導波路の接続）	23
1.7.1	不連続部のある導波路	23
1.7.2	不連続部の境界条件	24
1.7.3	ガラーキン法	24
1.7.4	散乱行列の変形	30
<b>第 2 章</b>	<b>方形導波管の不連続問題</b>	<b>33</b>

2.1	方形導波管の不連続問題 . . . . .	33
2.1.1	方形導波管のモード関数 . . . . .	33
2.1.2	モード関数の内積 (#1, #2) . . . . .	35
2.2	H 面ステップ状不連続 ( $y$ 方向寸法 $b$ が一定の場合) . . . . .	40
2.3	E 面ステップ状不連続 ( $y$ 方向寸法 $b$ が一定の場合) . . . . .	42
2.4	E 面ステップ状不連続 ( $x$ 方向寸法 $a$ が一定の場合) . . . . .	45
2.4.1	E 面ステップと H 面ステップの縦続接続 . . . . .	46
2.5	シングルステップ不連続 ( $b$ 一定) . . . . .	48
2.6	ダブルステップ不連続 . . . . .	50
<b>第 3 章</b>	<b>一般的な伝送方程式</b> . . . . .	<b>53</b>
3.1	モード関数による展開 . . . . .	53
3.1.1	Maxwell の方程式 . . . . .	53
3.1.2	モード関数による展開 . . . . .	54
3.1.3	境界条件 . . . . .	55
3.1.4	モード展開した Maxwell の方程式 . . . . .	55
3.2	伝送方程式の導出 . . . . .	57
3.2.1	伝送方程式 . . . . .	63
3.3	伝送方程式の係数 (TE-TM) . . . . .	65
3.4	伝送方程式の係数 (TE-TE, TM-TM) . . . . .	67
3.4.1	面積分による計算 . . . . .	67
3.4.2	面積分から周回積分への変換 . . . . .	70
3.5	モード関数の積分 (TE-TE, TM-TM) について . . . . .	72
3.5.1	面積分 . . . . .	72
3.5.2	周回積分 . . . . .	73
3.6	モード関数の積分 (TE-TM) について . . . . .	75
3.6.1	ストークスの定理による周回積分への変換 . . . . .	75
3.6.2	ガウスの発散定理による周回積分への変換 . . . . .	76
3.7	曲線テーパ構造に対するガウスの発散定理 . . . . .	78
3.7.1	3 次元のガウスの発散定理の応用 . . . . .	78
3.7.2	テーパ構造における面積分と周回積分の関係 . . . . .	79
3.8	伝送方程式のまとめ . . . . .	81
3.9	円形テーパ導波管 . . . . .	82
3.9.1	伝送方程式の係数 (TE-TE, TM-TM) . . . . .	82
3.9.2	伝送方程式の係数 (TE-TM, TM-TE) . . . . .	89

3.9.3	伝送方程式	90
3.10	モード電圧, 電流と散乱パラメータ	92
3.10.1	多モード基本行列から散乱行列への変換	92
3.10.2	多モード基本行列の逆行列から散乱行列への変換	95
<b>第 4 章</b>	<b>円筒波展開</b>	<b>99</b>
4.1	円筒座標系におけるヘルムホルツ方程式	99
4.1.1	ベッセル関数	101
4.1.2	ヘルムホルツ方程式の解	102
4.2	ベクトルポテンシャルを用いた解析	103
4.3	TE 波	105
4.4	TM 波	109
<b>第 5 章</b>	<b>ビームモード展開法</b>	<b>113</b>
5.1	TE 波と TM 波の合成	113
5.2	平面波面の近似	119
5.3	ラゲルの多項式による電磁界の展開	121
5.3.1	電磁界の展開	121
5.3.2	ビームモードの正規化	125
5.3.3	ビームモードの電力	125
5.4	ビームモードのパラメータ	131
5.4.1	波面の曲率半径	131
5.4.2	ビーム半径	131
5.4.3	異なる位置でのビームモードの関係	132
5.5	ビームモード関数	134
5.5.1	正規直交したラゲルの多項式の計算例	136
5.6	ビームモード展開	139
5.6.1	ビームモードの伝送電力	140
5.6.2	電界の直角座標成分	141
5.7	ビームモード係数	142
5.8	単一ビームモードの放射パターン	144
5.9	ビームモードのホーンアンテナへの応用	147
5.9.1	1 次ホーンおよび鏡面上のビームモードのパラメータ	147
5.9.2	基本ビームモード	147
5.9.3	鏡面上のビーム半径	148

5.9.4	ホーンアンテナ	148
5.9.5	ホーンアンテナの位相中心	150
5.9.6	軸長が最小となる最適 1 次ホーン	152
5.9.7	最適円錐ホーン (ホーン単体の軸長最小の条件)	154
5.10	ビームモードによる 1 次ホーン的设计例	157
5.10.1	1 次ホーンの軸長を与えた設計	157
5.10.2	既存のホーンアンテナを 1 次放射器として用いる場合	159
5.10.3	鏡面とホーンとの距離を与えた 1 次ホーン的设计	160
5.10.4	開き角を与えたホーン単体の設計	162
5.10.5	1 次パターンの $t$ パラメータを与えた 1 次ホーン的设计	165
<b>第 6 章</b>	<b>エルミート形式の電磁波極値問題</b>	<b>169</b>
6.1	エルミート形式	169
6.1.1	エルミート行列	169
6.1.2	エルミート形式	170
6.1.3	エルミート作用素	171
6.1.4	エルミート行列, エルミート形式のまとめ	172
6.2	エルミート形式の例: 線形回路網の消費電力	174
6.2.1	インピーダンス行列	174
6.2.2	アドミタンス行列	175
6.3	エルミート形式の例: 放射電力	176
6.4	エルミート 2 次形式の比の極値条件	178
6.5	多端子対回路網の電力比の最大化	181
6.6	アンテナ利得	182
6.6.1	インピーダンス行列	182
6.6.2	アドミタンス行列	183
6.6.3	放射強度	183
6.6.4	電力利得	184
6.7	極値条件と最大利得	185
6.7.1	特別な場合 (ケース A)	185
6.7.2	アレーの最大利得	187
6.8	特別な場合の極値条件 (ケース B)	189
6.9	点波源アレーの最大利得	190
6.9.1	エルミート形式の放射電力	190
6.9.2	アレーアンテナの遠方界	191

6.9.3	放射強度 . . . . .	193
6.9.4	アンテナ利得 . . . . .	194
6.10	最小 2 乗法によるモード整合法 . . . . .	196
6.10.1	不連続部のある導波路 . . . . .	196
6.10.2	不連続部の境界条件 . . . . .	196
6.10.3	単一モード入射の場合 . . . . .	197
6.10.4	導波路 #1 からの入射したときの相対 2 乗平均誤差 . . . . .	198
6.10.5	エルミート 2 次形式 . . . . .	205
6.11	相対 2 乗平均誤差の最小値 . . . . .	207
付録 A	付録 . . . . .	209
A.1	調和関数の不定積分 . . . . .	209
A.1.1	正弦・正弦関数 ( $\sin$ , $\sin$ ) の不定積分 . . . . .	209
A.1.2	余弦・余弦関数 ( $\cos$ , $\cos$ ) の不定積分 . . . . .	212
A.1.3	不定積分のまとめ . . . . .	213
A.2	調和関数の定積分 . . . . .	215
A.3	ラゲルの多項式 . . . . .	216

# CHAPTER 1

## モード整合法

モード整合法を用いて、異なる導波路が接続される不連続部での電磁界の振る舞いを解析する方法について説明する。特に、ガラーキン法を適用し、入射波と反射波（散乱波）の複素振幅を行列形式で表現し、不連続部における電界と磁界の連続性や境界条件を満足させていく。このような解析により、多重モード散乱行列が導出され、不連続部での反射・透過について、伝搬モードだけでなく遮断モードも含めて定量的に評価できる。また、解析精度を評価するための複素電力の誤差の定義や、導波路のサイズが異なる場合のステップ状不連続問題への応用、さらにはモード関数の内積の計算方法についても詳細に解説していく。

### 1.1 ガラーキン法によるモード整合法（異なる単一導波路の接続）

---

#### 1.1.1 不連続部のある導波路

異なる2つの均一導波路#1 ( $z \leq 0$ ) と#2 ( $z \geq 0$ ) が  $z = 0$  で接続された不連続問題を、ガラーキン法によるモード整合法を適用し、試行関数 (testing function) として通常モード関数を用いた解法について説明する。不連続部における入射波の波動振幅を  $a_n^{(i)}$ 、反射（散乱）波の波動振幅を  $b_n^{(i)}$  とすると ( $i = 1, 2$  は導波路#1, #2 に対応,  $n$  はモードの次数), 位置ベクトル  $\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z + \boldsymbol{\rho}$  ( $\mathbf{a}_z$  は  $z$  方向の単位ベクトル) における横断面内電界  $\mathbf{E}_t^{(1)}$ ,  $\mathbf{E}_t^{(2)}$  は、次のようになる。

$$\mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, z) = \sum_n \left( a_n^{(1)} e^{-\gamma_n^{(1)} z} + b_n^{(1)} e^{\gamma_n^{(1)} z} \right) \sqrt{Z_n^{(1)}} \mathbf{e}_n^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, z) = \sum_n \left( b_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} z} + a_n^{(2)} e^{\gamma_n^{(2)} z} \right) \sqrt{Z_n^{(2)}} \mathbf{e}_n^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.2)$$

ただし、 $Z_n^{(i)}$  は導波路# $i$  における  $n$  次モードの波動インピーダンス、 $\gamma_n^{(i)}$  は伝搬定数、 $\mathbf{e}_n^{(i)}$  は電界のモード関数を示す。また、横断面内磁界  $\mathbf{H}_t^{(1)}$ 、 $\mathbf{H}_t^{(2)}$  は、

$$\mathbf{H}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, z) = \sum_n \left( a_n^{(1)} e^{-\gamma_n^{(1)} z} - b_n^{(1)} e^{\gamma_n^{(1)} z} \right) \sqrt{Y_n^{(1)}} \mathbf{h}_n^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{H}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, z) = \sum_n \left( b_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} z} - a_n^{(2)} e^{\gamma_n^{(2)} z} \right) \sqrt{Y_n^{(2)}} \mathbf{h}_n^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.4)$$

ただし、 $Y_n^{(i)}$  は導波路 # $i$  における  $n$  次モードの波動アドミタンス、 $\mathbf{h}_n^{(i)}$  は磁界のモード関数を示す。ここで、ベクトルモード関数  $\mathbf{e}_n^{(i)}$ 、 $\mathbf{h}_n^{(i)}$  の関係は、

$$\mathbf{e}_n^{(i)} = \mathbf{h}_n^{(i)} \times \mathbf{a}_z \quad (1.5)$$

$$\mathbf{h}_n^{(i)} = \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_n^{(i)} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{e}_m^{(i)} \cdot \mathbf{e}_n^{(i)} = \mathbf{h}_m^{(i)} \cdot \mathbf{h}_n^{(i)} \quad (1.7)$$

このとき、モード関数の正規直交条件は、

$$\iint_S \mathbf{e}_m^{(i)} \cdot \mathbf{e}_n^{(i)} dS = \iint_S \mathbf{h}_m^{(i)} \cdot \mathbf{h}_n^{(i)} dS = \delta_{mn} \quad (i = 1, 2) \quad (1.8)$$

### 1.1.2 不連続部の境界条件

不連続部が開口面  $S_0$ 、および（完全）導体面  $S_1$ （導波路#1 側の  $z = 0^-$ ）、 $S_2$ （導波路#2 側の  $z = 0^+$ ）とからなる場合、境界条件は次のようになる。

$$\mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) = \mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+), \quad \mathbf{H}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) = \mathbf{H}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+), \quad (\text{開口面 } S_0) \quad (1.9)$$

$$\mathbf{E}_t^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, 0^\mp) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (\text{導体面 } S_i) \quad (1.10)$$

ただし、上側符号は  $i = 1$ 、下側符号は  $i = 2$ 。ここで、

$$\mathbf{E}_t^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, 0^\mp) = \sum_n^{N_i} \left( a_n^{(i)} + b_n^{(i)} \right) \sqrt{Z_n^{(i)}} \mathbf{e}_n^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.11)$$

$$\mathbf{H}_t^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, 0^\mp) = \pm \sum_n^{N_i} \left( a_n^{(i)} - b_n^{(i)} \right) \sqrt{Y_n^{(i)}} \mathbf{h}_n^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.12)$$

### 1.1.3 ガラーキン法

開口面  $S_0$  の電界の境界条件の両辺に  $\mathbf{e}_m^{(1)} (m = 1, 2, \dots, N_{(1)})$  で内積をとると、

$$\iint_{S_0} \mathbf{e}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) dS = \iint_{S_0} \mathbf{e}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+) dS \quad (1.13)$$



導体面  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) の電界の境界条件の両辺に  $\mathbf{e}_m^{(i)}$  で内積をとると,

$$\iint_{S_1} \mathbf{e}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) dS = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N_1) \quad (1.14)$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{e}_m^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+) dS = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N_2) \quad (1.15)$$

式 (1.179) の上側と式 (1.181) より,

$$\iint_{S_0+S_1} \mathbf{e}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) dS = \iint_{S_0} \mathbf{e}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+) dS \quad (1.16)$$

これより,

$$\begin{aligned} & \sum_n^{N_1} \sqrt{Z_n^{(1)}} (a_n^{(1)} + b_n^{(1)}) \iint_{S_0+S_1} \mathbf{e}_m^{(1)} \cdot \mathbf{e}_n^{(1)} dS \\ &= \sum_n^{N_2} \sqrt{Z_n^{(2)}} (b_n^{(2)} + a_n^{(2)}) \iint_{S_0} \mathbf{e}_m^{(1)} \cdot \mathbf{e}_n^{(2)} dS \end{aligned} \quad (1.17)$$

また, 式 (1.179) の下側と式 (1.183) より,

$$\iint_{S_0} \mathbf{e}_m^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) dS = \iint_{S_0+S_2} \mathbf{e}_m^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+) dS \quad (1.18)$$

これについても,

$$\begin{aligned} & \sum_n^{N_1} \sqrt{Z_n^{(1)}} (a_n^{(1)} + b_n^{(1)}) \iint_{S_0} \mathbf{e}_m^{(2)} \cdot \mathbf{e}_n^{(1)} dS \\ &= \sum_n^{N_2} \sqrt{Z_n^{(2)}} (b_n^{(2)} + a_n^{(2)}) \iint_{S_0+S_2} \mathbf{e}_m^{(2)} \cdot \mathbf{e}_n^{(2)} dS \end{aligned} \quad (1.19)$$

モード関数の正規直交性より,

$$\begin{aligned} & \sqrt{Z_m^{(1)}} (a_m^{(1)} + b_m^{(1)}) \\ &= \sum_n^{N_1} \sqrt{Z_n^{(2)}} (b_n^{(2)} + a_n^{(2)}) \iint_{S_0} \mathbf{e}_m^{(1)} \cdot \mathbf{e}_n^{(2)} dS \quad (m = 1, 2, \dots, N_1) \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} & \sum_n^{N_1} \sqrt{Z_n^{(1)}} (a_n^{(1)} + b_n^{(1)}) \iint_{S_0} \mathbf{e}_m^{(2)} \cdot \mathbf{e}_n^{(1)} dS \\ &= \sqrt{Z_m^{(2)}} (b_m^{(2)} + a_m^{(2)}) \quad (m = 1, 2, \dots, N_2) \end{aligned} \quad (1.21)$$

一方, 開口面  $S_0$  の磁界の境界条件の両辺に  $\mathbf{h}_m^{(1)} \binom{1}{2}$  で内積をとると,  $m = 1, 2, \dots, N_{\binom{1}{2}}$  のとき,

$$\begin{aligned} & \sum_n^{\infty} \sqrt{Y_n^{(1)}} (a_n^{(1)} - b_n^{(1)}) \iint_{S_0} \mathbf{h}_m^{(1)} \binom{1}{2} \cdot \mathbf{h}_n^{(1)} dS \\ &= \sum_n^{\infty} \sqrt{Y_n^{(2)}} (b_n^{(2)} - a_n^{(2)}) \iint_{S_0} \mathbf{h}_m^{(2)} \binom{1}{2} \cdot \mathbf{h}_n^{(2)} dS \end{aligned} \quad (1.22)$$

ここで、モード関数の内積を次のようにおく、

$$\begin{aligned} I_{mn}^{ij} \Big|_S &\equiv \int_S \mathbf{e}_m^{(i)} \cdot \mathbf{e}_n^{(j)} dS = \int_S \mathbf{h}_m^{(i)} \cdot \mathbf{h}_n^{(j)} dS \\ &= \int_S \mathbf{e}_n^{(j)} \cdot \mathbf{e}_m^{(i)} dS = \int_S \mathbf{h}_n^{(j)} \cdot \mathbf{h}_m^{(i)} dS = I_{nm}^{ji} \Big|_S \end{aligned} \quad (1.23)$$

ただし、積分範囲  $S$  は、これまでの式では、 $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  などである。これより、 $\mathbf{e}_m^{(1)}$ ,  $\mathbf{h}_m^{(1)}$  の内積を基にして求めた式は、

$$\sqrt{Z_m^{(1)}} (a_m^{(1)} + b_m^{(1)}) = \sum_n^{N_1} \sqrt{Z_n^{(2)}} (b_n^{(2)} + a_n^{(2)}) I_{mn}^{12} \Big|_{S_0} \quad (m = 1, 2, \dots, N_1) \quad (1.24)$$

$$\sum_n^{N_2} \sqrt{Y_n^{(1)}} (a_n^{(1)} - b_n^{(1)}) I_{mn}^{21} \Big|_{S_0} = \sum_n^{N_2} \sqrt{Y_n^{(2)}} (b_n^{(2)} - a_n^{(2)}) I_{mn}^{22} \Big|_{S_0} \quad (m = 1, 2, \dots, N_2) \quad (1.25)$$

また、 $\mathbf{e}_m^{(2)}$ ,  $\mathbf{h}_m^{(2)}$  の内積を基にして求めた式は、

$$\sum_n^{N_2} \sqrt{Z_n^{(1)}} (a_n^{(1)} + b_n^{(1)}) I_{mn}^{21} \Big|_{S_0} = \sqrt{Z_m^{(2)}} (b_m^{(2)} + a_m^{(2)}) \quad (m = 1, 2, \dots, N_2) \quad (1.26)$$

$$\sum_n^{N_1} \sqrt{Y_n^{(1)}} (a_n^{(1)} - b_n^{(1)}) I_{mn}^{11} \Big|_{S_0} = \sum_n^{N_1} \sqrt{Y_n^{(2)}} (b_n^{(2)} - a_n^{(2)}) I_{mn}^{12} \Big|_{S_0} \quad (m = 1, 2, \dots, N_1) \quad (1.27)$$

モード関数の内積を要素とする行列を次のように定義する ( $I_{mn}^{ij} \Big|_{s_0} = I_{nm}^{ji} \Big|_{s_0}$ )。

$$[P_{ij}] = \begin{pmatrix} I_{11}^{ij} \Big|_{s_0} & I_{12}^{ij} \Big|_{s_0} & \cdots & I_{1N_j}^{ij} \Big|_{s_0} \\ I_{21}^{ij} \Big|_{s_0} & I_{22}^{ij} \Big|_{s_0} & \cdots & I_{2N_j}^{ij} \Big|_{s_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{N_i 1}^{ij} \Big|_{s_0} & I_{N_i 2}^{ij} \Big|_{s_0} & \cdots & I_{N_i N_j}^{ij} \Big|_{s_0} \end{pmatrix} = [P_{ji}]_T \quad (i = 1, 2, j = 1, 2) \quad (1.28)$$

また、 $[\sqrt{Z_1}]$ ,  $[\sqrt{Y_1}]$  は、各々、対角要素を  $\sqrt{Z_n^{(1)}}$ ,  $\sqrt{Y_n^{(1)}}$  とする  $N_1$  次の対角行列、 $[\sqrt{Z_2}]$ ,  $[\sqrt{Y_2}]$  は、各々、対角要素を  $\sqrt{Z_n^{(2)}}$ ,  $\sqrt{Y_n^{(2)}}$  とする  $N_2$  次の対角行列を示す。

$$[\sqrt{Z_i}] = \begin{pmatrix} \sqrt{Z_1^{(i)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_2^{(i)}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{Z_{N_i}^{(i)}} \end{pmatrix} = [\sqrt{Y_i}]^{-1} \quad (i = 1, 2) \quad (1.29)$$

また、列ベクトル (column matrix)  $\mathbf{a}_i$ ,  $\mathbf{b}_i$  を,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{N_1}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_{N_1}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \\ \vdots \\ a_{N_2}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_{N_2}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

とおくと、全ての  $m(=1, 2, \dots)$  に対する式をまとめて行列表示して、

$$[\sqrt{Z_1}](\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) = [P_{12}][\sqrt{Z_2}](\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \quad (1.31)$$

$$[P_{21}][\sqrt{Y_1}](\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) = [P_{22}][\sqrt{Y_2}](\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.32)$$

また、

$$[P_{21}][\sqrt{Z_1}](\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) = [\sqrt{Z_2}](\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \quad (1.33)$$

$$[P_{11}][\sqrt{Y_1}](\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) = [P_{12}][\sqrt{Y_2}](\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.34)$$

ただし、 $I_{mn}^{12}|_{S_0} = I_{nm}^{21}|_{S_0}$ ,  $I_{mn}^{21}|_{S_0} = I_{nm}^{12}|_{S_0}$  より、

$$[P_{21}]_T = [P_{12}], \quad [P_{12}]_T = [P_{21}] \quad (1.35)$$

よって、

$$\begin{aligned} ([\sqrt{Y_1}][P_{12}][\sqrt{Z_2}])_T &= [\sqrt{Z_2}]_T ([\sqrt{Y_1}][P_{12}])_T \\ &= [\sqrt{Z_2}][P_{12}]_T [\sqrt{Y_1}]_T \\ &= [\sqrt{Z_2}][P_{21}][\sqrt{Y_1}] \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$([\sqrt{Y_2}][P_{21}][\sqrt{Z_1}])_T = [\sqrt{Z_1}][P_{12}][\sqrt{Y_2}] \quad (1.37)$$

変形して、

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 &= [\sqrt{Y_1}][P_{12}][\sqrt{Z_2}](\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \\ &= ([\sqrt{Z_2}][P_{21}][\sqrt{Y_1}])_T (\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} [\sqrt{Z_2}][P_{21}][\sqrt{Y_1}](\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) &= ([\sqrt{Y_1}][P_{12}][\sqrt{Z_2}])_T (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) \\ &= [\sqrt{Z_2}][P_{22}][\sqrt{Y_2}](\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \end{aligned} \quad (1.39)$$

また,

$$\begin{aligned} [\sqrt{Y_2}] [P_{21}] [\sqrt{Z_1}] (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) &= \left( [\sqrt{Z_1}] [P_{12}] [\sqrt{Y_2}] \right)_T (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) \\ &= \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2 \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} [\sqrt{Z_1}] [P_{11}] [\sqrt{Y_1}] (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) &= [\sqrt{Z_1}] [P_{12}] [\sqrt{Y_2}] (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \\ &= ([\sqrt{Y_2}] [P_{21}] [\sqrt{Z_1}])_T (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \end{aligned} \quad (1.41)$$

ここで,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$  として,

$$[\bar{P}_{ij}] \equiv [\sqrt{Z_i}] [P_{ij}] [\sqrt{Y_j}] \quad (1.42)$$

とおくと,

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 = [\bar{P}_{21}]_T (\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \quad (1.43)$$

$$[\bar{P}_{21}] (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) = [\bar{P}_{22}] (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.44)$$

および,

$$[\bar{P}_{12}]_T (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2 \quad (1.45)$$

$$[\bar{P}_{11}] (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) = [\bar{P}_{12}] (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.46)$$

特別な場合として, 積分範囲  $S_0$  が導波管 # $i$  ( $i = 1, 2$ ) の断面と同じであれば, モードの正規直交性より ( $[U]$  は単位行列),

$$[\bar{P}_{ii}] = [U] \quad (1.47)$$

が成り立ち, 後述するように不連続部で Self-Reacion が連続となる.

#### 1.1.4 規格化電圧, 電流

規格化電圧の列ベクトル  $\bar{\mathbf{V}}_i$ , 規格化電流の列ベクトル  $\bar{\mathbf{I}}_i$  を ( $i = 1, 2$ ),

$$\bar{\mathbf{V}}_1 \equiv \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \quad \bar{\mathbf{V}}_2 \equiv \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 \quad (1.48)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_1 \equiv \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1, \quad -\bar{\mathbf{I}}_2 \equiv \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2 \quad (1.49)$$

とおくと, モード整合法によって得られた式は次のようになる.

$$\bar{\mathbf{V}}_1 = [\bar{P}_{21}]_T \bar{\mathbf{V}}_2, \quad [\bar{P}_{21}] \bar{\mathbf{I}}_1 = [\bar{P}_{22}] \bar{\mathbf{I}}_2 \quad (1.50)$$

$$[\bar{P}_{12}]_T \bar{\mathbf{V}}_1 = \bar{\mathbf{V}}_2, \quad [\bar{P}_{11}] \bar{\mathbf{I}}_1 = [\bar{P}_{12}] \bar{\mathbf{I}}_2 \quad (1.51)$$

ここで,  $[\bar{P}_{22}] = [U]$  が成り立つ場合, 次式を解けばよい.

$$\bar{\mathbf{V}}_1 = [\bar{P}_{21}]_T \bar{\mathbf{V}}_2 \quad (1.52)$$

$$[\bar{P}_{21}] \bar{\mathbf{I}}_1 = \bar{\mathbf{I}}_2 \quad (1.53)$$

あるいは,  $[\bar{P}_{11}] = [U]$  が成り立つ場合,

$$[\bar{P}_{12}]_T \bar{\mathbf{V}}_1 = \bar{\mathbf{V}}_2 \quad (1.54)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = [\bar{P}_{12}] \bar{\mathbf{I}}_2 \quad (1.55)$$

### 1.1.5 Self-Reaction の連続性

導波管# $i$  の Self-Reaction  $R^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) を求めると,

$$\begin{aligned} R^{(i)} &= \iint_{S_i} (\mathbf{E}_t^{(i)} \times \mathbf{H}_t^{(i)}) \cdot \mathbf{a}_z dS = \iint_{S_i} \left( \sum_{n=1}^{N_i} \bar{V}_n^{(i)} \mathbf{e}_n^{(i)} \times \sum_{m=1}^{N_i} \bar{I}_m^{(i)} \mathbf{h}_m^{(i)} \right) \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= \sum_{n=1}^{N_i} \sum_{m=1}^{N_i} \bar{V}_n^{(i)} \bar{I}_m^{(i)} \iint_{S_i} (\mathbf{e}_n^{(i)} \times \mathbf{h}_m^{(i)}) \cdot \mathbf{a}_z dS = \sum_{n=1}^{N_i} \sum_{m=1}^{N_i} \bar{V}_n^{(i)} \bar{I}_m^{(i)} \delta_{nm} \\ &= \sum_{n=1}^{N_i} \bar{V}_n^{(i)} \bar{I}_n^{(i)} = (\bar{\mathbf{V}}_i)_T \bar{\mathbf{I}}_i \end{aligned} \quad (1.56)$$

ただし,  $(\bar{\mathbf{V}}_i)_T$  は  $\bar{\mathbf{V}}_i$  の転置を示す. これより,

$$R^{(1)} = (\bar{\mathbf{V}}_1)_T \bar{\mathbf{I}}_1 = ([\bar{P}_{21}]_T \bar{\mathbf{V}}_2)_T \bar{\mathbf{I}}_1 = (\bar{\mathbf{V}}_2)_T [\bar{P}_{21}] \bar{\mathbf{I}}_1 = (\bar{\mathbf{V}}_1)_T [\bar{P}_{11}]^{-1} [\bar{P}_{12}] \bar{\mathbf{I}}_2 \quad (1.57)$$

$$R^{(2)} = (\bar{\mathbf{V}}_2)_T \bar{\mathbf{I}}_2 = (\bar{\mathbf{V}}_2)_T [\bar{P}_{22}]^{-1} [\bar{P}_{21}] \bar{\mathbf{I}}_1 = ([\bar{P}_{12}]_T \bar{\mathbf{V}}_1)_T \bar{\mathbf{I}}_2 = (\bar{\mathbf{V}}_1)_T [\bar{P}_{12}] \bar{\mathbf{I}}_2 \quad (1.58)$$

よって,  $[\bar{P}_{11}] = [U]$ , あるいは  $[\bar{P}_{22}] = [U]$  のとき,  $R^{(1)} = R^{(2)}$  が成り立つ (Self-Reaction の連続性).

## 1.2 不連続部の散乱行列

散乱行列を次式で定義する.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

ここで,  $i = 1, 2, j = 1, 2$  として

$$[S_{ij}] = \begin{pmatrix} S_{ij,11} & S_{ij,12} & \cdots & S_{ij,1n} & \cdots \\ S_{ij,21} & S_{ij,22} & \cdots & S_{ij,2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ S_{ij,m1} & S_{ij,m2} & \cdots & S_{ij,mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} b_1^{(i)} \\ b_2^{(i)} \\ \vdots \\ b_m^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_1^{(i)} \\ a_2^{(i)} \\ \vdots \\ a_m^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

先に示した式

$$\mathbf{a}_1 - [\bar{P}_{21}]_T \mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 + [\bar{P}_{21}]_T \mathbf{b}_2 \quad (1.61)$$

$$[\bar{P}_{21}] \mathbf{a}_1 + [\bar{P}_{22}] \mathbf{a}_2 = [\bar{P}_{21}] \mathbf{b}_1 + [\bar{P}_{22}] \mathbf{b}_2 \quad (1.62)$$

を行列表示すると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} [U] & -[\bar{P}_{21}]_T \\ [\bar{P}_{21}] & [\bar{P}_{22}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -[U] & [\bar{P}_{21}]_T \\ [\bar{P}_{21}] & [\bar{P}_{22}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -[U] & [\bar{P}_{21}]_T \\ [\bar{P}_{21}] & [\bar{P}_{22}] \end{pmatrix} [S] \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.63)$$

よって, 散乱行列  $[S]$  は,

$$[S] = \begin{pmatrix} -[U] & [\bar{P}_{21}]_T \\ [\bar{P}_{21}] & [\bar{P}_{22}] \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} [U] & -[\bar{P}_{21}]_T \\ [\bar{P}_{21}] & [\bar{P}_{22}] \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

あるいは, 次のように変形して計算すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= [\bar{P}_{21}]_T (\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) - \mathbf{a}_1 \\ &= [\bar{P}_{21}]_T \left\{ ([S_{21}] \mathbf{a}_1 + [S_{22}] \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_2 \right\} - \mathbf{a}_1 \\ &= \left\{ [\bar{P}_{21}]_T [S_{21}] - [U] \right\} \mathbf{a}_1 + [\bar{P}_{21}]_T \left\{ [S_{22}] + [U] \right\} \mathbf{a}_2 \\ &\equiv [S_{11}] \mathbf{a}_1 + [S_{12}] \mathbf{a}_2 \end{aligned} \quad (1.65)$$

また,

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_2 &= [\bar{P}_{22}]^{-1} [\bar{P}_{21}] (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) + \mathbf{a}_2 \\
&= [\bar{P}_{22}]^{-1} [\bar{P}_{21}] \left\{ \mathbf{a}_1 - ([S_{11}] \mathbf{a}_1 + [S_{12}] \mathbf{a}_2) \right\} + \mathbf{a}_2 \\
&= [\bar{P}_{22}]^{-1} [\bar{P}_{21}] \left\{ [U] - [S_{22}] \right\} \mathbf{a}_1 + \left\{ [U] - [\bar{P}_{22}]^{-1} [\bar{P}_{21}] [S_{12}] \right\} \mathbf{a}_2 \\
&\equiv [S_{21}] \mathbf{a}_1 + [S_{22}] \mathbf{a}_2
\end{aligned} \tag{1.66}$$

さらに, 第 1 式を第 2 式に代入すると,

$$\begin{aligned}
[\bar{P}_{22}] \mathbf{b}_2 &= [\bar{P}_{21}] (\mathbf{a}_1 - \{ [\bar{P}_{21}]_T (\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) - \mathbf{a}_1 \}) + [\bar{P}_{22}] \mathbf{a}_2 \\
([\bar{P}_{22}] + [\bar{P}_{21}] [\bar{P}_{21}]_T) \mathbf{b}_2 &= 2 [\bar{P}_{21}] \mathbf{a}_1 + ([\bar{P}_{22}] - [\bar{P}_{21}] [\bar{P}_{21}]_T) \mathbf{a}_2
\end{aligned} \tag{1.67}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_2 &= ([\bar{P}_{22}] + [\bar{P}_{21}] [\bar{P}_{21}]_T)^{-1} \left\{ 2 [\bar{P}_{21}] \mathbf{a}_1 + ([\bar{P}_{22}] - [\bar{P}_{21}] [\bar{P}_{21}]_T) \mathbf{a}_2 \right\} \\
&\equiv [S_{21}] \mathbf{a}_1 + [S_{22}] \mathbf{a}_2
\end{aligned} \tag{1.68}$$

したがって,

$$[S_{21}] = 2 ([\bar{P}_{22}] + [\bar{P}_{21}] [\bar{P}_{21}]_T)^{-1} [\bar{P}_{21}] \tag{1.69}$$

これより,

$$[S_{11}] = [\bar{P}_{21}]_T [S_{21}] - [U] \tag{1.70}$$

逆に, 第 2 式を第 1 式に代入して  $\mathbf{b}_2$  を消去して整理すると次式が得られる,

$$[S_{12}] = 2 ([U] + [\bar{P}_{21}]_T [\bar{P}_{22}]^{-1} [\bar{P}_{21}])^{-1} [\bar{P}_{21}]_T \tag{1.71}$$

ただし, 散乱行列の対称性より  $[S_{12}]$  は次のように転置で求めることができる.

$$[S_{12}] = [S_{21}]_T \tag{1.72}$$

さらに,

$$[S_{22}] = [U] - [\bar{P}_{22}]^{-1} [\bar{P}_{21}] [S_{12}] \tag{1.73}$$

積分範囲  $S_0$  が導波管 #2 の断面と同じ場合,  $[\bar{P}_{22}] = [U]$  となり, 不連続部で Self-Reaction が連続となる. 同様にして, すでに求めた式

$$[\bar{P}_{12}]_T \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = -[\bar{P}_{12}]_T \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \tag{1.74}$$

$$[\bar{P}_{11}] \mathbf{a}_1 + [\bar{P}_{12}] \mathbf{a}_2 = [\bar{P}_{11}] \mathbf{b}_1 + [\bar{P}_{12}] \mathbf{b}_2 \tag{1.75}$$

を行列表示して,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} [\bar{P}_{12}]_T & -[U] \\ [\bar{P}_{11}] & [\bar{P}_{12}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -[\bar{P}_{12}]_T & [U] \\ [\bar{P}_{11}] & [\bar{P}_{12}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -[\bar{P}_{12}]_T & [U] \\ [\bar{P}_{11}] & [\bar{P}_{12}] \end{pmatrix} [S] \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.76)$$

よって, 散乱行列  $[S]$  は,

$$[S] = \begin{pmatrix} -[\bar{P}_{12}]_T & [U] \\ [\bar{P}_{11}] & [\bar{P}_{12}] \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} [\bar{P}_{12}]_T & -[U] \\ [\bar{P}_{11}] & [\bar{P}_{12}] \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

あるいは, 次のように変形して計算すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= [\bar{P}_{12}]_T (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) - \mathbf{a}_2 \\ &= [\bar{P}_{12}]_T \left\{ \mathbf{a}_1 + ([S_{11}] \mathbf{a}_1 + [S_{12}] \mathbf{a}_2) \right\} - \mathbf{a}_2 \\ &= [\bar{P}_{12}]_T \left\{ [U] + [S_{11}] \right\} \mathbf{a}_1 + \left\{ [\bar{P}_{12}]_T [S_{12}] - [U] \right\} \mathbf{a}_2 \\ &\equiv [S_{21}] \mathbf{a}_1 + [S_{22}] \mathbf{a}_2 \end{aligned} \quad (1.78)$$

また,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= -[\bar{P}_{11}]^{-1} [\bar{P}_{12}] (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_1 \\ &= -[\bar{P}_{11}]^{-1} [\bar{P}_{12}] \left\{ ([S_{21}] \mathbf{a}_1 + [S_{22}] \mathbf{a}_2) - \mathbf{a}_2 \right\} + \mathbf{a}_1 \\ &= \left\{ [U] - [\bar{P}_{11}]^{-1} [\bar{P}_{12}] [S_{21}] \right\} \mathbf{a}_1 + [\bar{P}_{11}]^{-1} [\bar{P}_{12}] \left\{ [U] - [S_{22}] \right\} \mathbf{a}_2 \\ &\equiv [S_{11}] \mathbf{a}_1 + [S_{12}] \mathbf{a}_2 \end{aligned} \quad (1.79)$$

さらに, 第 1 式を第 2 式に代入すると,

$$\begin{aligned} [\bar{P}_{11}] \mathbf{b}_1 &= [\bar{P}_{12}] (\mathbf{a}_2 - \{ [\bar{P}_{12}]_T (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) - \mathbf{a}_2 \}) + [\bar{P}_{11}] \mathbf{a}_1 \\ \left( [\bar{P}_{11}] + [\bar{P}_{12}] [\bar{P}_{12}]_T \right) \mathbf{b}_1 &= 2 [\bar{P}_{12}] \mathbf{a}_2 + \left( [\bar{P}_{11}] - [\bar{P}_{12}] [\bar{P}_{12}]_T \right) \mathbf{a}_1 \end{aligned} \quad (1.80)$$

よって,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \left( [\bar{P}_{11}] + [\bar{P}_{12}] [\bar{P}_{12}]_T \right)^{-1} \left\{ 2 [\bar{P}_{12}] \mathbf{a}_2 + \left( [\bar{P}_{11}] - [\bar{P}_{12}] [\bar{P}_{12}]_T \right) \mathbf{a}_1 \right\} \\ &\equiv [S_{12}] \mathbf{a}_2 + [S_{11}] \mathbf{a}_1 \end{aligned} \quad (1.81)$$

したがって,

$$[S_{12}] = 2 \left( [\bar{P}_{11}] + [\bar{P}_{12}] [\bar{P}_{12}]_T \right)^{-1} [\bar{P}_{12}] \quad (1.82)$$



これより,

$$\begin{bmatrix} S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{12} \end{bmatrix}_T \begin{bmatrix} S_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

逆に, 第 2 式を第 1 式に代入して  $\mathbf{b}_1$  を消去して整理すると次式が得られる,

$$\begin{bmatrix} S_{21} \end{bmatrix} = 2 \left( \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{P}_{12} \end{bmatrix}_T \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{P}_{12} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{P}_{12} \end{bmatrix}_T \quad (1.84)$$

ただし, 散乱行列の対称性より  $\begin{bmatrix} S_{21} \end{bmatrix}$  は次のように転置で求めることができる.

$$\begin{bmatrix} S_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{12} \end{bmatrix}_T \quad (1.85)$$

さらに,

$$\begin{bmatrix} S_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{P}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{21} \end{bmatrix} \quad (1.86)$$

積分範囲  $S_0$  が導波管 #1 の断面と同じ場合,  $\begin{bmatrix} \bar{P}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \end{bmatrix}$  となり, 不連続部で Self-Reaction が連続となる.

## 1.3 複素電力に係る誤差

### 1.3.1 複素電力

不連続部における導波管# $i$ の複素電力  $S^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) を求めると,

$$\begin{aligned}
 S^{(i)} &= \iint_{S_i} (\mathbf{E}_t^{(i)} \times \{\mathbf{H}_t^{(i)}\}^*) \cdot \mathbf{a}_z dS \\
 &= \iint_{S_i} \left( \sum_{n=1}^{N_i} \bar{V}_n^{(i)} \mathbf{e}_n^{(i)} \times \left\{ \sum_{m=1}^{N_i} \bar{I}_m^{(i)} \mathbf{h}_m^{(i)} \right\}^* \right) \cdot \mathbf{a}_z dS \\
 &= \sum_{n=1}^{N_i} \sum_{m=1}^{N_i} \bar{V}_n^{(i)} \{\bar{I}_m^{(i)}\}^* \iint_{S_i} (\mathbf{e}_n^{(i)} \times \mathbf{h}_m^{(i)}) \cdot \mathbf{a}_z dS = \sum_{n=1}^{N_i} \bar{V}_n^{(i)} \{\bar{I}_n^{(i)}\}^* \\
 &= (\bar{\mathbf{V}}_i)_T \bar{\mathbf{I}}_i^*
 \end{aligned} \tag{1.87}$$

ただし,  $(\bar{\mathbf{V}}_i)_T$  は  $\bar{\mathbf{V}}_i$  の転置を示す. いま, 導波路#1 ( $z \leq 0$ ) より一つの  $k$  次モードだけが不連続部に入射する場合 ( $a_k^{(1)} \neq 0$ ) を考え, それ以外の入射波を  $a_{n \neq k}^{(1)} = 0$ ,  $a_n^{(2)} = 0$  とおくと,

$$\mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_n (a_n^{(1)} \delta_{nk} + b_n^{(1)}) \sqrt{Z_n^{(1)}} \mathbf{e}_n^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \tag{1.88}$$

$$\mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_n b_n^{(2)} \sqrt{Z_n^{(2)}} \mathbf{e}_n^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \tag{1.89}$$

また,

$$\mathbf{H}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_n (a_n^{(1)} \delta_{nk} - b_n^{(1)}) \sqrt{Y_n^{(1)}} \mathbf{h}_n^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \tag{1.90}$$

$$\mathbf{H}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_n b_n^{(2)} \sqrt{Y_n^{(2)}} \mathbf{h}_n^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \tag{1.91}$$

散乱パラメータは,

$$S_{11,mk} = \left. \frac{b_m^{(1)}}{a_k^{(1)}} \right|_{a_{n \neq k}^{(1)}=0, a_n^{(2)}=0} \tag{1.92}$$

$$S_{21,mk} = \left. \frac{b_m^{(2)}}{a_k^{(1)}} \right|_{a_{n \neq k}^{(1)}=0, a_n^{(2)}=0} \tag{1.93}$$

これより、複素電力  $S^{(1)}$  は、

$$\begin{aligned}
S^{(1)} &= \iint_{S_1} \left[ \left\{ \sum_{n=1}^{N_1} a_k^{(1)} (\delta_{nk} + S_{11,nk}) \sqrt{Z_n^{(1)}} \mathbf{e}_n^{(1)} \right\} \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \sum_{m=1}^{N_1} a_k^{(1)*} (\delta_{mk} - S_{11,mk}^*) \left( \sqrt{Y_m^{(1)}} \right)^* \mathbf{h}_m^{(1)} \right\} \right] \cdot \mathbf{a}_z dS \\
&= |a_k^{(1)}|^2 \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} (\delta_{nk} + S_{11,nk}) (\delta_{mk} - S_{11,mk}^*) \sqrt{Z_n^{(1)}} \left( \sqrt{Y_m^{(1)}} \right)^* \delta_{nm} \quad (1.94)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\iint_{S_1} (\mathbf{e}_n^{(1)} \times \mathbf{h}_m^{(1)}) \cdot \mathbf{a}_z dS = \delta_{nm} \quad (1.95)$$

同様にして、複素電力  $S^{(2)}$  は、

$$\begin{aligned}
S^{(2)} &= \iint_{S_1} \left[ \left\{ \sum_{n=1}^{N_2} a_k^{(1)} S_{21,nk} \sqrt{Z_n^{(2)}} \mathbf{e}_n^{(2)} \right\} \times \left\{ \sum_{m=1}^{N_2} a_k^{(1)*} S_{21,mk}^* \left( \sqrt{Y_m^{(2)}} \right)^* \mathbf{h}_m^{(2)} \right\} \right] \cdot \mathbf{a}_z dS \\
&= |a_k^{(1)}|^2 \sum_{n=1}^{N_2} \sum_{m=1}^{N_2} S_{21,nk} S_{21,mk}^* \sqrt{Z_n^{(2)}} \left( \sqrt{Y_m^{(2)}} \right)^* \delta_{nm} \quad (1.96)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\iint_{S_2} (\mathbf{e}_n^{(2)} \times \mathbf{h}_m^{(2)}) \cdot \mathbf{a}_z dS = \delta_{nm} \quad (1.97)$$

よって、

$$S^{(1)} = |a_k^{(1)}|^2 \sum_{n=1}^{N_1} (\delta_{nk} + S_{11,nk}) (\delta_{nk} - S_{11,nk}^*) \sqrt{Z_n^{(1)}} \left( \sqrt{Y_n^{(1)}} \right)^* \quad (1.98)$$

$$S^{(2)} = |a_k^{(1)}|^2 \sum_{n=1}^{N_2} S_{21,nk} S_{21,nk}^* \sqrt{Z_n^{(2)}} \left( \sqrt{Y_n^{(2)}} \right)^* \quad (1.99)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
(\delta_{nk} + S_{11,nk}) (\delta_{nk} - S_{11,nk}^*) &= \delta_{nk} + \delta_{nk} (S_{11,nk} - S_{11,nk}^*) - |S_{11,nk}|^2 \\
&= \delta_{nk} \left( 1 + 2j \Im[S_{11,kk}] \right) - |S_{11,nk}|^2 \quad (1.100)
\end{aligned}$$

ただし、 $\Im[S_{11,kk}]$  は  $S_{11,kk}$  の虚部を示す。無損失な場合、伝搬モードでは、

$$\sqrt{Z_n^{(i)}} \left( \sqrt{Y_n^{(i)}} \right)^* = 1 \quad (1.101)$$

また、遮断モードでは、TE モードのとき、 $Z_{[n]}^{(i)} = \frac{j\omega\mu}{\gamma_{[n]}^{(i)}}$  より、

$$\sqrt{Z_{[n]}^{(i)}} \left( \sqrt{Y_{[n]}^{(i)}} \right)^* = +j \quad (1.102)$$

TM モードのとき、 $Z_{(n)}^{(i)} = \frac{\gamma_{(n)}^{(i)}}{j\omega\epsilon}$  より、

$$\sqrt{Z_{(n)}^{(i)}} \left( \sqrt{Y_{(n)}^{(i)}} \right)^* = -j \quad (1.103)$$

そこで、 $n$  次の (遮断) モードに関わる計算で生じる符号の違いを、

$$s_n^{(i)} \equiv \begin{cases} 1 & (\text{TE mode}) \\ -1 & (\text{TM mode}) \end{cases} \quad (1.104)$$

で定義すると、遮断モードについては、

$$\sqrt{Z_n^{(i)}} \left( \sqrt{Y_n^{(i)}} \right)^* = js_n^{(i)} \quad (1.105)$$

導波路#1, #2 を伝搬モード数を  $N_{p1}$ ,  $N_{p2}$  とおくと、

$$\frac{S^{(1)}}{|a_k^{(1)}|^2} = \left( 1 + j2\Im[S_{11,kk}] \right) \sqrt{Z_k^{(1)}} \left( \sqrt{Y_k^{(1)}} \right)^* - \sum_{n=1}^{N_{p1}} |S_{11,nk}|^2 - j \sum_{n=N_{p1}+1}^{N_1} s_n^{(1)} |S_{11,nk}|^2 \quad (1.106)$$

$$\frac{S^{(2)}}{|a_k^{(1)}|^2} = \sum_{n=1}^{N_{p2}} |S_{21,nk}|^2 + j \sum_{n=N_{p2}+1}^{N_2} s_n^{(2)} |S_{21,nk}|^2 \quad (1.107)$$

入射波が伝搬モードのとき、

$$\frac{S^{(1)}}{|a_k^{(1)}|^2} = 1 + j2\Im[S_{11,kk}] - \sum_{n=1}^{N_{p1}} |S_{11,nk}|^2 - j \sum_{n=N_{p1}+1}^{N_1} s_n^{(1)} |S_{11,nk}|^2 \quad (1.108)$$

また、入射波が遮断モードのとき、

$$\begin{aligned} \frac{S^{(1)}}{|a_k^{(1)}|^2} &= \left( 1 + j2\Im[S_{11,kk}] \right) js_k^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_{p1}} |S_{11,nk}|^2 - j \sum_{n=N_{p1}+1}^{N_1} s_n^{(1)} |S_{11,nk}|^2 \\ &= js_k^{(1)} - 2s_k^{(1)} 2\Im[S_{11,kk}] - \sum_{n=1}^{N_{p1}} |S_{11,nk}|^2 - j \sum_{n=N_{p1}+1}^{N_1} s_n^{(1)} |S_{11,nk}|^2 \end{aligned} \quad (1.109)$$

### 1.3.2 誤差の定義

通常，展開モード数は有限ゆえ，両者は等しくならない．そこで，両者の差異に着目して誤差を定義しよう．まず，入射波が伝搬モードのとき，

$$\begin{aligned} \frac{S^{(1)} - S^{(2)}}{|a_k^{(1)}|^2} = & 1 - \sum_{n=1}^{N_{p1}} |S_{11,nk}|^2 - \sum_{n=1}^{N_{p2}} |S_{21,nk}|^2 + j2\Im[S_{11,kk}] \\ & - j \sum_{n=N_{p1}+1}^{N_1} s_n^{(1)} |S_{11,nk}|^2 - j \sum_{n=N_{p2}+1}^{N_2} s_n^{(2)} |S_{21,nk}|^2 \end{aligned} \quad (1.110)$$

誤差の実部  $\varepsilon_{pr}$  および虚部  $\varepsilon_{pi}$  は，

$$\varepsilon_{pr} = \left| 1 - \sum_{n=1}^{N_{p1}} |S_{11,nk}|^2 - \sum_{n=1}^{N_{p2}} |S_{21,nk}|^2 \right| \quad (1.111)$$

$$\varepsilon_{pi} = \left| 2\Im[S_{11,kk}] - \sum_{n=N_{p1}+1}^{N_1} s_n^{(1)} |S_{11,nk}|^2 - \sum_{n=N_{p2}+1}^{N_2} s_n^{(2)} |S_{21,nk}|^2 \right| \quad (1.112)$$

ただし， $N_i$  は導波路# $i$  ( $i = 1, 2$ ) の展開モード数を示す．一方，入射波が遮断モードのとき，

$$\begin{aligned} \frac{S^{(1)} - S^{(2)}}{|a_k^{(1)}|^2} = & -2s_k^{(1)}\Im[S_{11,kk}] - \sum_{n=1}^{N_{p1}} |S_{11,nk}|^2 - \sum_{n=1}^{N_{p2}} |S_{21,nk}|^2 \\ & + js_k^{(1)} - j \sum_{n=N_{p1}+1}^{N_1} s_n^{(1)} |S_{11,nk}|^2 - j \sum_{n=N_{p2}+1}^{N_2} s_n^{(2)} |S_{21,nk}|^2 \end{aligned} \quad (1.113)$$

これより，誤差の実部  $\varepsilon_{cr}$  および虚部  $\varepsilon_{ci}$  は，

$$\varepsilon_{cr} = \left| -2s_k^{(1)}\Im[S_{11,kk}] - \sum_{n=1}^{N_{p1}} |S_{11,nk}|^2 - \sum_{n=1}^{N_{p2}} |S_{21,nk}|^2 \right| \quad (1.114)$$

$$\varepsilon_{ci} = \left| s_k^{(1)} - \sum_{n=N_{p1}+1}^{N_1} s_n^{(1)} |S_{11,nk}|^2 - \sum_{n=N_{p2}+1}^{N_2} s_n^{(2)} |S_{21,nk}|^2 \right| \quad (1.115)$$

誤差が十分小さくなるようにモードの展開項数を決定しなければならない．

## 1.4 Self-Reaction が連続となるステップ状不連続問題

不連続形状として、接続された 2 つの導波路のうち、一方が完全に他方より大きい場合、Self-Reaction が連続となるように計算できるので、残差がゼロになるように展開係数を決定できる。

### 1.4.1 導波路#1 が#2 より大きい場合

導波路#1 が#2 より大きいステップ状不連続部では、 $S_2 = 0$ 。そして、 $S_0$  は導波路#2 の断面に一致する場合を考える。 $S_0$  を積分範囲とする内積の計算にはモード関数の直交性を用いることができる。また、導波路#1、#2 におけるモードの展開項数を  $N_1$ 、 $N_2$  とすると、通常、 $N_1 > N_2$  にとる。電界の境界条件の式に導波路#1 のモード、磁界の境界条件の式に導波路#2 のモードを試行関数として用いれば、

$$[\bar{P}_{22}] = [U] \quad (1.116)$$

$$[\bar{P}_{11}] \neq [U] \quad (1.117)$$

より次式が得られる

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 = [\bar{P}_{21}]_T (\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \quad (1.118)$$

$$[\bar{P}_{21}] (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2 \quad (1.119)$$

これより、

$$[S_{21}] = 2 \left( [U] + [\bar{P}_{21}] [\bar{P}_{21}]_T \right)^{-1} [\bar{P}_{21}] \quad (1.120)$$

$$[S_{12}] = [S_{21}]_T \quad (1.121)$$

また、

$$[S_{11}] = [\bar{P}_{21}]_T [S_{21}] - [U] \quad (1.122)$$

$$[S_{22}] = [U] - [\bar{P}_{21}] [S_{12}] \quad (1.123)$$

### 1.4.2 導波路#2 が#1 より大きい場合

導波路#2 が#1 より大きいステップ状不連続部であれば ( $S_1 = 0$ )、通常、 $N_1 < N_2$  にとり、

$$[\bar{P}_{22}] \neq [U] \quad (1.124)$$

$$[\bar{P}_{11}] = [U] \quad (1.125)$$

より,

$$[\bar{P}_{12}]_T(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2 \quad (1.126)$$

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1 = [\bar{P}_{12}](\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.127)$$

これより,

$$[S_{12}] = 2\left([U] + [\bar{P}_{12}][\bar{P}_{12}]_T\right)^{-1}[\bar{P}_{12}] \quad (1.128)$$

$$[S_{21}] = [S_{12}]_T \quad (1.129)$$

また,

$$[S_{11}] = [U] - [\bar{P}_{12}][S_{21}] \quad (1.130)$$

$$[S_{22}] = [\bar{P}_{12}]_T[S_{12}] - [U] \quad (1.131)$$

## 1.5 モード関数の内積について (TE-TE, TM-TM)

ここでは、一つの導波管の2つのモードを考える。両モードとも TE モード、あるいは TM モードの場合、

$$I_{mn} = \iint_S \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n dS = \iint_S \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{h}_n dS = \iint_S (\nabla_t \Psi_m) \cdot (\nabla_t \Psi_n) dS \quad (1.132)$$

2次元演算子  $\nabla_t$  を用いたグリーンの第一定理、および  $\Psi_n$  の方程式 ( $\nabla_t^2 \Psi_n + k_{c,n}^2 \Psi_n = 0$ ) より、

$$\begin{aligned} I_{mn} &= - \iint_S \Psi_m \nabla_t^2 \Psi_n dS + \oint_C \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} d\sigma \\ &= k_{c,n}^2 \iint_S \Psi_m \Psi_n dS + \oint_C \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} d\sigma \end{aligned} \quad (1.133)$$

同一モードのとき ( $m = n$ ),

$$I_{nn} = k_{c,n}^2 \iint_S \Psi_n^2 dS + \oint_C \Psi_n \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} d\sigma \quad (1.134)$$

境界条件として  $C$  上で  $\Psi_n = 0$  あるいは  $\frac{\partial \Psi_n}{\partial n} = 0$  のとき、第2項はゼロゆえ、

$$I_{nn} = k_{c,n}^2 \iint_S \Psi_n^2 dS \quad (1.135)$$

$I_{nn} \neq 0$  のとき、モード関数は次のように正規化して定義される。

$$I_{nn} = \iint_S \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n dS = \iint_S \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_n dS = k_{c,n}^2 \iint_S \Psi_n^2 dS \equiv 1 \quad (1.136)$$

一方、異なるモードのとき ( $m \neq n$ )、 $\Psi_m$  と  $\Psi_n$  を交換してグリーンの第一定理を適用し同様に求めると、

$$I_{mn} = k_{c,m}^2 \iint_S \Psi_n \Psi_m dS + \oint_C \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} d\sigma \quad (1.137)$$

これより、 $I_{mn}$  を消去すると次の関係式が得られる。

$$k_{c,n}^2 \iint_S \Psi_m \Psi_n dS + \oint_C \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} d\sigma = k_{c,m}^2 \iint_S \Psi_n \Psi_m dS + \oint_C \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} d\sigma \quad (1.138)$$

変形して、

$$(k_{c,m}^2 - k_{c,n}^2) \iint_S \Psi_m \Psi_n dS = \oint_C \left( \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} - \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} \right) d\sigma \quad (1.139)$$



$k_{c,m} \neq k_{c,n}$  のとき,

$$\iint_S \Psi_m \Psi_n dS = \frac{1}{k_{c,m}^2 - k_{c,n}^2} \oint_C \left( \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} - \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} \right) d\sigma \quad (1.140)$$

したがって,  $I_{mn}$  は次のようになる ( $k_{c,m} \neq k_{c,n}$ ).

$$I_{mn} = \frac{1}{k_{c,m}^2 - k_{c,n}^2} \left( k_{c,m}^2 \oint_C \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} d\sigma - k_{c,n}^2 \oint_C \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} d\sigma \right) \quad (1.141)$$

境界条件として  $C$  上で  $\Psi_m, \Psi_n = 0$  あるいは  $\frac{\partial \Psi_m}{\partial n}, \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} = 0$  のとき, 右辺はゼロとなり,  $I_{mn} = 0$  が成立しモードの直交性を確認できる. 一方,  $k_{c,m} = k_{c,n}$  のとき,

$$\oint_C \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} d\sigma = \oint_C \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} d\sigma \quad (1.142)$$

ロピタルの定理より<sup>†</sup>,

$$\begin{aligned} \iint_S \Psi_m \Psi_n dS &= \lim_{k_{c,n} \rightarrow k_{c,m}} \frac{\frac{d}{dk_{c,n}} \oint_C \left( \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} - \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} \right) d\sigma}{\frac{d}{dk_{c,n}} (k_{c,m}^2 - k_{c,n}^2)} \\ &= -\frac{1}{2k_{c,n}} \oint_C \left( \Psi_m \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial k_{c,n} \partial n} - \frac{\partial \Psi_n}{\partial k_{c,n}} \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} \right) d\sigma \end{aligned} \quad (1.143)$$

逆に,  $k_{c,m} \rightarrow k_{c,n}$  としてロピタルの定理を用いると,

$$\iint_S \Psi_m \Psi_n dS = -\frac{1}{2k_{c,m}} \oint_C \left( \Psi_n \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial k_{c,m} \partial n} - \frac{\partial \Psi_m}{\partial k_{c,m}} \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} \right) d\sigma \quad (1.144)$$

したがって,  $I_{mn}$  は次のようになる.

$$\begin{aligned} I_{mn} &= -\frac{k_{c,m}}{2} \oint_C \left( \Psi_n \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial k_{c,m} \partial n} - \frac{\partial \Psi_m}{\partial k_{c,m}} \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} \right) d\sigma + \oint_C \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} d\sigma \\ &= -\frac{k_{c,n}}{2} \oint_C \left( \Psi_m \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial k_{c,n} \partial n} - \frac{\partial \Psi_n}{\partial k_{c,n}} \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} \right) d\sigma + \oint_C \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} d\sigma \end{aligned} \quad (1.145)$$

境界条件として,  $C$  上で  $\Psi_m, \Psi_n = 0$  が与えられていれば,

$$I_{mn} = \frac{k_{c,m}}{2} \oint_C \frac{\partial \Psi_m}{\partial k_{c,m}} \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} d\sigma = \frac{k_{c,n}}{2} \oint_C \frac{\partial \Psi_n}{\partial k_{c,n}} \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} d\sigma \quad (1.146)$$

あるいは, 境界条件として,  $C$  上で  $\frac{\partial \Psi_m}{\partial n}, \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} = 0$  が与えられていれば,

$$I_{mn} = -\frac{k_{c,m}}{2} \oint_C \Psi_n \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial k_{c,m} \partial n} d\sigma = -\frac{k_{c,n}}{2} \oint_C \Psi_m \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial k_{c,n} \partial n} d\sigma \quad (1.147)$$

これより, 特別な場合として  $m = n$  のとき, つまり同一モードでは,  $\Psi_m = \Psi_n$  において正規化係数の計算が行える.

## 1.6 モード関数の内積について (TE-TM)

### 1.6.1 ストークスの定理を用いた計算

TE モードと TM モードの場合,

$$\begin{aligned} I_{[m](n)} &= \iint_S \mathbf{e}_{[m]} \cdot \mathbf{e}_{(n)} dS = \iint_S (\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_{[m]}) \cdot (-\nabla_t \Psi_{(n)}) dS \\ &= \iint_S (\nabla_t \Psi_{(n)} \times \nabla_t \Psi_{[m]}) \cdot \mathbf{a}_z dS \end{aligned} \quad (1.148)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \nabla_t \times (\Psi_{(n)} \nabla_t \Psi_{[m]}) &= \nabla_t \Psi_{(n)} \times \nabla_t \Psi_{[m]} + \Psi_{(n)} \nabla_t \times \nabla_t \Psi_{[m]} \\ &= \nabla_t \Psi_{(n)} \times \nabla_t \Psi_{[m]} \end{aligned} \quad (1.149)$$

これを面積分して,

$$\begin{aligned} &\iint_S \left\{ \nabla \times (\Psi_{(n)} \nabla_t \Psi_{[m]}) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= \iint_S \left\{ \left( \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times (\Psi_{(n)} \nabla_t \Psi_{[m]}) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= \iint_S \left\{ \nabla_t \times (\Psi_{(n)} \nabla_t \Psi_{[m]}) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS \end{aligned} \quad (1.150)$$

ストークスの定理

$$\iint_S \left\{ \nabla \times (\Psi_{(n)} \nabla_t \Psi_{[m]}) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS = \oint_C \Psi_{(n)} \nabla_t \Psi_{[m]} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (1.151)$$

より,

$$\iint_S \left\{ \nabla_t \times (\Psi_{(n)} \nabla_t \Psi_{[m]}) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS = \oint_C \Psi_{(n)} \frac{\partial \Psi_{[m]}}{\partial \sigma} d\sigma \quad (1.152)$$

ただし, 面  $S$  は  $\mathbf{a}_z$  が法線方向となる平面 (導波管断面),  $d\boldsymbol{\sigma}$  は周回積分路のベクトル線要素,  $+\sigma$  方向は  $\mathbf{a}_z$  に対して右ねじの方向である. よって, これらの結果より次式が得られる

$$I_{[m](n)} = \iint_S (\nabla_t \Psi_{(n)} \times \nabla_t \Psi_{[m]}) \cdot \mathbf{a}_z dS = \oint_C \Psi_{(n)} \frac{\partial \Psi_{[m]}}{\partial \sigma} d\sigma \quad (1.153)$$

式 (3.143)~式 (3.146) において,  $\Psi_{[m]}$  と  $\Psi_{(n)}$  を交換して同様に求めると,

$$\begin{aligned} &\iint_S \left\{ \nabla_t \times (\Psi_{[m]} \nabla_t \Psi_{(n)}) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS = \oint_C \Psi_{[m]} \frac{\partial \Psi_{(n)}}{\partial \sigma} d\sigma \\ &\iint_S (\nabla_t \Psi_{[m]} \times \nabla_t \Psi_{(n)}) \cdot \mathbf{a}_z dS = \oint_C \Psi_{[m]} \frac{\partial \Psi_{(n)}}{\partial \sigma} d\sigma \end{aligned} \quad (1.154)$$

よって,

$$-I_{[m](n)} = \oint_C \Psi_{[m]} \frac{\partial \Psi_{(n)}}{\partial \sigma} d\sigma \quad (1.155)$$

また,

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{h}_{[m]} \cdot \mathbf{h}_{(n)} dS &= \iint_S \left( -\nabla_t \Psi_{[m]} \right) \cdot \left( -\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_{(n)} \right) \cdot dS \\ &= \iint_S \left( \nabla_t \Psi_{(n)} \times \nabla_t \Psi_{[m]} \right) \cdot \mathbf{a}_z dS \end{aligned} \quad (1.156)$$

まとめると,

$$\begin{aligned} I_{[m](n)} &= \iint_S \mathbf{e}_{[m]} \cdot \mathbf{e}_{(n)} dS = \iint_S \mathbf{h}_{[m]} \cdot \mathbf{h}_{(n)} dS \\ &= \oint_C \frac{\partial \Psi_{[m]}}{\partial \sigma} \Psi_{(n)} d\sigma = - \oint_C \Psi_{[m]} \frac{\partial \Psi_{(n)}}{\partial \sigma} d\sigma \end{aligned} \quad (1.157)$$

モードの直交性は  $I_{mn} = 0$  のときで, 境界条件によって上式はゼロとなる.

### 1.6.2 ガウスの発散定理を用いた別の導出

ベクトル公式  $\nabla \cdot (w\mathbf{A}) = w\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla w$  を変形して,

$$\mathbf{A} \cdot \nabla w = \nabla \cdot (w\mathbf{A}) - w\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1.158)$$

これより,  $w \equiv \Psi_{(n)}$ ,  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_{[m]}$  とおくと,

$$\left( \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_{[m]} \right) \cdot \nabla \Psi_{(n)} = \nabla \cdot \left( \Psi_{(n)} \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_{[m]} \right) - \Psi_{(n)} \nabla \cdot \left( \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_{[m]} \right) \quad (1.159)$$

上式右辺の第2項について, ベクトル公式

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) \quad (1.160)$$

より,  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{a}_z$ ,  $\mathbf{C} \equiv \nabla_t \Psi_{[m]}$  とおくと次式が得られる (勾配の回転はゼロ).

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_{[m]} \right) = \left( \nabla_t \Psi_{[m]} \right) \cdot \left( \nabla \times \mathbf{a}_z \right) - \mathbf{a}_z \cdot \left( \nabla \times \nabla_t \Psi_{[m]} \right) = 0 \quad (1.161)$$

よって,

$$\left( \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_{[m]} \right) \cdot \nabla_t \Psi_{(n)} = \nabla_t \cdot \left( \Psi_{(n)} \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_{[m]} \right) \quad (1.162)$$

2次元の  $\nabla_t$  に関するガウスの発散定理より,

$$\begin{aligned}
& \iint_s (\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_{[m]}) \cdot \nabla_t \Psi_{(n)} dS \\
&= \iint_s \nabla_t \cdot (\Psi_{(n)} \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_{[m]}) dS = \oint_C (\Psi_{(n)} \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_{[m]}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\
&= \oint_C \Psi_{(n)} (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_z) \cdot \nabla_t \Psi_{[m]} d\sigma = \oint_C \Psi_{(n)} (-\mathbf{a}_\sigma) \cdot \nabla_t \Psi_{[m]} d\sigma \\
&= - \oint_C \Psi_{(n)} \frac{\partial \Psi_{[m]}}{\partial \sigma} d\sigma
\end{aligned} \tag{1.163}$$

ただし,  $\mathbf{n}$  は面  $S$  上 (導波管断面) における周回積分路の外向き法線単位ベクトルを示し, 周回積分路に沿う方向の単位ベクトルを  $\mathbf{a}_\sigma \equiv \mathbf{a}_z \times \mathbf{n}$  とおいている. したがって,

$$I_{[m](n)} = - \iint_s (\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_{[m]}) \cdot \nabla_t \Psi_{(n)} dS = \oint_C \Psi_{(n)} \frac{\partial \Psi_{[m]}}{\partial \sigma} d\sigma \tag{1.164}$$

## 1.7 ガラーキン法によるモード整合法（2線路からなる導波路と単一導波路の接続）

### 1.7.1 不連続部のある導波路

均一導波路 #I ( $z \leq 0$ ) として、同軸導波管のように2線路となる場合を考え、一方は肩文字 (1), 他方を肩文字 (3) で表す. このような導波路 #I ( $z \leq 0$ ) と単一導波路 #II ( $z \geq 0$ ) が  $z = 0$  で接続された不連続問題に対して、ガラーキン法によるモード整合法を適用する. まず、位置ベクトル  $\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z + \boldsymbol{\rho}$  ( $\mathbf{a}_z$  は  $z$  方向の単位ベクトル) における横断面内電界  $\mathbf{E}_t^{(I)}$ ,  $\mathbf{E}_t^{(II)}$  は、

$$\mathbf{E}_t^{(I)}(\boldsymbol{\rho}, z) = \begin{cases} \sum_n \left( a_n^{(1)} e^{-\gamma_n^{(1)} z} + b_n^{(1)} e^{\gamma_n^{(1)} z} \right) \sqrt{Z_n^{(1)}} \mathbf{e}_n^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \\ \sum_n \left( a_n^{(3)} e^{-\gamma_n^{(3)} z} + b_n^{(3)} e^{\gamma_n^{(3)} z} \right) \sqrt{Z_n^{(3)}} \mathbf{e}_n^{(3)}(\boldsymbol{\rho}) \end{cases} \quad (1.165)$$

$$\mathbf{E}_t^{(II)}(\boldsymbol{\rho}, z) = \sum_n \left( b_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} z} + a_n^{(2)} e^{\gamma_n^{(2)} z} \right) \sqrt{Z_n^{(2)}} \mathbf{e}_n^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.166)$$

ただし、 $i = 1, 2$  のとき、 $Z_n^{(i)}$  は導波路 #I における  $n$  次モードの波動インピーダンス、 $\gamma_n^{(i)}$  は伝搬定数、 $\mathbf{e}_n^{(i)}$  は電界のモード関数を示し、 $i = 3$  のとき、 $Z_n^{(3)}$ ,  $\gamma_n^{(3)}$ ,  $\mathbf{e}_n^{(3)}$  は #I の他方の線路に関わる関数を示す. また、横断面内磁界  $\mathbf{H}_t^{(I)}$ ,  $\mathbf{H}_t^{(II)}$  は、

$$\mathbf{H}_t^{(I)}(\boldsymbol{\rho}, z) = \begin{cases} \sum_n \left( a_n^{(1)} e^{-\gamma_n^{(1)} z} - b_n^{(1)} e^{\gamma_n^{(1)} z} \right) \sqrt{Y_n^{(1)}} \mathbf{h}_n^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \\ \sum_n \left( a_n^{(3)} e^{-\gamma_n^{(3)} z} - b_n^{(3)} e^{\gamma_n^{(3)} z} \right) \sqrt{Y_n^{(3)}} \mathbf{h}_n^{(3)}(\boldsymbol{\rho}) \end{cases} \quad (1.167)$$

$$\mathbf{H}_t^{(II)}(\boldsymbol{\rho}, z) = \sum_n \left( b_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} z} - a_n^{(2)} e^{\gamma_n^{(2)} z} \right) \sqrt{Y_n^{(2)}} \mathbf{h}_n^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.168)$$

ただし、 $i = 1, 2$  のとき、 $Y_n^{(i)}$  は導波路 # $i$  における  $n$  次モードの波動アドミタンス、 $\mathbf{h}_n^{(i)}$  は磁界のモード関数を示し、 $i = 3$  のとき、 $Y_n^{(3)}$ ,  $\mathbf{h}_n^{(3)}$  は #I の他方の線路に関わる関数を示す. ここで、ベクトルモード関数  $\mathbf{e}_n^{(i)}$ ,  $\mathbf{h}_n^{(i)}$  の関係は ( $i = 1, 2, 3$ ),

$$\mathbf{e}_n^{(i)} = \mathbf{h}_n^{(i)} \times \mathbf{a}_z \quad (1.169)$$

$$\mathbf{h}_n^{(i)} = \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_n^{(i)} \quad (1.170)$$

$$\mathbf{e}_m^{(i)} \cdot \mathbf{e}_n^{(i)} = \mathbf{h}_m^{(i)} \cdot \mathbf{h}_n^{(i)} \quad (1.171)$$

このとき、モード関数の正規直交条件は、

$$\iint_S \mathbf{e}_m^{(i)} \cdot \mathbf{e}_n^{(i)} dS = \iint_S \mathbf{h}_m^{(i)} \cdot \mathbf{h}_n^{(i)} dS = \delta_{mn} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.172)$$

### 1.7.2 不連続部の境界条件

不連続部が開口面  $S_0$ 、および（完全）導体面  $S_1$ （導波路#I 側の  $z = 0^-$ ）、 $S_2$ （導波路#II 側の  $z = 0^+$ ）とからなる場合、境界条件は次のようになる。

$$\mathbf{E}_t^{(I)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) = \mathbf{E}_t^{(II)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+), \quad (\text{開口面 } S_0) \quad (1.173)$$

$$\mathbf{H}_t^{(I)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) = \mathbf{H}_t^{(II)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+), \quad (\text{開口面 } S_0) \quad (1.174)$$

また、

$$\mathbf{E}_t^{(I)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) = 0 \quad (\text{導体面 } S_1, S_3) \quad (1.175)$$

$$\mathbf{E}_t^{(II)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+) = 0 \quad (\text{導体面 } S_2) \quad (1.176)$$

ここで、

$$\mathbf{E}_t^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, 0^\mp) = \sum_n^{N_i} (a_n^{(i)} + b_n^{(i)}) \sqrt{Z_n^{(i)}} \mathbf{e}_n^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.177)$$

$$\mathbf{H}_t^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, 0^\mp) = \pm \sum_n^{N_i} (a_n^{(i)} - b_n^{(i)}) \sqrt{Y_n^{(i)}} \mathbf{h}_n^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.178)$$

ただし、上側符号は  $i = 1, 3$ 、下側符号は  $i = 2$ 。

### 1.7.3 ガラーキン法

開口面  $S_0$  ( $i = 1$  のとき  $S_{0,1}$ ,  $i = 3$  のとき  $S_{0,3}$ ) の電界の境界条件の両辺に  $\mathbf{e}_m^{(1,3)} (m = 1, 2, \dots, N_{(1,3)})$  で内積をとると、

$$\iint_{S_{0,1}} \mathbf{e}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) dS = \iint_{S_{0,1}} \mathbf{e}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+) dS \quad (1.179)$$

$$\iint_{S_{0,3}} \mathbf{e}_m^{(3)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) dS = \iint_{S_{0,3}} \mathbf{e}_m^{(3)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+) dS \quad (1.180)$$

導体面  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の電界の境界条件の両辺に  $\mathbf{e}_m^{(i)}$  で内積をとると、

$$\iint_{S_1} \mathbf{e}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) dS = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N_1) \quad (1.181)$$

$$\iint_{S_3} \mathbf{e}_m^{(3)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) dS = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N_3) \quad (1.182)$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{e}_m^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+) dS = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N_2) \quad (1.183)$$

式 (1.179) の上側と式 (1.181) より、

$$\iint_{S_{0,1}+S_1} \mathbf{e}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) dS = \iint_{S_{0,1}} \mathbf{e}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+) dS \quad (1.184)$$

これより,

$$\begin{aligned}
& \sum_n^{N_1} \sqrt{Z_n^{(1)}} (a_n^{(1)} + b_n^{(1)}) \iint_{S_{0,1}+S_1} \mathbf{e}_m^{(1)} \cdot \mathbf{e}_n^{(1)} dS \\
&= \sum_n^{N_2} \sqrt{Z_n^{(2)}} (b_n^{(2)} + a_n^{(2)}) \iint_{S_{0,1}} \mathbf{e}_m^{(1)} \cdot \mathbf{e}_n^{(2)} dS
\end{aligned} \tag{1.185}$$

同様にして, 式 (1.180) の上側と式 (1.182) より,

$$\iint_{S_{0,3}+S_{11}} \mathbf{e}_m^{(3)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) dS = \iint_{S_{0,3}} \mathbf{e}_m^{(3)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+) dS \tag{1.186}$$

これより,

$$\begin{aligned}
& \sum_n^{N_3} \sqrt{Z_n^{(3)}} (a_n^{(3)} + b_n^{(3)}) \iint_{S_{0,3}+S_3} \mathbf{e}_m^{(3)} \cdot \mathbf{e}_n^{(3)} dS \\
&= \sum_n^{N_2} \sqrt{Z_n^{(2)}} (b_n^{(2)} + a_n^{(2)}) \iint_{S_{0,3}} \mathbf{e}_m^{(3)} \cdot \mathbf{e}_n^{(2)} dS
\end{aligned} \tag{1.187}$$

また, 式 (1.179) の下側と式 (1.183) より,

$$\iint_{S_{0,1}} \mathbf{e}_m^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) dS = \iint_{S_{0,1}+S_2} \mathbf{e}_m^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+) dS \tag{1.188}$$

これについても,

$$\begin{aligned}
& \sum_n^{N_1} \sqrt{Z_n^{(1)}} (a_n^{(1)} + b_n^{(1)}) \iint_{S_{0,1}} \mathbf{e}_m^{(2)} \cdot \mathbf{e}_n^{(1)} dS \\
&= \sum_n^{N_2} \sqrt{Z_n^{(2)}} (b_n^{(2)} + a_n^{(2)}) \iint_{S_{0,1}+S_2} \mathbf{e}_m^{(2)} \cdot \mathbf{e}_n^{(2)} dS
\end{aligned} \tag{1.189}$$

同様にして, 式 (1.180) の下側と式 (1.183) より,

$$\iint_{S_{0,3}} \mathbf{e}_m^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0^-) dS = \iint_{S_{0,3}+S_2} \mathbf{e}_m^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0^+) dS \tag{1.190}$$

これより,

$$\begin{aligned}
& \sum_n^{N_3} \sqrt{Z_n^{(3)}} (a_n^{(3)} + b_n^{(3)}) \iint_{S_{0,3}} \mathbf{e}_m^{(2)} \cdot \mathbf{e}_n^{(3)} dS \\
&= \sum_n^{N_2} \sqrt{Z_n^{(2)}} (b_n^{(2)} + a_n^{(2)}) \iint_{S_{0,3}+S_2} \mathbf{e}_m^{(2)} \cdot \mathbf{e}_n^{(2)} dS
\end{aligned} \tag{1.191}$$

モード関数の正規直交性を用いると, 式 (1.185) は,

$$\begin{aligned}
& \sqrt{Z_m^{(1)}} (a_m^{(1)} + b_m^{(1)}) \\
&= \sum_n^{N_1} \sqrt{Z_n^{(2)}} (b_n^{(2)} + a_n^{(2)}) \iint_{S_{0,1}} \mathbf{e}_m^{(1)} \cdot \mathbf{e}_n^{(2)} dS \quad (m = 1, 2, \dots, N_1)
\end{aligned} \tag{1.192}$$

同様にして、式 (1.187) は、

$$\begin{aligned} & \sqrt{Z_m^{(3)}} (a_m^{(3)} + b_m^{(3)}) \\ &= \sum_n^{N_3} \sqrt{Z_n^{(2)}} (b_n^{(2)} + a_n^{(2)}) \iint_{S_{0,3}} \mathbf{e}_m^{(3)} \cdot \mathbf{e}_n^{(2)} dS \quad (m = 1, 2, \dots, N_3) \end{aligned} \quad (1.193)$$

また、式 (1.189) は、

$$\begin{aligned} & \sum_n^{N_1} \sqrt{Z_n^{(1)}} (a_n^{(1)} + b_n^{(1)}) \iint_{S_{0,1}} \mathbf{e}_m^{(2)} \cdot \mathbf{e}_n^{(1)} dS \\ &= \sqrt{Z_m^{(2)}} (b_m^{(2)} + a_m^{(2)}) \quad (m = 1, 2, \dots, N_2) \end{aligned} \quad (1.194)$$

同様にして、式 (1.191) は、

$$\begin{aligned} & \sum_n^{N_3} \sqrt{Z_n^{(3)}} (a_n^{(3)} + b_n^{(3)}) \iint_{S_{0,3}} \mathbf{e}_m^{(2)} \cdot \mathbf{e}_n^{(3)} dS \\ &= \sqrt{Z_m^{(2)}} (b_m^{(2)} + a_m^{(2)}) \quad (m = 1, 2, \dots, N_2) \end{aligned} \quad (1.195)$$

一方、開口面  $S_{0,1}$ ,  $S_{0,3}$  の磁界の境界条件の両辺に  $\mathbf{h}_m^{(1,3)}$  で内積をとると、 $m = 1, 2, \dots, N_{\binom{1,3}{2}}$  のとき、

$$\begin{aligned} & \sum_n^{\infty} \sqrt{Y_n^{(1)}} (a_n^{(1)} - b_n^{(1)}) \iint_{S_{0,1}} \mathbf{h}_m^{(1)} \cdot \mathbf{h}_n^{(1)} dS \\ &= \sum_n^{\infty} \sqrt{Y_n^{(2)}} (b_n^{(2)} - a_n^{(2)}) \iint_{S_{0,1}} \mathbf{h}_m^{(1)} \cdot \mathbf{h}_n^{(2)} dS \end{aligned} \quad (1.196)$$

$$\begin{aligned} & \sum_n^{\infty} \sqrt{Y_n^{(3)}} (a_n^{(3)} - b_n^{(3)}) \iint_{S_{0,3}} \mathbf{h}_m^{(3)} \cdot \mathbf{h}_n^{(3)} dS \\ &= \sum_n^{\infty} \sqrt{Y_n^{(2)}} (b_n^{(2)} - a_n^{(2)}) \iint_{S_{0,3}} \mathbf{h}_m^{(3)} \cdot \mathbf{h}_n^{(2)} dS \end{aligned} \quad (1.197)$$

ここで、モード関数の内積を次のようにおく、

$$\begin{aligned} I_{mn}^{ij} \Big|_S &\equiv \int_S \mathbf{e}_m^{(i)} \cdot \mathbf{e}_n^{(j)} dS = \int_S \mathbf{h}_m^{(i)} \cdot \mathbf{h}_n^{(j)} dS \\ &= \int_S \mathbf{e}_n^{(j)} \cdot \mathbf{e}_m^{(i)} dS = \int_S \mathbf{h}_n^{(j)} \cdot \mathbf{h}_m^{(i)} dS = I_{nm}^{ji} \Big|_S \end{aligned} \quad (1.198)$$

ただし、積分範囲  $S$  は、これまでの式では、開口面  $S_{0,1}$ ,  $S_{0,3}$ , 導体面  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  である。



これより、 $\mathbf{e}_m^{(1)}$ 、 $\mathbf{h}_m^{(1)}$  の内積を基にして求めた式は、

$$\sqrt{Z_m^{(1)}} (a_m^{(1)} + b_m^{(1)}) = \sum_n^{N_1} \sqrt{Z_n^{(2)}} (b_n^{(2)} + a_n^{(2)}) I_{mn}^{12} \Big|_{S_{0,1}} \quad (m = 1, 2, \dots, N_1) \quad (1.199)$$

$$\sum_n^{N_2} \sqrt{Y_n^{(1)}} (a_n^{(1)} - b_n^{(1)}) I_{mn}^{21} \Big|_{S_{0,1}} = \sum_n^{N_2} \sqrt{Y_n^{(2)}} (b_n^{(2)} - a_n^{(2)}) I_{mn}^{22} \Big|_{S_{0,1}} \quad (m = 1, 2, \dots, N_2) \quad (1.200)$$

同様にして、 $\mathbf{e}_m^{(3)}$ 、 $\mathbf{h}_m^{(3)}$  の内積を基にして求めた式は、

$$\sqrt{Z_m^{(3)}} (a_m^{(3)} + b_m^{(3)}) = \sum_n^{N_3} \sqrt{Z_n^{(2)}} (b_n^{(2)} + a_n^{(2)}) I_{mn}^{32} \Big|_{S_{0,3}} \quad (m = 1, 2, \dots, N_3) \quad (1.201)$$

$$\sum_n^{N_2} \sqrt{Y_n^{(3)}} (a_n^{(3)} - b_n^{(3)}) I_{mn}^{23} \Big|_{S_{0,3}} = \sum_n^{N_2} \sqrt{Y_n^{(2)}} (b_n^{(2)} - a_n^{(2)}) I_{mn}^{22} \Big|_{S_{0,3}} \quad (m = 1, 2, \dots, N_2) \quad (1.202)$$

また、 $\mathbf{e}_m^{(2)}$ 、 $\mathbf{h}_m^{(2)}$  の内積を基にして求めた式は、

$$\sum_n^{N_2} \sqrt{Z_n^{(1)}} (a_n^{(1)} + b_n^{(1)}) I_{mn}^{21} \Big|_{S_{0,1}} = \sqrt{Z_m^{(2)}} (b_m^{(2)} + a_m^{(2)}) \quad (m = 1, 2, \dots, N_2) \quad (1.203)$$

$$\sum_n^{N_1} \sqrt{Y_n^{(1)}} (a_n^{(1)} - b_n^{(1)}) I_{mn}^{11} \Big|_{S_{0,1}} = \sum_n^{N_1} \sqrt{Y_n^{(2)}} (b_n^{(2)} - a_n^{(2)}) I_{mn}^{12} \Big|_{S_{0,1}} \quad (m = 1, 2, \dots, N_1) \quad (1.204)$$

そして、

$$\sum_n^{N_2} \sqrt{Z_n^{(3)}} (a_n^{(3)} + b_n^{(3)}) I_{mn}^{23} \Big|_{S_{0,3}} = \sqrt{Z_m^{(2)}} (b_m^{(2)} + a_m^{(2)}) \quad (m = 1, 2, \dots, N_2) \quad (1.205)$$

$$\sum_n^{N_3} \sqrt{Y_n^{(3)}} (a_n^{(3)} - b_n^{(3)}) I_{mn}^{33} \Big|_{S_{0,3}} = \sum_n^{N_3} \sqrt{Y_n^{(2)}} (b_n^{(2)} - a_n^{(2)}) I_{mn}^{32} \Big|_{S_{0,3}} \quad (m = 1, 2, \dots, N_3) \quad (1.206)$$

モード関数の内積を要素とする行列を次のように定義する ( $I_{mn}^{ij} \Big|_{s_{0,l}} = I_{nm}^{ji} \Big|_{s_{0,l}}$ ).

$$[P_{ij,l}] = \begin{pmatrix} I_{11}^{ij} \Big|_{s_{0,l}} & I_{12}^{ij} \Big|_{s_{0,l}} & \cdots & I_{1N_j}^{ij} \Big|_{s_{0,l}} \\ I_{21}^{ij} \Big|_{s_{0,l}} & I_{22}^{ij} \Big|_{s_{0,l}} & \cdots & I_{2N_j}^{ij} \Big|_{s_{0,l}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{N_i 1}^{ij} \Big|_{s_{0,l}} & I_{N_i 2}^{ij} \Big|_{s_{0,l}} & \cdots & I_{N_i N_j}^{ij} \Big|_{s_{0,l}} \end{pmatrix} = [P_{ji,l}]_T \quad (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, l = 1, 3) \quad (1.207)$$

ただし,  $i = 1, j = 3$  やその逆の積分はない. また,  $[\sqrt{Z_i}], [\sqrt{Y_i}]$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は, 各々, 対角要素を  $\sqrt{Z_n^{(i)}}$ ,  $\sqrt{Y_n^{(i)}}$  とする  $N_i$  次の対角行列を示す.

$$[\sqrt{Z_i}] = \begin{pmatrix} \sqrt{Z_1^{(i)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_2^{(i)}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{Z_{N_i}^{(i)}} \end{pmatrix} = [\sqrt{Y_i}]^{-1} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.208)$$

また, 列ベクトル (column matrix)  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$  を,

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_1^{(i)} \\ a_2^{(i)} \\ \vdots \\ a_{N_i}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} b_1^{(i)} \\ b_2^{(i)} \\ \vdots \\ b_{N_i}^{(i)} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.209)$$

とおくと, 全ての  $m (= 1, 2, \dots)$  に対する式をまとめて行列表示して,

$$[\sqrt{Z_1}](\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) = [P_{12,1}][\sqrt{Z_2}](\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \quad (1.210)$$

$$[P_{21,1}][\sqrt{Y_1}](\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) = [P_{22,1}][\sqrt{Y_2}](\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.211)$$

そして,

$$[\sqrt{Z_3}](\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3) = [P_{32,3}][\sqrt{Z_2}](\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \quad (1.212)$$

$$[P_{23,3}][\sqrt{Y_3}](\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3) = [P_{22,3}][\sqrt{Y_2}](\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.213)$$

また,

$$[P_{21,1}][\sqrt{Z_1}](\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) = [\sqrt{Z_2}](\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \quad (1.214)$$

$$[P_{11,1}][\sqrt{Y_1}](\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) = [P_{12,1}][\sqrt{Y_2}](\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.215)$$

最後に,

$$[P_{23,3}][\sqrt{Z_3}](\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3) = [\sqrt{Z_2}](\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \quad (1.216)$$

$$[P_{11,3}][\sqrt{Y_3}](\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3) = [P_{12,3}][\sqrt{Y_2}](\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.217)$$

先に求めたように,

$$\left( [\sqrt{Y_1}][P_{12,1}][\sqrt{Z_2}] \right)_T = [\sqrt{Z_2}][P_{21,1}][\sqrt{Y_1}] \quad (1.218)$$

$$\left( [\sqrt{Y_2}][P_{21,1}][\sqrt{Z_1}] \right)_T = [\sqrt{Z_1}][P_{12,1}][\sqrt{Y_2}] \quad (1.219)$$

これより変形して,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 &= [\sqrt{Y_1}] [P_{12,1}] [\sqrt{Z_2}] (\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \\ &= \left( [\sqrt{Z_2}] [P_{21,1}] [\sqrt{Y_1}] \right)_T (\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2)\end{aligned}\quad (1.220)$$

$$\begin{aligned}[\sqrt{Z_2}] [P_{21,1}] [\sqrt{Y_1}] (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) &= \left( [\sqrt{Y_1}] [P_{12,1}] [\sqrt{Z_2}] \right)_T (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) \\ &= [\sqrt{Z_2}] [P_{21,1}] [\sqrt{Y_2}] (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2)\end{aligned}\quad (1.221)$$

また,

$$\begin{aligned}[\sqrt{Y_2}] [P_{21,1}] [\sqrt{Z_1}] (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) &= \left( [\sqrt{Z_1}] [P_{12,1}] [\sqrt{Y_2}] \right)_T (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) \\ &= \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2\end{aligned}\quad (1.222)$$

$$\begin{aligned}[\sqrt{Z_1}] [P_{11,1}] [\sqrt{Y_1}] (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) &= [\sqrt{Z_1}] [P_{12,1}] [\sqrt{Y_2}] (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \\ &= ([\sqrt{Y_2}] [P_{21,1}] [\sqrt{Z_1}])_T (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2)\end{aligned}\quad (1.223)$$

ここで,

$$[\bar{P}_{ij,l}] \equiv [\sqrt{Z_i}] [P_{ij,l}] [\sqrt{Y_j}] \quad (1.224)$$

とおくと,

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 = [\bar{P}_{21,1}]_T (\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \quad (1.225)$$

$$[\bar{P}_{21,1}] (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) = [\bar{P}_{22,1}] (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.226)$$

および,

$$[\bar{P}_{12,1}]_T (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2 \quad (1.227)$$

$$[\bar{P}_{11,1}] (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) = [\bar{P}_{12,1}] (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.228)$$

同様にして,

$$\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3 = [\bar{P}_{23,3}]_T (\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \quad (1.229)$$

$$[\bar{P}_{23,3}] (\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3) = [\bar{P}_{22,3}] (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.230)$$

および,

$$[\bar{P}_{32,3}]_T (\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2 \quad (1.231)$$

$$[\bar{P}_{33,3}] (\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3) = [\bar{P}_{32,3}] (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.232)$$

列ベクトル  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_3$  を一つの列ベクトル  $\hat{\mathbf{a}}_1$ , 列ベクトル  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_3$  を一つの列ベクトル  $\hat{\mathbf{b}}_1$  にまとめて,

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \quad (1.233)$$

より,

$$\hat{\mathbf{a}}_1 + \hat{\mathbf{b}}_1 = [\bar{P}_{2\text{I},\text{I}}]_T (\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2) \quad (1.234)$$

$$[\bar{P}_{2\text{I},\text{I}}] (\hat{\mathbf{a}}_1 - \hat{\mathbf{b}}_1) = [\bar{P}_{22,\text{I}}] (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.235)$$

ここで,

$$[\bar{P}_{2\text{I},\text{I}}] = \begin{pmatrix} [\bar{P}_{21,1}] \\ [\bar{P}_{23,3}] \end{pmatrix}, \quad [\bar{P}_{22,\text{I}}] = \begin{pmatrix} [\bar{P}_{22,1}] \\ [\bar{P}_{22,3}] \end{pmatrix} \quad (1.236)$$

および,

$$[\bar{P}_{12,\text{I}}]_T (\hat{\mathbf{a}}_1 + \hat{\mathbf{b}}_1) = \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2 \quad (1.237)$$

$$[\bar{P}_{1\text{I},\text{I}}] (\hat{\mathbf{a}}_1 - \hat{\mathbf{b}}_1) = [\bar{P}_{12,\text{I}}] (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad (1.238)$$

ここで,

$$[\bar{P}_{12,\text{I}}] = \begin{pmatrix} [\bar{P}_{12,1}] \\ [\bar{P}_{32,3}] \end{pmatrix}, \quad [\bar{P}_{1\text{I},\text{I}}] = \begin{pmatrix} [\bar{P}_{11,1}] \\ [\bar{P}_{33,3}] \end{pmatrix} \quad (1.239)$$

特別な場合として, 積分範囲  $S_{0,i}$  ( $i = 1, 3$ ) が導波管断面と同じであれば, モードの正規直交性より ( $[U]$  は単位行列),

$$[\bar{P}_{ii,i}] = [U] \quad (1.240)$$

が成り立ち, 後述するように不連続部で Self-Reacion が連続となる.

#### 1.7.4 散乱行列の変形

散乱行列  $[S]$  を次式で定義する.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] & [S_{13}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] & [S_{23}] \\ [S_{31}] & [S_{32}] & [S_{33}] \end{pmatrix} \quad (1.241)$$

いま、ポート 3-3' ( $\mathbf{a}_3$ ,  $\mathbf{b}_3$ ) にモード毎の負荷を接続し、反射係数の対角行列を  $[\Gamma_3]_d$  とすると、次式が成り立つ。

$$\mathbf{a}_3 = [\Gamma_3]_d \mathbf{b}_3 \quad (1.242)$$

これを用いて、 $a_3$  を消去すると、

$$\mathbf{b}_1 = [S_{11}] \mathbf{a}_1 + [S_{12}] \mathbf{a}_2 + [S_{13}] [\Gamma_3]_d \mathbf{b}_3 \quad (1.243)$$

$$\mathbf{b}_2 = [S_{21}] \mathbf{a}_1 + [S_{22}] \mathbf{a}_2 + [S_{23}] [\Gamma_3]_d \mathbf{b}_3 \quad (1.244)$$

$$\mathbf{b}_3 = [S_{31}] \mathbf{a}_1 + [S_{32}] \mathbf{a}_2 + [S_{33}] [\Gamma_3]_d \mathbf{b}_3 \quad (1.245)$$

上の第 3 式より、

$$\mathbf{b}_3 = \left( [U] - [\Gamma_3]_d [S_{33}] \right)^{-1} \left( [S_{31}] \mathbf{a}_1 + [S_{32}] \mathbf{a}_2 \right) \quad (1.246)$$

これを第 1 式に代入して  $\mathbf{b}_3$  を消去すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= [S_{11}] \mathbf{a}_1 + [S_{12}] \mathbf{a}_2 + [S_{13}] [\Gamma_3]_d \left( [U] - [\Gamma_3]_d [S_{33}] \right)^{-1} \left( [S_{31}] \mathbf{a}_1 + [S_{32}] \mathbf{a}_2 \right) \\ &= \left\{ [S_{11}] + [S_{13}] [\Gamma_3]_d \left( [U] - [\Gamma_3]_d [S_{33}] \right)^{-1} [S_{31}] \right\} \mathbf{a}_1 \\ &\quad + \left\{ [S_{12}] + [S_{13}] [\Gamma_3]_d \left( [U] - [\Gamma_3]_d [S_{33}] \right)^{-1} [S_{32}] \right\} \mathbf{a}_2 \\ &\equiv [R] \mathbf{a}_1 + [T'] \mathbf{a}_2 \end{aligned} \quad (1.247)$$

よって、

$$R = S_{11} + \frac{S_{13} S_{31}}{1 - \Gamma_3 S_{33}} \Gamma_3 \quad (1.248)$$

$$T' = S_{12} + \frac{S_{13} S_{32}}{1 - \Gamma_3 S_{33}} \Gamma_3 \quad (1.249)$$

同様にして、第 2 式に代入して  $b_3$  を消去すると、

$$\begin{aligned} b_2 &= S_{21} a_1 + S_{22} a_2 + S_{23} \Gamma_3 \frac{S_{31} a_1 + S_{32} a_2}{1 - \Gamma_3 S_{33}} \\ &= \left( S_{21} + \frac{S_{23} S_{31}}{1 - \Gamma_3 S_{33}} \Gamma_3 \right) a_1 + \left( S_{22} + \frac{S_{23} S_{32}}{1 - \Gamma_3 S_{33}} \Gamma_3 \right) a_2 \equiv T a_1 + R' a_2 \end{aligned} \quad (1.250)$$

よって、

$$T = S_{21} + \frac{S_{23} S_{31}}{1 - \Gamma_3 S_{33}} \Gamma_3, \quad R' = S_{22} + \frac{S_{23} S_{32}}{1 - \Gamma_3 S_{33}} \Gamma_3 \quad (1.251)$$

よって、

$$[\hat{\mathbf{S}}] = \begin{pmatrix} R & T' \\ T & R' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} + \frac{S_{13} S_{31}}{1 - \Gamma_3 S_{33}} \Gamma_3 & S_{12} + \frac{S_{13} S_{32}}{1 - \Gamma_3 S_{33}} \Gamma_3 \\ S_{21} + \frac{S_{23} S_{31}}{1 - \Gamma_3 S_{33}} \Gamma_3 & S_{22} + \frac{S_{23} S_{32}}{1 - \Gamma_3 S_{33}} \Gamma_3 \end{pmatrix} \quad (1.252)$$



# CHAPTER 2

## 方形導波管の不連続問題

方形導波管の不連続問題に焦点を当て、特にモード関数とそれらの内積の計算方法を詳述する。導波管の断面が変化する際に生じる電磁波の振る舞いを解析するため、 $TE$  モードと  $TM$  モードという異なる伝送モードの特性と、それらが不連続部でどのように相互作用するかを数学的に定式化している。具体的例として、 $H$  面ステップ状不連続、 $E$  面ステップ状不連続、さらにはダブルステップ不連続問題を取り上げ、モード整合法に必要な計算プロセスを詳細に解説し、不連続部における透過・反射特性の電磁界解析の基礎を示している。

### 2.1 方形導波管の不連続問題

#### 2.1.1 方形導波管のモード関数

方形導波管 #1 ( $a_1 \times b_1$ ) の  $TE_{mn}$  モードのスカラ関数  $\Psi_{[mn]}^{\#1}$ 、方形導波管 #2 ( $a_2 \times b_2$ ) の  $TE_{m'n'}$  モードのスカラ関数  $\Psi_{[m'n']}^{\#2}$  を、

$$\Psi_{[mn]}^{\#1} \equiv A_{[mn]}^{\#1} h_{x[m]}^{\#1}(x) h_{y[n]}^{\#1}(y) \quad (2.1)$$

$$\Psi_{[m'n']}^{\#2} \equiv A_{[m'n']}^{\#2} h_{x[m']}^{\#2}(x) h_{y[n']}^{\#2}(y) \quad (2.2)$$

$TE$  モードの境界条件より、

$$\left. \frac{dh_{x[m]}^{\#1}}{dx} \right|_{x=0, a_1} = 0, \quad \left. \frac{dh_{x[m']}^{\#2}}{dx} \right|_{x=-x_2, a_2-x_2} = 0 \quad (2.3)$$

$$\left. \frac{dh_{y[n]}^{\#1}}{dy} \right|_{y=0, b_1} = 0, \quad \left. \frac{dh_{y[n']}^{\#2}}{dy} \right|_{y=-y_2, b_2-y_2} = 0 \quad (2.4)$$

よって,

$$h_{x[m]}^{\#1}(x) = \cos(k_{xm}x), \quad h_{x[m']}^{\#2}(x) = \cos\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} \quad (2.5)$$

$$h_{y[n]}^{\#1}(y) = \cos(k_{yn}y), \quad h_{y[n']}^{\#2}(y) = \cos\{\hat{k}_{yn'}(y + y_2)\} \quad (2.6)$$

ただし (一様分布は存在しない),

$$k_{xm} = \frac{m\pi}{a_1}, \quad k_{yn} = \frac{n\pi}{b_1} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots, m = n \neq 0) \quad (2.7)$$

$$\hat{k}_{xm'} = \frac{m'\pi}{a_2}, \quad \hat{k}_{yn'} = \frac{n'\pi}{b_2} \quad (m', n' = 0, 1, 2, \dots, m' = n' \neq 0) \quad (2.8)$$

また,  $A_{[mn]}^{\#1}$ ,  $A_{[m'n']}^{\#2}$  は TE モードの正規化係数を示し,

$$A_{[mn]}^{\#1} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a_1 b_1 \epsilon_m \epsilon_n}{(m b_1)^2 + (n a_1)^2}} \quad (2.9)$$

$$A_{[m'n']}^{\#2} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a_2 b_2 \epsilon_{m'} \epsilon_{n'}}{(m' b_2)^2 + (n' a_2)^2}} \quad (2.10)$$

ただし,

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ 2 & (m = 1, 2, \dots) \end{cases}, \quad \epsilon_{m'} = \begin{cases} 1 & (m' = 0) \\ 2 & (m' = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 2 & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}, \quad \epsilon_{n'} = \begin{cases} 1 & (n' = 0) \\ 2 & (n' = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.12)$$

また, 導波管 #1 の  $\text{TM}_{mn}$  モードと導波管 #2 の  $\text{TM}_{m'n'}$  モードを,

$$\Psi_{(mn)}^{\#1} \equiv A_{(mn)}^{\#1} h_{x(m)}^{\#1}(x) h_{y(n)}^{\#1}(y) \quad (2.13)$$

$$\Psi_{(m'n')}^{\#2} \equiv A_{(m'n')}^{\#2} h_{x(m')}^{\#2}(x) h_{y(n')}^{\#2}(y) \quad (2.14)$$

TM モードの境界条件より,

$$h_{x(m)}^{\#1} \Big|_{x=0, a_1} = 0, \quad h_{x(m')}^{\#2} \Big|_{x=-x_2, a_2-x_2} = 0 \quad (2.15)$$

$$h_{y(n)}^{\#1} \Big|_{y=0, b_1} = 0, \quad h_{y(n')}^{\#2} \Big|_{y=-y_2, b_2-y_2} = 0 \quad (2.16)$$

よって,

$$h_{x(m)}^{\#1}(x) = \sin(k_{xm}x), \quad h_{x(m')}^{\#2}(x) = \sin\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} \quad (2.17)$$

$$h_{y(n)}^{\#1}(y) = \sin(k_{yn}y), \quad h_{y(n')}^{\#2}(y) = \sin\{\hat{k}_{yn'}(y + y_2)\} \quad (2.18)$$



ただし,  $k_{xm}$ ,  $k_{yn}$  の定義は先に示したものと変わらないが,  $m, m', n, n' = 1, 2, \dots$  となる, また,  $A_{(mn)}^{\#1}$ ,  $A_{(m'n')}^{\#2}$  は TM モードの正規化係数を示し,

$$A_{(mn)}^{\#1} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a_1 b_1}{(mb_1)^2 + (na_1)^2}} \quad (2.19)$$

$$A_{(m'n')}^{\#2} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a_2 b_2}{(m'b_2)^2 + (n'a_2)^2}} \quad (2.20)$$

TM モードの場合は,  $x, y$  方向ともに分布をもつ. なお,  $\text{TE}_{mn}$  モードは添字  $[mn]$ ,  $\text{TM}_{mn}$  モードは添字  $(mn)$  を用い, TE モードと TM モードの区別なく  $mn$  次のモードを表す場合, 次のように表すことにする.

$$\Psi_{mn}^{\#1} \equiv A_{mn}^{\#1} h_{xm}^{\#1}(x) h_{yn}^{\#1}(y) \quad (2.21)$$

$$\Psi_{m'n'}^{\#2} \equiv A_{m'n'}^{\#2} h_{xm'}^{\#2}(x) h_{yn'}^{\#2}(y) \quad (2.22)$$

### 2.1.2 モード関数の内積 (#1, #2)

$\Psi_{[mn]}^{\#1}$  で求められる  $\text{TE}_{mn}$  モードと  $\Psi_{[m'n']}^{\#2}$  で求められる  $\text{TE}_{m'n'}$  モードの内積, あるいは,  $\Psi_{(mn)}^{\#1}$  で求められる  $\text{TM}_{mn}$  モードと  $\Psi_{(m'n')}^{\#2}$  で求められる  $\text{TM}_{m'n'}$  モードの内積は次のようになる.

$$\begin{aligned} & \iint_{S_A} \nabla_t \Psi_{mn}^{\#1} \cdot \nabla_t \Psi_{m'n'}^{\#2} dS \\ &= \iint_{S_A} \left( \frac{\partial \Psi_{mn}^{\#1}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_{m'n'}^{\#2}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_{mn}^{\#1}}{\partial y} \frac{\partial \Psi_{m'n'}^{\#2}}{\partial y} \right) dx dy \\ &= A_{mn}^{\#1} A_{m'n'}^{\#2} \int_{l_y} \int_{l_x} \left( \frac{dh_{xm}^{\#1}}{dx} \frac{dh_{xm'}^{\#2}}{dx} h_{yn}^{\#1} h_{yn'}^{\#2} + h_{xm}^{\#1} h_{xm'}^{\#2} \frac{dh_{yn}^{\#1}}{dy} \frac{dh_{yn'}^{\#2}}{dy} \right) dx dy \\ &= A_{mn}^{\#1} A_{m'n'}^{\#2} \left[ \int_{l_x} (h_{xm}^{\#1})' (h_{xm'}^{\#2})' dx \int_{l_y} h_{yn}^{\#1} h_{yn'}^{\#2} dy + \int_{l_x} h_{xm}^{\#1} h_{xm'}^{\#2} dx \int_{l_y} (h_{yn}^{\#1})' (h_{yn'}^{\#2})' dy \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

ただし,  $S_A$  は導波管断面内の一部あるいは全部の領域,  $l_x, l_y$  は  $x, y$  の積分範囲を示す.

両者とも TE モードの場合,  $m, n = 0, 1, 2, \dots (m \neq 0 \text{ or } n \neq 0), m', n' = 0, 1, 2, \dots (m' \neq 0 \text{ or } n' \neq 0)$  について,

$$\begin{aligned} & \iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'n']}^{\#2} dS \\ &= A_{[mn]}^{\#1} A_{[m'n']}^{\#2} \left[ \int_{l_x} (h_{x[m]}^{\#1})' (h_{x[m']}^{\#2})' dx \int_{l_y} h_{y[n]}^{\#1} h_{y[n']}^{\#2} dy \right. \\ & \quad \left. + \int_{l_x} h_{x[m]}^{\#1} h_{x[m']}^{\#2} dx \int_{l_y} (h_{y[n]}^{\#1})' (h_{y[n']}^{\#2})' dy \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

また、両者とも TM モードの場合、 $m, n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $m', n' = 1, 2, 3, \dots$  について、

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS \\
&= A_{(mn)}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} \left[ \int_{l_x} (h_{x(m)}^{\#1})' (h_{x(m')}^{\#2})' dx \int_{l_y} h_{y(n)}^{\#1} h_{y(n')}^{\#2} dy \right. \\
&\quad \left. + \int_{l_x} h_{x(m)}^{\#1} h_{x(m')}^{\#2} dx \int_{l_y} (h_{y(n)}^{\#1})' (h_{y(n')}^{\#2})' dy \right] \quad (2.25)
\end{aligned}$$

一方、 $\Psi_{[mn]}^{\#1}$  で求められる TE<sub>mn</sub> モードと  $\Psi_{(m'n')}^{\#2}$  で求められる TM<sub>m'n'</sub> モードでは、

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS \\
&= \iint_{S_A} (\nabla_t \Psi_{[mn]}^{\#1} \times \mathbf{a}_z) \cdot \nabla_t \Psi_{(m'n')}^{\#2} dS \\
&= \iint_{S_A} \left( -\mathbf{a}_y \frac{\partial \Psi_{[mn]}^{\#1}}{\partial x} + \mathbf{a}_x \frac{\partial \Psi_{[mn]}^{\#1}}{\partial y} \right) \cdot \left( \mathbf{a}_x \frac{\partial \Psi_{(m'n')}^{\#2}}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial \Psi_{(m'n')}^{\#2}}{\partial y} \right) dS \\
&= \iint_{S_A} \left( \frac{\partial \Psi_{[mn]}^{\#1}}{\partial y} \frac{\partial \Psi_{(m'n')}^{\#2}}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_{[mn]}^{\#1}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_{(m'n')}^{\#2}}{\partial y} \right) dx dy \\
&= A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} \int_{l_y} \int_{l_x} \left( h_{x[m]}^{\#1} \frac{dh_{y[n]}^{\#1}}{dy} \frac{dh_{x(m')}^{\#2}}{dx} h_{y(n')}^{\#2} - \frac{dh_{x[m]}^{\#1}}{dx} h_{y[n]}^{\#1} h_{x(m')}^{\#2} \frac{dh_{y(n')}^{\#2}}{dy} \right) dx dy \\
&= A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} \left[ \int_{l_x} h_{x[m]}^{\#1} (h_{x(m')}^{\#2})' dx \int_{l_y} (h_{y[n]}^{\#1})' h_{y(n')}^{\#2} dy \right. \\
&\quad \left. - \int_{l_x} (h_{x[m]}^{\#1})' h_{x(m')}^{\#2} dx \int_{l_y} h_{y[n]}^{\#1} (h_{y(n')}^{\#2})' dy \right] \quad (2.26)
\end{aligned}$$

逆に、 $\Psi_{(mn)}^{\#1}$  で求められる TM<sub>mn</sub> モードと  $\Psi_{[m'n']}^{\#2}$  で求められる TE<sub>m'n'</sub> モードでは、

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'n']}^{\#2} dS \\
&= A_{(mn)}^{\#1} A_{[m'n']}^{\#2} \left[ \int_{l_x} (h_{x(m)}^{\#1})' h_{x[m']}^{\#2} dx \int_{l_y} h_{y(n)}^{\#1} (h_{y[n']}^{\#2})' dy \right. \\
&\quad \left. - \int_{l_x} h_{x(m)}^{\#1} (h_{x[m']}^{\#2})' dx \int_{l_y} (h_{y(n)}^{\#1})' h_{y[n']}^{\#2} dy \right] \quad (2.27)
\end{aligned}$$

これらの式中の  $x, y$  に関する微分は、導波管 #1 の TE モードについては、

$$(h_{x[m]}^{\#1}(x))' = \frac{d}{dx} \left\{ \cos(k_{xm}x) \right\} = -k_{xm} \sin(k_{xm}x) \quad (2.28)$$

$$(h_{y[n]}^{\#1}(y))' = \frac{d}{dy} \left\{ \cos(k_{yn}y) \right\} = -k_{yn} \sin(k_{yn}y) \quad (2.29)$$

また, TM モードについては,

$$(h_{x[m]}^{#1}(x))' = \frac{d}{dx} \left\{ \sin(k_{xm}x) \right\} = k_{xm} \cos(k_{xm}x) \quad (2.30)$$

$$(h_{y[n]}^{#1}(y))' = \frac{d}{dy} \left\{ \sin(k_{yn}y) \right\} = k_{yn} \cos(k_{yn}y) \quad (2.31)$$

導波管 #2 も同様にして,

$$(h_{x[m']}^{#2}(x))' = -\hat{k}_{xm'} \sin \left\{ \hat{k}_{xm'}(x + x_2) \right\} \quad (2.32)$$

$$(h_{y[n']}^{#2}(y))' = -\hat{k}_{yn'} \sin \left\{ \hat{k}_{yn'}(y + y_2) \right\} \quad (2.33)$$

$$(h_{x[m']}^{#2}(x))' = \hat{k}_{xm'} \cos \left\{ \hat{k}_{xm'}(x + x_2) \right\} \quad (2.34)$$

$$(h_{y[n']}^{#2}(y))' = \hat{k}_{yn'} \cos \left\{ \hat{k}_{yn'}(y + y_2) \right\} \quad (2.35)$$

いま,

$$\hat{X}_{mm'}^{12,s} \equiv \int_{L_x} \sin(k_{xm}x) \sin \left\{ \hat{k}_{xm'}(x + x_2) \right\} dx \quad (2.36)$$

$$\hat{Y}_{nn'}^{12,c} \equiv \int_{L_y} \cos(k_{yn}y) \cos \left\{ \hat{k}_{yn'}(y + y_2) \right\} dy \quad (2.37)$$

$$\hat{X}_{mm'}^{12,c} \equiv \int_{L_x} \cos(k_{xm}x) \cos \left\{ \hat{k}_{xm'}(x + x_2) \right\} dx \quad (2.38)$$

$$\hat{Y}_{nn'}^{12,s} \equiv \int_{L_y} \sin(k_{yn}y) \sin \left\{ \hat{k}_{yn'}(y + y_2) \right\} dy \quad (2.39)$$

とおくと, 両者とも TE モードの場合, および両者とも TM モードの場合,

$$\begin{aligned} \int_{l_x} (h_{x[m]}^{#1})' (h_{x[m']}^{#2})' dx &= \int_{l_x} k_{xm} \hat{k}_{xm'} \sin(k_{xm}x) \sin \left\{ \hat{k}_{xm'}(x + x_2) \right\} dx \\ &= k_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\int_{l_y} h_{y[n]}^{#1} h_{y[n']}^{#2} dy = \int_{l_y} \cos(k_{yn}y) \cos \left\{ \hat{k}_{yn'}(y + y_2) \right\} dy = \hat{Y}_{nn'}^{12,c} \quad (2.41)$$

$$\int_{l_x} h_{x[m]}^{#1} h_{x[m']}^{#2} dx = \int_{l_x} \cos(k_{xm}x) \cos \left\{ \hat{k}_{xm'}(x + x_2) \right\} dx = \hat{X}_{mm'}^{12,c} \quad (2.42)$$

$$\int_{l_y} (h_{y[n]}^{#1})' (h_{y[n']}^{#2})' dy = \int_{l_y} k_{yn} \hat{k}_{yn'} \sin(k_{yn}y) \sin \left\{ \hat{k}_{yn'}(y + y_2) \right\} dy = k_{yn} \hat{k}_{yn'} \hat{Y}_{nn'}^{12,s} \quad (2.43)$$

また、両者とも TM モードの場合、

$$\begin{aligned}\int_{l_x} (h_{x(m)}^{\#1})' (h_{x(m')}^{\#2})' dx &= \int_{l_x} k_{xm} \hat{k}_{xm'} \cos(k_{xm} x) \cos\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} dx \\ &= k_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,c}\end{aligned}\quad (2.44)$$

$$\int_{l_y} h_{y(n)}^{\#1} h_{y(n')}^{\#2} dy = \int_{l_y} \sin(k_{yn} y) \sin\{\hat{k}_{yn'}(y + y_2)\} dy = \hat{Y}_{nn'}^{12,s}\quad (2.45)$$

$$\int_{l_x} h_{x(m)}^{\#1} h_{x(m')}^{\#2} dx = \int_{l_x} \sin(k_{xm} x) \sin\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} dx = \hat{X}_{mm'}^{12,s}\quad (2.46)$$

$$\int_{l_y} (h_{y(n)}^{\#1})' (h_{y(n')}^{\#2})' dy = \int_{l_y} k_{yn} \hat{k}_{yn'} \cos(k_{yn} y) \cos\{\hat{k}_{yn'}(y + y_2)\} dy = k_{yn} \hat{k}_{yn'} \hat{Y}_{nn'}^{12,c}\quad (2.47)$$

TE モードと TM モードの場合、

$$\int_{l_x} h_{x[m]}^{\#1} (h_{x(m')}^{\#2})' dx = \int_{l_x} \hat{k}_{xm'} \cos(k_{xm} x) \cos\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} dx = k_{xm} \hat{X}_{mm'}^{12,c}\quad (2.48)$$

$$\int_{l_y} (h_{y[n]}^{\#1})' h_{y(n')}^{\#2} dy = \int_{l_y} -k_{yn} \sin(k_{yn} y) \sin\{\hat{k}_{yn'}(y + y_2)\} dy = -k_{yn} \hat{Y}_{nn'}^{12,s}\quad (2.49)$$

$$\int_{l_x} (h_{x[m]}^{\#1})' h_{x(m')}^{\#2} dx = \int_{l_x} -k_{xm} \sin(k_{xm} x) \sin\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} dx = -k_{xm} \hat{X}_{mm'}^{12,s}\quad (2.50)$$

$$\int_{l_y} h_{y[n]}^{\#1} (h_{y(n')}^{\#2})' dy = \int_{l_y} \hat{k}_{yn'} \cos(k_{yn} y) \cos\{\hat{k}_{yn'}(y + y_2)\} dy = \hat{k}_{yn'} \hat{Y}_{nn'}^{12,c}\quad (2.51)$$

TM モードと TE モードの場合、

$$\int_{l_x} (h_{x(m)}^{\#1})' h_{x[m']}^{\#2} dx = \int_{l_x} k_{xm} \cos(k_{xm} x) \cos\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} dx = k_{xm} \hat{X}_{mm'}^{12,c}\quad (2.52)$$

$$\int_{l_y} h_{y(n)}^{\#1} (h_{y[n']}^{\#2})' dy = \int_{l_y} -\hat{k}_{yn'} \sin(k_{yn} y) \sin\{\hat{k}_{yn'}(y + y_2)\} dy = -\hat{k}_{yn'} \hat{Y}_{nn'}^{12,s}\quad (2.53)$$

$$\int_{l_x} h_{x(m)}^{\#1} (h_{x[m']}^{\#2})' dx = \int_{l_x} -\hat{k}_{xm'} \sin(k_{xm} x) \sin\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} dx = -\hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,s}\quad (2.54)$$

$$\int_{l_y} (h_{y(n)}^{\#1})' h_{y[n']}^{\#2} dy = \int_{l_y} k_{yn} \cos(k_{yn} y) \cos\{\hat{k}_{yn'}(y + y_2)\} dy = k_{yn} \hat{Y}_{nn'}^{12,c}\quad (2.55)$$

モード関数の内積は次のようになる。

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'n']}^{\#2} dS = A_{[mn]}^{\#1} A_{[m'n']}^{\#2} \left( k_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} \hat{Y}_{nn'}^{12,c} + k_{yn} \hat{k}_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \hat{Y}_{nn'}^{12,s} \right) \quad (2.56)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS = A_{(mn)}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} \left( k_{yn} \hat{k}_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} \hat{Y}_{nn'}^{12,c} + k_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \hat{Y}_{nn'}^{12,s} \right) \quad (2.57)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS = A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} \left( k_{xm} \hat{k}_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} \hat{Y}_{nn'}^{12,c} - \hat{k}_{xm'} k_{yn} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \hat{Y}_{nn'}^{12,s} \right) \quad (2.58)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'n']}^{\#2} dS = A_{(mn)}^{\#1} A_{[m'n']}^{\#2} \left( \hat{k}_{xm'} k_{yn} \hat{X}_{mm'}^{12,s} \hat{Y}_{nn'}^{12,c} - k_{xm} \hat{k}_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \hat{Y}_{nn'}^{12,s} \right) \quad (2.59)$$

## 2.2 H面ステップ状不連続 ( $y$ 方向寸法 $b$ が一定の場合)

2つの導波路断面の  $y$  方向の内径が等しく、 $x$  方向の内径が異なる不連続部に、 $\text{TE}_{10}$  モードが入射した場合を考える (H面ステップ状不連続).  $y$  方向のモードの次数  $n = 0$  ゆえ、 $x$  方向のモードの次数は  $m = 1, 2, \dots$  である. TM モードは次数 0 のモードは存在しないため、 $y$  方向の関数の直交性より TM モードは発生しない. TE モードについても、直交性より  $y$  方向の次数が異なるモードも発生しない. したがって、 $\text{TE}_{m0}$  モード ( $m = 1, 2, \dots$ ) で展開してモード整合を行えばよい.

まず、導波管 #1 ( $a_1 \times b$ ) の  $\text{TE}_{m0}$  モードと導波管 #2 ( $a_2 \times b$ ) の  $\text{TE}_{m'0}$  モードを求めるためのスカラー関数は、

$$\Psi_{[m0]}^{\#1} \equiv A_{[m0]}^{\#1} h_{x[m]}^{\#1}(x), \quad \Psi_{[m'0]}^{\#2} \equiv A_{[m'0]}^{\#2} h_{x[m']}^{\#2}(x) \quad (2.60)$$

ここで、

$$h_{x[m]}^{\#1}(x) = \cos(k_{xm}x), \quad h_{x[m']}^{\#2}(x) = \cos\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} \quad (2.61)$$

ただし、

$$k_{xm} = \frac{m\pi}{a_1} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad \hat{k}_{xm'} = \frac{m'\pi}{a_2} \quad (m' = 1, 2, \dots) \quad (2.62)$$

モード関数の内積は、 $k_{y0} = 0$ ,  $\hat{k}_{y0} = 0$ ,  $\hat{Y}_{nn'}^{12,c} = b$  より、

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[m0]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'0]}^{\#2} dS = A_{[m0]}^{\#1} A_{[m'0]}^{\#2} b k_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} \quad (2.63)$$

ただし、 $a_1 < a_2$  で  $S_A$  が導波管 #1 の断面形状と一致する不連続のとき、導波管 #2 のモードの内積では、 $S_A$  が  $x$  方向について #2 の断面の一部となる. いま、不連続部の開口面  $S_A$  を  $0 \leq x \leq a_1$ ,  $0 \leq y \leq b$  とすると、 $k_{xm} \neq \hat{k}_{xm'}$  のとき、

$$\begin{aligned} \hat{X}_{mm'}^{12,\{c\}} &= \int_0^{a_1} \frac{\sin(k_{xm}x)}{\cos(k_{xm}x)} \cdot \frac{\sin\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\}}{\cos\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\}} dx \\ &= \left[ \mp \frac{\sin\{k_{xm}x + \hat{k}_{xm'}(x + x_2)\}}{2(k_{xm} + \hat{k}_{xm'})} + \frac{\sin\{k_{xm}x - \hat{k}_{xm'}(x + x_2)\}}{2(k_{xm} - \hat{k}_{xm'})} \right]_0^{a_1} \\ &= \mp \frac{\sin\{(k_{xm} + \hat{k}_{xm'})a_1 + \hat{k}_{xm'}x_2\} - \sin(\hat{k}_{xm'}x_2)}{2(k_{xm} + \hat{k}_{xm'})} \\ &\quad + \frac{\sin\{(k_{xm} - \hat{k}_{xm'})a_1 - \hat{k}_{xm'}x_2\} + \sin(\hat{k}_{xm'}x_2)}{2(k_{xm} - \hat{k}_{xm'})} \end{aligned} \quad (2.64)$$

また,  $k_{xm} = \hat{k}_{xm'} \neq 0$  のとき,

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{mm'}^{12, \{c\}^s} &= \int_0^{a_1} \frac{\sin}{\cos}(k_{xm}x) \cdot \frac{\sin}{\cos}\{k_{xm}(x+x_2)\} dx \\
&= \left[ \mp \frac{\sin[k_{xm}(2x+x_2)]}{4k_{xm}} + \frac{x \cos\{k_{xm}(-x_2)\}}{2} \right]_0^{a_1} \\
&= \mp \frac{\sin\{k_{xm}(2a_1+x_2)\} - \sin(k_{xm}x_2)}{4k_{xm}} + \frac{a_1 \cos(k_{xm}x_2)}{2}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

ここで解析している構造の不連続を縦続接続する場合, 基本  $\text{TE}_{10}$  モードのみを入力側から入射させたとしても, 最初の不連続部によって高次  $\text{TE}_{m0}$  モードが発生し, これらは次の隣接する不連続部への入射波となるとともに, 隣接する不連続部で生じた反射波が再び最初の不連続部の出力側に入射するため, このような縦続接続を行う場合には,  $\text{TE}_{m0}$  モード入射を考えて最初からモード整合法で解析する必要がある. ただし,  $\text{TE}$  モードの  $n=0$  の次数のモードから  $\text{TM}$  モードは直交性があるため発生しない.

## 2.3 E面ステップ状不連続 ( $y$ 方向寸法 $b$ が一定の場合)

不連続部の形状は同じで、TE<sub>01</sub> モードが入射した場合を考える (E 面ステップ状不連続).  $y$  方向の導波管形状は均一ゆえ、関数の直交性によって次数  $n = 1$  のみである. 一方,  $x$  方向はステップ状不連続ゆえ、TE <sub>$m$ 1</sub> モード ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) と TM <sub>$m$ 1</sub> モード ( $m = 1, 2, \dots$ ) で展開してモード整合を行えばよい.

まず、導波管 #1 ( $a_1 \times b$ ) の TE <sub>$m$ 1</sub> モードと導波管 #2 ( $a_2 \times b$ ) の TE <sub>$m'$ 1</sub> モードを求めるためのスカラ関数は、

$$\Psi_{[m]1}^{\#1} \equiv A_{[m]1}^{\#1} h_{x[m]}^{\#1}(x) h_{y[1]}(y), \quad \Psi_{[m']1}^{\#2} \equiv A_{[m']1}^{\#2} h_{x[m']}^{\#2}(x) h_{y[1]}(y) \quad (2.66)$$

ここで、

$$h_{x[m]}^{\#1}(x) = \cos(k_{xm}x), \quad h_{x[m']}^{\#2}(x) = \cos\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} \quad (2.67)$$

$$h_{y[1]}(y) = \cos(k_{y1}y) \quad (2.68)$$

ただし、

$$k_{xm} = \frac{m\pi}{a_1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad \hat{k}_{xm'} = \frac{m'\pi}{a_2} \quad (m' = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.69)$$

$$k_{y1} = \frac{\pi}{b} \quad (2.70)$$

また、導波管 #1 の TM <sub>$m$ 1</sub> モードと導波管 #2 の TM <sub>$m'$ 1</sub> モードを、

$$\Psi_{(mn)}^{\#1} \equiv A_{(mn)}^{\#1} h_{x(m)}^{\#1}(x) h_{y(1)}(y), \quad \Psi_{(m'n')}^{\#2} \equiv A_{(m'n')}^{\#2} h_{x(m')}^{\#2}(x) h_{y(1)}(y) \quad (2.71)$$

ここで、

$$h_{x(m)}^{\#1}(x) = \sin(k_{xm}x), \quad h_{x(m')}^{\#2}(x) = \sin\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} \quad (2.72)$$

$$h_{y(1)}(y) = \sin(k_{y1}y) \quad (2.73)$$

ただし、

$$k_{xm} = \frac{m\pi}{a_1} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad \hat{k}_{xm'} = \frac{m'\pi}{a_2} \quad (m' = 1, 2, \dots) \quad (2.74)$$

$$k_{y1} = \frac{\pi}{b} \quad (2.75)$$

この場合も導波管 #1 と #2 のモードの内積に関わる積分は、 $y$  方向は直交性があるので、次数  $n = 1$  以外は考える必要がない.  $y$  方向の導波管幅は一定ゆえ、 $k_{yn} \neq \hat{k}_{yn'}$  のとき、

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{nn'}^{12, \{s\}} &= \int_0^b \frac{\sin(k_{yn}y)}{\cos(k_{yn}y)} \cdot \frac{\sin(k_{yn'}y)}{\cos(k_{yn'}y)} dy \\ &= \left[ \mp \frac{\sin\{(k_{yn} + k_{yn'})y\}}{2(k_{yn} + k_{yn'})} + \frac{\sin\{(k_{yn} - k_{yn'})y\}}{2(k_{yn} - k_{yn'})} \right]_0^b = 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$



また,  $k_{yn} = \hat{k}_{yn'} \neq 0$  のとき,

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{nn'}^{12,\{s\}} &= \int_0^b \frac{\sin^2}{\cos^2}(k_{yn}y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \{1 \mp \cos 2(k_{yn}y)\} dy = \left[ \mp \frac{\sin 2(k_{yn}y)}{4k_{yn}} + \frac{y}{2} \right]_0^b = \frac{b}{2}\end{aligned}\quad (2.77)$$

モード関数の内積は,  $n = n' = 1$  で考えればよく,

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[m1]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'1]}^{\#2} dS = A_{[m1]}^{\#1} A_{[m'1]}^{\#2} \frac{b}{2} \left( k_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} + k_{y1}^2 \hat{X}_{mm'}^{12,c} \right) \quad (2.78)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[m1]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'1)}^{\#2} dS = A_{[m1]}^{\#1} A_{(m'1)}^{\#2} \frac{b}{2} k_{y1} \left( k_{xm} \hat{X}_{mm'}^{12,s} - \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \right) \quad (2.79)$$

同じ構造の不連続を縦続接続する場合, 発生したモードは次の隣接する不連続部への入射波となるとともに, 隣接する不連続部で発生したモードの反射波は最初の不連続の出力側の入射波となるので, 両方の不連続部のモード整合法では, 次のようなモード関数の内積も計算する必要がある.

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(m1)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'1)}^{\#2} dS = A_{(m1)}^{\#1} A_{(m'1)}^{\#2} \frac{b}{2} \left( k_{y1}^2 \hat{X}_{mm'}^{12,s} + k_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \right) \quad (2.80)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(m1)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'1]}^{\#2} dS = A_{(m1)}^{\#1} A_{[m'1]}^{\#2} \frac{b}{2} k_{y1} \left( \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} - k_{xm} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \right) \quad (2.81)$$

したがって, このような縦続接続を行う場合には,  $\text{TE}_{m1}$  モード入射, および  $\text{TM}_{m1}$  モード入射を考える必要がある. 式 (2.79) に示した TE モードと TM モードの内積に関しては,  $k_{xm} \neq \hat{k}_{xm'}$  のとき,

$$\begin{aligned}& k_{xm} \hat{X}_{mm'}^{12,s} - \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \\ &= k_{xm} \left\{ -\frac{C_1 - C_0}{2(k_{xm} + \hat{k}_{xm'})} + \frac{C_2 + C_0}{2(k_{xm} - \hat{k}_{xm'})} \right\} \\ &\quad - \hat{k}_{xm'} \left\{ \frac{C_1 - C_0}{2(k_{xm} + \hat{k}_{xm'})} + \frac{C_2 + C_0}{2(k_{xm} - \hat{k}_{xm'})} \right\} \\ &= -\frac{C_1 - C_0}{2} + \frac{C_2 + C_0}{2} \\ &= \frac{-C_1 + C_2}{2} + C_0 = \frac{1}{2} (-\sin A + \sin B) + C_0 \\ &= -\cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \sin \left( \frac{A-B}{2} \right) + C_0 \\ &= -\cos(k_{xm} a_1) \sin \{ \hat{k}_{xm'} (a_1 + x_2) \} + C_0 \\ &= -(-1)^m \sin \{ \hat{k}_{xm'} (a_1 + x_2) \} + \sin(\hat{k}_{xm'} x_2)\end{aligned}\quad (2.82)$$

あるいは、式 (2.79) は、次のように計算することもできる。

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS \\
&= A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} \left[ \int_{l_x} h_{x[m]}^{\#1} (h_{x(m')}^{\#2})' dx \cdot \left( -k_{yn} \hat{Y}_{nn'}^{\sin} \right) \right. \\
&\quad \left. - \int_{l_x} (h_{x[m]}^{\#1})' h_{x(m')}^{\#2} dx \cdot \left( k_{yn} \hat{Y}_{nn'}^{\cos} \right) \right] \tag{2.83}
\end{aligned}$$

$n \neq 0$  のとき ( $n' \neq 0$  は TM モードゆえ),

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS \\
&= -A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} k_{yn} \frac{b}{2} \delta_{nn'} \int_{l_x} \left( h_{x[m]}^{\#1} (h_{x(m')}^{\#2})' + (h_{x[m]}^{\#1})' h_{x(m')}^{\#2} \right) dx \\
&= -A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} k_{yn} \frac{b}{2} \delta_{nn'} \left[ h_{x[m]}^{\#1} h_{x(m')}^{\#2} \right]_0^{a_1} \\
&= -A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} k_{yn} \frac{b}{2} \delta_{nn'} \left[ \cos(k_{xm} x) \sin \left\{ \hat{k}_{xm'} (x + x_2) \right\} \right]_0^{a_1} \\
&= -A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} k_{yn} \frac{b}{2} \delta_{nn'} \left( (-1)^m \sin \left\{ \hat{k}_{xm'} (a_1 + x_2) \right\} - \sin \left( \hat{k}_{xm'} x_2 \right) \right) \tag{2.84}
\end{aligned}$$

## 2.4 E面ステップ状不連続 ( $x$ 方向寸法 $a$ が一定の場合)

逆に,  $x$  方向の導波管形状は均一とし,  $y$  方向にステップ状不連続がある場合の E 面ステップ状不連続問題を説明する. この場合, 入射波は  $\text{TE}_{10}$  モードを考える.  $x$  方向の形状は均一ゆえ, 関数の直交性によって次数  $m = 1$  のみである. 一方,  $y$  方向はステップ状不連続ゆえ,  $\text{TE}_{1n}$  モード ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) と  $\text{TM}_{1n}$  モード ( $n = 1, 2, \dots$ ) で展開してモード整合を行えばよい.

まず, 導波管 #1 ( $a \times b_1$ ) の  $\text{TE}_{1n}$  モードと導波管 #2 ( $a \times b_2$ ) の  $\text{TE}_{1n'}$  モードを求めるためのスカラ関数は,

$$\Psi_{[1n]}^{\#1} \equiv A_{[1n]}^{\#1} h_{x[1]}(x) h_{y[n]}^{\#1}(y), \quad \Psi_{[1n']}^{\#2} \equiv A_{[1n']}^{\#2} h_{x[1]}(x) h_{y[n']}^{\#2}(y) \quad (2.85)$$

ここで,

$$h_{x[1]}(x) = \cos(k_{x1}x) \quad (2.86)$$

$$h_{y[n]}^{\#1}(y) = \cos(k_{yn}y), \quad h_{y[n']}^{\#2}(y) = \cos\{\hat{k}_{yn'}(y + y_2)\} \quad (2.87)$$

ただし,

$$k_{x1} = \frac{\pi}{a} \quad (2.88)$$

$$k_{yn} = \frac{n\pi}{b_1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \hat{k}_{yn'} = \frac{n'\pi}{b_2} \quad (n' = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.89)$$

また, 導波管 #1 の  $\text{TM}_{1n}$  モードと導波管 #2 の  $\text{TM}_{1n'}$  モードを,

$$\Psi_{(1n)}^{\#1} \equiv A_{(1n)}^{\#1} h_{x(1)}(x) h_{y(n)}^{\#1}(y), \quad \Psi_{(1n')}^{\#2} \equiv A_{(1n')}^{\#2} h_{x(1)}(x) h_{y(n')}^{\#2}(y) \quad (2.90)$$

ここで,

$$h_{x(1)}(x) = \sin(k_{x1}x) \quad (2.91)$$

$$h_{y(n)}^{\#1}(y) = \sin(k_{yn}y), \quad h_{y(n')}^{\#2}(y) = \sin\{\hat{k}_{yn'}(y + y_2)\} \quad (2.92)$$

ただし,

$$k_{x1} = \frac{\pi}{a} \quad (2.93)$$

$$k_{yn} = \frac{n\pi}{b_1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \hat{k}_{yn'} = \frac{n'\pi}{b_2} \quad (n' = 1, 2, \dots) \quad (2.94)$$

この場合も導波管 #1 と #2 のモードの内積に関わる積分は,  $x$  方向は直交性があるので, 次数  $m = 1$  以外は考える必要がない.  $x$  方向の導波管幅は一定ゆえ,  $k_{xm} \neq \hat{k}_{xm'}$  の

とき,  $\hat{X}_{mm'}^{12,\{c\}} = 0$ . また,  $k_{xm} = \hat{k}_{xm'} \neq 0$  のとき,  $\hat{X}_{mm'}^{12,\{c\}} = a/2$ . モード関数の内積は,  $m = m' = 1$  で考えればよく,

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[1n]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[1n']}^{\#2} dS = A_{[1n]}^{\#1} A_{[1n']}^{\#2} \frac{a}{2} \left( k_{x1}^2 \hat{Y}_{nn'}^{12,c} + k_{yn} \hat{k}_{yn'} \hat{Y}_{nn'}^{12,s} \right) \quad (2.95)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[1n]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(1n')}^{\#2} dS = A_{[1n]}^{\#1} A_{(1n')}^{\#2} \frac{a}{2} k_{x1} \left( \hat{k}_{yn'} \hat{Y}_{nn'}^{12,c} - k_{yn} \hat{Y}_{nn'}^{12,s} \right) \quad (2.96)$$

同様にして, 同じ構造の不連続を縦続接続する場合, 次のようなモード関数の内積も計算する必要がある.

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(1n)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(1n')}^{\#2} dS = A_{(1n)}^{\#1} A_{(1n')}^{\#2} \frac{a}{2} \left( k_{yn} \hat{k}_{yn'} \hat{Y}_{nn'}^{12,c} + k_{x1}^2 \hat{Y}_{nn'}^{12,s} \right) \quad (2.97)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(1n)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[1n']}^{\#2} dS = A_{(1n)}^{\#1} A_{[1n']}^{\#2} \frac{a}{2} k_{x1} \left( k_{yn} \hat{Y}_{nn'}^{12,c} - \hat{k}_{yn'} \hat{Y}_{nn'}^{12,s} \right) \quad (2.98)$$

したがって, このような縦続接続を行う場合には,  $\text{TE}_{1n}$  モード入射, および  $\text{TM}_{1n}$  モード入射を考える必要がある. あるいは,

$$\begin{aligned} & \iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS \\ &= A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} \left[ \left( k_{xm} \hat{X}_{mm'}^{\cos} \right) \cdot \int_{l_y} (h_{y[n]}^{\#1})' h_{y(n')}^{\#2} dy \right. \\ & \quad \left. - \left( -k_{xm} \hat{X}_{mm'}^{\sin} \right) \cdot \int_{l_y} h_{y[n]}^{\#1} (h_{y(n')}^{\#2})' dy \right] \end{aligned} \quad (2.99)$$

$m \neq 0$  のとき (TM モードゆえ  $m' \neq 0$ ),

$$\begin{aligned} & \iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS \\ &= A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} k_{xm} \frac{a}{2} \delta_{mm'} \int_{l_y} \left( h_{y[n]}^{\#1} (h_{y(n')}^{\#2})' + (h_{y[n]}^{\#1})' h_{y(n')}^{\#2} \right) dy \\ &= A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} k_{xm} \frac{a}{2} \delta_{mm'} \left[ h_{y[n]}^{\#1} h_{y(n')}^{\#2} \right]_0^{b_1} \\ &= A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} k_{xm} \frac{a}{2} \delta_{mm'} \left[ \cos(k_{yn} y) \sin \left\{ \hat{k}_{yn'} (y + y_2) \right\} \right]_0^{b_1} \\ &= A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} k_{xm} \frac{a}{2} \delta_{mm'} \left( (-1)^m \sin \left\{ \hat{k}_{yn'} (b_1 + y_2) \right\} - \sin \left( \hat{k}_{yn'} y_2 \right) \right) \end{aligned} \quad (2.100)$$

## 2.4.1 E 面ステップと H 面ステップの縦続接続

初段に E 面ステップ ( $a$  一定) があれば ( $\text{TE}_{10}$  モード入射),  $\text{TE}_{1n}$  モード,  $\text{TM}_{1n}$  モードを考え, 2 段目に H 面ステップ ( $b$  一定) があって, これらのモードが入射するとともに, 2 段目の不連続部による反射波が初段に入射する. したがって, 初段の解析は  $\text{TE}_{1n}$  モード

入射, および  $TM_{1n}$  モード入射を考える必要がある. もちろん, 2 段目の解析も同様に  
して,  $TE_{1n}$  モード入射, および  $TM_{1n}$  モード入射を考えると, モード変換によって  $TE_{mn}$   
モード, および  $TM_{mn}$  モードが生じる. その結果, このような縦続接続に対しては, 初段,  
2 段目ともに, モード整合法では全ての TE モード, TM モードが必要である.

逆に, 初段が H 面ステップ ( $b$  一定), 2 段目が E 面ステップ ( $a$  一定) の場合でも, 同  
様に考えていけば, 全ての TE モード, TM モードが必要となる. これを, 初段が E 面ス  
テップ ( $b$  一定), 2 段目が H 面ステップ ( $a$  一定), あるいは, 初段が H 面ステップ ( $a$  一  
定), 2 段目が E 面ステップ ( $b$  一定) としても同様であり, 全ての TE モード, TM モード  
が必要となる.

## 2.5 シングルステップ不連続 ( $b$ 一定)

2つの導波路断面の  $y$  方向の内径が等しく,  $x$  方向の内径が異なる不連続問題を考える. まず, 導波管 #1 ( $a_1 \times b$ ) の  $\text{TE}_{mn}$  モードと導波管 #2 ( $a_2 \times b$ ) の  $\text{TE}_{m'n'}$  モードを,

$$\Psi_{[mn]}^{\#1} \equiv A_{[mn]}^{\#1} h_{x[m]}^{\#1}(x) h_{y[n]}(y), \quad \Psi_{[m'n']}^{\#2} \equiv A_{[m'n']}^{\#2} h_{x[m']}^{\#2}(x) h_{y[n']}(y) \quad (2.101)$$

ここで,

$$h_{x[m]}^{\#1}(x) = \cos(k_{xm}x), \quad h_{x[m']}^{\#2}(x) = \cos\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} \quad (2.102)$$

$$h_{y[n]}(y) = \cos(k_{yn}y), \quad h_{y[n']}(y) = \cos(k_{yn'}y) \quad (2.103)$$

ただし,

$$k_{xm} = \frac{m\pi}{a_1}, \quad k_{yn} = \frac{n\pi}{b} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots, m = n \neq 0) \quad (2.104)$$

$$\hat{k}_{xm'} = \frac{m'\pi}{a_2}, \quad k_{yn'} = \frac{n'\pi}{b} \quad (m', n' = 0, 1, 2, \dots, m' = n' \neq 0) \quad (2.105)$$

また, 導波管 #1 の  $\text{TM}_{mn}$  モードと導波管 #2 の  $\text{TM}_{m'n'}$  モードを,

$$\Psi_{(mn)}^{\#1} \equiv A_{(mn)}^{\#1} h_{x(m)}^{\#1}(x) h_{y(n)}(y), \quad \Psi_{(m'n')}^{\#2} \equiv A_{(m'n')}^{\#2} h_{x(m')}^{\#2}(x) h_{y(n')}(y) \quad (2.106)$$

ここで,

$$h_{x(m)}^{\#1}(x) = \sin(k_{xm}x), \quad h_{x(m')}^{\#2}(x) = \sin\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} \quad (2.107)$$

$$h_{y(n)}(y) = \sin(k_{yn}y), \quad h_{y(n')}(y) = \sin(k_{yn'}y) \quad (2.108)$$

ただし,

$$k_{xm} = \frac{m\pi}{a_1}, \quad k_{yn} = \frac{n\pi}{b} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (2.109)$$

$$\hat{k}_{xm'} = \frac{m'\pi}{a_2}, \quad k_{yn'} = \frac{n'\pi}{b} \quad (m', n' = 1, 2, \dots) \quad (2.110)$$

導波管 #1 と #2 のモードの内積に関わる積分は,  $y$  方向は直交性がある.  $S_A$  は導波管 #1 の断面形状と一致し, 導波管 #2 のモードの内積では,  $S_A$  が  $x$  方向について #2 の断面の一部となる.

モード関数の内積は, まず,

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS = A_{(mn)}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} \delta_{nn'} \frac{b}{2} \left( k_{yn} k_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} + k_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \right) \quad (2.111)$$

TE<sub>m0</sub> モードを除外すれば (TE<sub>mn</sub> モードにおいて  $n \neq 0$ ),

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'n']}^{\#2} dS = A_{[mn]}^{\#1} A_{[m'n']}^{\#2} \delta_{nn'} \frac{b}{2} \left( k_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} + k_{yn} k_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \right) \quad (2.112)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS = A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} \delta_{nn'} \frac{b}{2} \left( k_{xm} k_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} - \hat{k}_{xm'} k_{yn} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \right) \quad (2.113)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'n']}^{\#2} dS = A_{(mn)}^{\#1} A_{[m'n']}^{\#2} \delta_{nn'} \frac{b}{2} \left( \hat{k}_{xm'} k_{yn} \hat{X}_{mm'}^{12,s} - k_{xm} k_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \right) \quad (2.114)$$

TE<sub>m0</sub> モード ( $m \neq 0$ ) (TE<sub>mn</sub> モードにおいて  $n = 0$ ) に対しては,

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[m0]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'0]}^{\#2} dS = A_{[m0]}^{\#1} A_{[m'0]}^{\#2} b k_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} \quad (2.115)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[m0]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'0)}^{\#2} dS = 0 \quad (2.116)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'0]}^{\#2} dS = 0 \quad (2.117)$$

積分範囲  $S_A$  は, 導波管 #1 の断面  $0 \leq x \leq a_1$ ,  $0 \leq y \leq b$  と一致しているので, 導波管 #1 のモードの正規直交性より ( $n = n'$ ),

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'n]}^{\#1} dS = \delta_{mm'} \quad (2.118)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n)}^{\#1} dS = \delta_{mm'} \quad (2.119)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n)}^{\#1} dS = 0 \quad (2.120)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'n]}^{\#1} dS = 0 \quad (2.121)$$

導波管 #2 のモードの内積については, 積分範囲  $S_A$  が導波管 #2 の断面の一部となり,

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#2} \cdot \mathbf{e}_{[m'n]}^{\#2} dS = A_{[mn]}^{\#2} A_{[m'n]}^{\#2} \frac{b}{2} \left( \hat{k}_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{22,s} + k_{yn}^2 \hat{X}_{mm'}^{22,c} \right) \quad (2.122)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#2} \cdot \mathbf{e}_{(m'n)}^{\#2} dS = A_{(mn)}^{\#2} A_{(m'n)}^{\#2} \frac{b}{2} \left( k_{yn}^2 \hat{X}_{mm'}^{22,s} + \hat{k}_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{22,c} \right) \quad (2.123)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#2} \cdot \mathbf{e}_{(m'n)}^{\#2} dS = A_{[mn]}^{\#2} A_{(m'n)}^{\#2} \frac{b}{2} k_{yn} \left( \hat{k}_{xm} \hat{X}_{mm'}^{22,s} - \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{22,c} \right) \quad (2.124)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#2} \cdot \mathbf{e}_{[m'n]}^{\#2} dS = A_{(mn)}^{\#2} A_{[m'n]}^{\#2} \frac{b}{2} k_{yn} \left( \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{22,s} - \hat{k}_{xm} \hat{X}_{mm'}^{22,c} \right) \quad (2.125)$$

## 2.6 ダブルステップ不連続

積分範囲が導波路 #1 の断面と一致している場合、導波管 #1 ( $a_1 \times b_1$ ) の管壁  $C$  の境界条件を適用して積分できる。そこで、導波管 #1 の  $\text{TE}_{mn}$  モードと導波管 #2 ( $a_2 \times b_2$ ) の  $\text{TE}_{m'n'}$  モードを、

$$\Psi_{[mn]}^{\#1} \equiv A_{[mn]}^{\#1} h_{x[m]}^{\#1}(x) h_{y[n]}^{\#1}(y), \quad \Psi_{[m'n']}^{\#2} \equiv A_{[m'n']}^{\#2} h_{x[m']}^{\#2}(x) h_{y[n']}^{\#2}(y) \quad (2.126)$$

ここで、

$$h_{x[m]}^{\#1}(x) = \cos(k_{xm}x), \quad h_{x[m']}^{\#2}(x) = \cos\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\} \quad (2.127)$$

$$h_{y[n]}^{\#1}(y) = \cos(k_{yn}y), \quad h_{y[n']}^{\#2}(y) = \cos\{\hat{k}_{yn'}(y + y_2)\} \quad (2.128)$$

ただし、

$$k_{xm} = \frac{m\pi}{a_1}, \quad k_{yn} = \frac{n\pi}{b_1} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots, m = n \neq 0) \quad (2.129)$$

$$\hat{k}_{xm'} = \frac{m'\pi}{a_2}, \quad \hat{k}_{yn'} = \frac{n'\pi}{b_2} \quad (m', n' = 0, 1, 2, \dots, m' = n' \neq 0) \quad (2.130)$$

また、導波管 #1 の  $\text{TM}_{mn}$  モードと導波管 #2 の  $\text{TM}_{m'n'}$  モードを、

$$\Psi_{(mn)}^{\#1} \equiv A_{(mn)}^{\#1} h_{x(m)}^{\#1}(x) h_{y(n)}^{\#1}(y), \quad \Psi_{(m'n')}^{\#2} \equiv A_{(m'n')}^{\#2} h_{x(m')}^{\#2}(x) h_{y(n')}^{\#2}(y) \quad (2.131)$$

ここで、

$$h_{x(m)}^{\#1}(x) = \sin(k_{xm}x), \quad h_{x(m')}^{\#2}(x) = \sin\{\hat{k}_{xm'}(x + x_2)\}, \quad (2.132)$$

$$h_{y(n)}^{\#1}(y) = \sin(k_{yn}y), \quad h_{y(n')}^{\#2}(y) = \sin\{\hat{k}_{yn'}(y + y_2)\} \quad (2.133)$$

ただし、

$$k_{xm} = \frac{m\pi}{a_1}, \quad k_{yn} = \frac{n\pi}{b_1} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (2.134)$$

$$\hat{k}_{xm'} = \frac{m'\pi}{a_2}, \quad \hat{k}_{yn'} = \frac{n'\pi}{b_2} \quad (m', n' = 1, 2, \dots) \quad (2.135)$$



導波管 #2 のモードの内積については、積分範囲  $S_A$  が導波管 #2 の断面の一部となり、

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#2} \cdot \mathbf{e}_{[m'n']}^{\#2} dS = A_{[mn]}^{\#2} A_{[m'n']}^{\#2} \left( \hat{k}_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{22,s} \hat{Y}_{nn'}^{22,c} + \hat{k}_{yn} \hat{k}_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{22,c} \hat{Y}_{nn'}^{22,s} \right) \\ (m, n = 0, 1, 2, \dots (m \neq 0 \text{ or } n \neq 0), \quad m', n' = 0, 1, 2, \dots (m' \neq 0 \text{ or } n' \neq 0)) \quad (2.136)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#2} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS = A_{(mn)}^{\#2} A_{(m'n')}^{\#2} \left( \hat{k}_{yn} \hat{k}_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{22,s} \hat{Y}_{nn'}^{22,c} + \hat{k}_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{22,c} \hat{Y}_{nn'}^{22,s} \right) \\ (m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad m', n' = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.137)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#2} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS = A_{[mn]}^{\#2} A_{(m'n')}^{\#2} \left( \hat{k}_{xm} \hat{k}_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{22,s} \hat{Y}_{nn'}^{22,c} - \hat{k}_{xm'} \hat{k}_{yn} \hat{X}_{mm'}^{22,c} \hat{Y}_{nn'}^{22,s} \right) \\ (m, n = 0, 1, 2, \dots (m \neq 0 \text{ or } n \neq 0), \quad m', n' = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.138)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#2} \cdot \mathbf{e}_{[m'n']}^{\#2} dS = A_{(mn)}^{\#2} A_{[m'n']}^{\#2} \left( \hat{k}_{xm'} \hat{k}_{yn} \hat{X}_{mm'}^{22,s} \hat{Y}_{nn'}^{22,c} - \hat{k}_{xm} \hat{k}_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{22,c} \hat{Y}_{nn'}^{22,s} \right) \\ (m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad m', n' = 0, 1, 2, \dots (m' \neq 0 \text{ or } n' \neq 0)) \quad (2.139)$$

積分範囲  $S_A$  は、導波管 #1 の断面  $0 \leq x \leq a_1$ ,  $0 \leq y \leq b_1$  と一致しているので、導波管 #1 のモードの正規直交性より、

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'n']}^{\#1} dS = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (2.140)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#1} dS = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (2.141)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#1} dS = 0 \quad (2.142)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'n']}^{\#1} dS = 0 \quad (2.143)$$

また、導波管 #1 と #2 のモードの内積については、

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'n']}^{\#2} dS = A_{[mn]}^{\#1} A_{[m'n']}^{\#2} \left( k_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} \hat{Y}_{nn'}^{12,c} + k_{yn} \hat{k}_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \hat{Y}_{nn'}^{12,s} \right) \quad (2.144)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS = A_{(mn)}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} \left( k_{yn} \hat{k}_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} \hat{Y}_{nn'}^{12,c} + k_{xm} \hat{k}_{xm'} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \hat{Y}_{nn'}^{12,s} \right) \quad (2.145)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{[mn]}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{(m'n')}^{\#2} dS = A_{[mn]}^{\#1} A_{(m'n')}^{\#2} \left( k_{xm} \hat{k}_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{12,s} \hat{Y}_{nn'}^{12,c} - \hat{k}_{xm'} k_{yn} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \hat{Y}_{nn'}^{12,s} \right) \quad (2.146)$$

$$\iint_{S_A} \mathbf{e}_{(mn)}^{\#1} \cdot \mathbf{e}_{[m'n']}^{\#2} dS = A_{(mn)}^{\#1} A_{[m'n']}^{\#2} \left( \hat{k}_{xm'} k_{yn} \hat{X}_{mm'}^{12,s} \hat{Y}_{nn'}^{12,c} - k_{xm} \hat{k}_{yn'} \hat{X}_{mm'}^{12,c} \hat{Y}_{nn'}^{12,s} \right) \quad (2.147)$$



# CHAPTER 3

## 一般的な伝送方程式

テーパ導波管などの断面形状が軸方向に変化する導波路に対する解析として、モード展開した一般的な伝送方程式を取り上げ説明する。まず、マクスウェルの方程式を横断面内成分と管軸方向成分に電磁界を分解し、それぞれの成分をモード電圧とモード電流で展開する。また、管壁が完全導体である場合の境界条件を考慮に入れ、これらの要素を基に多重モード伝送方程式を導出する。さらに、伝送方程式の各係数について、 $TE$  モードと  $TM$  モード間の相互作用や、 $TE$ - $TE$  および  $TM$ - $TM$  モード間の関係性を面積分や周回積分を用いて詳細に計算し、円形テーパ導波管に特化した係数も具体的に提示している。そして、モード電圧、モード電流と散乱パラメータの関係について、基本行列から散乱行列への変換式を導き出し、その応用を示している。

### 3.1 モード関数による展開

---

#### 3.1.1 Maxwell の方程式

電界  $\mathbf{E}$ 、磁界  $\mathbf{H}$  は次の Maxwell の方程式を満足する。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (3.2)$$

テーパ導波管の管軸方向を  $z$  軸とし、 $z$  軸方向に沿う電磁界  $\mathbf{E}_z$ 、 $\mathbf{H}_z$  とそれに直交する横断面内成分  $\mathbf{E}_t$ 、 $\mathbf{H}_t$  で次のように表す。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_z \quad (3.3)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + \mathbf{H}_z \quad (3.4)$$

また,

$$\nabla = \nabla_t + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.5)$$

を用いると, Maxwell の方程式は次のようになる.

$$\left( \nabla_t + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_z) = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (3.6)$$

$$\left( \nabla_t + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{H}_t + \mathbf{H}_z) = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (3.7)$$

これより,

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t + \nabla_t \times \mathbf{E}_z + \mathbf{a}_z \times \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (3.8)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_t + \nabla_t \times \mathbf{H}_z + \mathbf{a}_z \times \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (3.9)$$

ただし,  $\mathbf{a}_z$  は  $z$  軸方向の単位ベクトル,  $\nabla_t$  は 2 次元微分演算子を示す.

### 3.1.2 モード関数による展開

横断面内成分  $\mathbf{E}_t$ ,  $\mathbf{H}_t$  は, 導波管のモード関数  $\mathbf{e}_n$ ,  $\mathbf{h}_n$  を用いて次のように展開する.

$$\mathbf{E}_t = \sum_n V_n^{\text{TE}} \mathbf{e}_n^{\text{TE}} + \sum_n V_n^{\text{TM}} \mathbf{e}_n^{\text{TM}} = \sum_n V_n \mathbf{e}_n \quad (3.10)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_n I_n^{\text{TE}} \mathbf{h}_n^{\text{TE}} + \sum_n I_n^{\text{TM}} \mathbf{h}_n^{\text{TM}} = \sum_n I_n \mathbf{h}_n \quad (3.11)$$

ただし,  $V_n$  はモード電圧,  $I_n$  はモード電流, 肩文字で TE モード, TM モードを区別している. ここで,

$$\mathbf{e}_n = \begin{cases} \mathbf{e}_n^{\text{TE}} = \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_n^{\text{TE}} & (\text{TE mode}) \\ \mathbf{e}_n^{\text{TM}} = -\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} & (\text{TM mode}) \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{h}_n = \begin{cases} \mathbf{h}_n^{\text{TE}} = -\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}} & (\text{TE mode}) \\ \mathbf{h}_n^{\text{TM}} = -\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} & (\text{TM mode}) \end{cases} \quad (3.13)$$

ただし,  $\Psi_n^{\text{TE}}$  およ  $\Psi_n^{\text{TM}}$  は変数分離した  $z$  に依らないスカラー関数を示し, 次の 2 次元スカラーヘルムホルツ方程式を満たす.

$$\nabla_t^2 \Psi_n^{\text{TE}} + (k_{c,n}^{\text{TE}})^2 \Psi_n^{\text{TE}} = 0 \quad (3.14)$$

$$\nabla_t^2 \Psi_n^{\text{TM}} + (k_{c,n}^{\text{TM}})^2 \Psi_n^{\text{TM}} = 0 \quad (3.15)$$

ただし、 $k_{c,n}^{\text{TE}}$ ,  $k_{c,n}^{\text{TM}}$  は TE, TM モードの遮断波数、両者をまとめて  $k_{c,n}$  で示している。また、 $z$  軸方向に沿う電磁界の成分  $E_z$ ,  $H_z$  は、次のように展開される。

$$E_z = \sum_n C_n^{\text{TM}} \Psi_n^{\text{TM}} \quad (3.16)$$

$$H_z = \sum_n C_n^{\text{TE}} \Psi_n^{\text{TE}} \quad (3.17)$$

ただし、 $C_n^{\text{TM}}$ ,  $C_n^{\text{TE}}$  は  $z$  の関数である。

### 3.1.3 境界条件

管壁が完全導体の場合、管壁に沿う電界成分がゼロでなければならない。モード関数は横断面が一様な場合の境界条件を満足するものである。横断面内ではすでにこの境界条件を満足しているが、それ以外の方向では、モード展開によって境界条件を満足させる必要がある。

いま、管軸に直交する断面内における断面周縁の閉曲線の法線ベクトルを  $\mathbf{n}$ 、管軸と母線のなす角を  $\vartheta$  とおくと、この母線方向に沿う電界成分  $E_g$  は、次式で表される。

$$E_g = E_z \cos \vartheta + (\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{n}) \sin \vartheta \quad (3.18)$$

境界条件より  $E_g = 0$  (on  $C$ ) ゆえ、管壁  $C$  上の電界の  $z$  成分を  $E_{z,c}$  とおくと、

$$E_{z,c} = -(\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{n}) \tan \vartheta \quad (3.19)$$

これらの式を基にして、等方等質で管軸が直線の場合の多重モード伝送方程式を求めてみよう。

### 3.1.4 モード展開した Maxwell の方程式

式 (3.8), 式 (3.9) にモード展開した  $\mathbf{E}_t$ ,  $\mathbf{H}_t$  を代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \left( \sum_n V_n \mathbf{e}_n \right) + \nabla_t \times \mathbf{E}_z + \mathbf{a}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_n V_n \mathbf{e}_n \right) \\ = -j\omega\mu \left\{ \left( \sum_n I_n \mathbf{h}_n \right) + \mathbf{H}_z \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \left( \sum_n I_n \mathbf{h}_n \right) + \nabla_t \times \mathbf{H}_z + \mathbf{a}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_n I_n \mathbf{h}_n \right) \\ = j\omega\epsilon \left\{ \left( \sum_n V_n \mathbf{e}_n \right) + \mathbf{E}_z \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

ただし、管壁が管軸に沿って変化する場合を考えているので、モード関数を  $z$  の関数とみなし、 $z$  に関する微分も計算していく。まず、式 (3.20) の第3項を整理すると、次のように

なる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_n V_n \mathbf{e}_n \right) &= \sum_n \left\{ \mathbf{a}_z \times \frac{\partial}{\partial z} (V_n \mathbf{e}_n) \right\} \\
&= \sum_n \left\{ \mathbf{a}_z \times \left( \frac{dV_n}{dz} \mathbf{e}_n + V_n \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \right) \right\} \\
&= \sum_n \left( \frac{dV_n}{dz} \mathbf{h}_n + V_n \mathbf{a}_z \times \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

同様にして、式 (3.21) の第 3 項は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_n I_n \mathbf{h}_n \right) &= \sum_n \left\{ \mathbf{a}_z \times \frac{\partial}{\partial z} (I_n \mathbf{h}_n) \right\} \\
&= \sum_n \left\{ \mathbf{a}_z \times \left( \frac{dI_n}{dz} \mathbf{h}_n + I_n \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \right) \right\} \\
&= \sum_n \left\{ \frac{dI_n}{dz} (-\mathbf{e}_n) + I_n \mathbf{a}_z \times \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \right\}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

全体としても微分演算を項別に行うと、式 (3.20) および式 (3.21) は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\sum_n V_n (\nabla_t \times \mathbf{e}_n) + \nabla_t \times \mathbf{E}_z + \sum_n \frac{dV_n}{dz} \mathbf{h}_n + \sum_n V_n \mathbf{a}_z \times \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \\
&= -j\omega\mu \sum_n I_n \mathbf{h}_n - j\omega\mu \mathbf{H}_z
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_n I_n (\nabla_t \times \mathbf{h}_n) + \nabla_t \times \mathbf{H}_z + \sum_n \frac{dI_n}{dz} (-\mathbf{e}_n) + \sum_n I_n \mathbf{a}_z \times \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \\
&= j\omega\epsilon \sum_n V_n \mathbf{e}_n + j\omega\epsilon \mathbf{E}_z
\end{aligned} \tag{3.25}$$

この後、式 (3.26) については、この式の両辺に  $\mathbf{h}_l^{\text{TM}}$ ,  $\mathbf{h}_l^{\text{TE}}$  あるいは  $\Psi_l^{\text{TE}} \mathbf{a}_z$  を、また、式 (3.27) については、この式の両辺に  $\mathbf{e}_l^{\text{TM}}$ ,  $\mathbf{e}_l^{\text{TE}}$  あるいは  $\Psi_l^{\text{TM}} \mathbf{a}_z$  を用いてスカラー積をとり、各々面積分し、モード関数の直交性を用いて計算していく。いま、媒質は等方性（向きに依らない）、等質（場所に依らない）を考えているので、 $\epsilon$ ,  $\mu$  は単なる定数となり、 $V_n$  が積分に依らない  $z$  のみの関数となることを考えて計算していけば、テーパ導波管に対する一般的な伝送方程式が得られる<sup>\*1</sup>

\*1 一般的な伝送方程式の主要な参考文献は次のとおり。

- S. A. Schelkunoff, "Generalized telegraphist's equation for waveguides," Bell Syst. Tech. J., vol.31, no.4, pp.784-801, July 1952.
- 飯口 真一, "導波管に対する一般的な伝送方程式," 信学誌, vol.44, no.6, pp.944-963, May 1961.
- 飯口 真一, 石原 藤夫, "直線テーパ導波管の基本モードと高次モード," 研実報, vol.16, no.4, pp.669-689, Apr. 1967.
- 石原 藤夫, 須賀 隆, 飯口 真一, "テーパ導波管が多段に接続された回路の解析法" 信学論 (C-I), vol.J74-C-I, pp.14-20, Jan. 1991.

## 3.2 伝送方程式の導出

先に求めたモード展開した Maxwell の方程式を再記して,

$$\begin{aligned} \sum_n V_n (\nabla_t \times \mathbf{e}_n) + \nabla_t \times \mathbf{E}_z + \sum_n \frac{dV_n}{dz} \mathbf{h}_n + \sum_n V_n \mathbf{a}_z \times \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \\ = -j\omega\mu \sum_n I_n \mathbf{h}_n - j\omega\mu \mathbf{H}_z \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \sum_n I_n (\nabla_t \times \mathbf{h}_n) + \nabla_t \times \mathbf{H}_z + \sum_n \frac{dI_n}{dz} (-\mathbf{e}_n) + \sum_n I_n \mathbf{a}_z \times \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \\ = j\omega\epsilon \sum_n V_n \mathbf{e}_n + j\omega\epsilon \mathbf{E}_z \end{aligned} \quad (3.27)$$

■  $\iint (\text{式(3.26)}) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} dS$  の計算

式 (3.26) の両辺に  $\mathbf{h}_l^{\text{TM}}$  のスカラ積をとり, 導波管断面にわたって積分すると,  $\mathbf{H}_z \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} = 0$  より,

$$\begin{aligned} \sum_n V_n \iint (\nabla_t \times \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} dS + \iint (\nabla_t \times \mathbf{E}_z) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} dS \\ + \sum_n \frac{dV_n}{dz} \iint \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} dS + \sum_n V_n \iint \left( \mathbf{a}_z \times \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} dS \\ = -j\omega\mu \sum_n I_n \iint \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} dS \end{aligned} \quad (3.28)$$

式 (3.28) の第 1 項の被積分関数  $(\nabla_t \times \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}}$  を計算するにあたって, 若干の準備をしておく. TM モードのとき,  $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n^{\text{TM}}$  とおき, ベクトル公式

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0 \quad (3.29)$$

より, 2次元演算子  $\nabla_t$  においても成り立ち, 次のようになる.

$$\nabla_t \times \mathbf{e}_n^{\text{TM}} = \nabla_t \times (-\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) = 0 \quad (3.30)$$

また, TE モードのとき,  $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n^{\text{TE}}$  とおき, ベクトル公式

$$\nabla \times (\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}) = \mathbf{a}_z (\nabla \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a}_z \cdot \nabla) \mathbf{a} \quad (3.31)$$

より,

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \mathbf{e}_n^{\text{TE}} &= \nabla_t \times (\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_n^{\text{TE}}) \\ &= \mathbf{a}_z (\nabla_t \cdot \nabla_t \Psi_n^{\text{TE}}) - (\mathbf{a}_z \cdot \nabla_t) \nabla_t \Psi_n^{\text{TE}} \\ &= \mathbf{a}_z \nabla_t^2 \Psi_n^{\text{TE}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

これより,

$$(\nabla_t \times \mathbf{e}_n^{\text{TE}}) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} = (\nabla_t^2 \Psi_n^{\text{TE}} \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} = 0 \quad (3.33)$$

まとめると, 式 (3.28) の第 1 項の被積分関数は, 次のように TE, TM モードともにゼロになる.

$$(\nabla_t \times \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} = 0 \quad (3.34)$$

次に, 式 (3.28) の第 2 項は, ベクトル公式

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \quad (3.35)$$

より,

$$\begin{aligned} & \iint \mathbf{h}_l^{\text{TM}} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_z) dS \\ &= \iint \{ \nabla_t \cdot (\mathbf{E}_z \times \mathbf{h}_l^{\text{TM}}) + \mathbf{E}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{h}_l^{\text{TM}}) \} dS \end{aligned} \quad (3.36)$$

上式の右辺の第 1 項に, ガウスの発散定理を用いて 2 次元演算子について求めた結果

$$\iint_S \nabla_t \cdot \mathbf{v}_t dS = \oint_{\sigma} \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (3.37)$$

を適用すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \iint \nabla_t \cdot (\mathbf{E}_z \times \mathbf{h}_l^{\text{TM}}) dS &= \oint_{\sigma} (\mathbf{E}_z \times \mathbf{h}_l^{\text{TM}}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \oint_{\sigma} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_z) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} d\sigma \\ &= \oint_{\sigma} E_z (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} d\sigma \end{aligned} \quad (3.38)$$

先に示した管壁上の境界条件を考慮した  $E_{z,c}$

$$E_{z,c} = -(\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{n}) \tan \vartheta \quad (3.39)$$

を用いて  $E_z = E_{z,c}$  とし, また, 断面周縁に沿う単位ベクトルを  $\boldsymbol{\sigma} \equiv \mathbf{a}_z \times \mathbf{n}$  とおくと, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \oint_{\sigma} E_z (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} d\sigma &= \oint_{\sigma} -(\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{n}) \tan \vartheta (-\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} d\sigma \\ &= \oint_{\sigma} \tan \vartheta \sum_n V_n (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{n}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}}) d\sigma \end{aligned} \quad (3.40)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_l^{\text{TM}}) \\ &= \mathbf{e}_l^{\text{TM}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{a}_z) \\ &= \mathbf{e}_l^{\text{TM}} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.41)$$



より,

$$\begin{aligned}
& \oint_{\sigma} \tan \vartheta \sum_n V_n (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{n}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}}) d\sigma \\
&= \sum_n V_n \oint_{\sigma} \tan \vartheta (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{e}_l^{\text{TM}} \cdot \mathbf{n}) d\sigma
\end{aligned} \tag{3.42}$$

管壁上の境界条件より,  $\mathbf{e}_n \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$  ゆえ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} &= [(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{e}_n \cdot \boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}] \cdot [(\mathbf{e}_l^{\text{TM}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{e}_l^{\text{TM}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}] \\
&= (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e}_l^{\text{TM}} \cdot \mathbf{n})
\end{aligned} \tag{3.43}$$

よって,

$$\sum_n V_n \oint_{\sigma} \tan \vartheta (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{e}_l^{\text{TM}} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \sum_n V_n \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} d\sigma \tag{3.44}$$

次に, 式 (3.36) の第 2 項であるが, まず準備として,

$$\begin{aligned}
\nabla_t \times \mathbf{h}_l^{\text{TM}} &= \nabla_t \times (-\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_l^{\text{TM}}) \\
&= -\mathbf{a}_z (\nabla_t \cdot \nabla_t \Psi_l^{\text{TM}}) + (\mathbf{a}_z \cdot \nabla_t) \nabla_t \Psi_l^{\text{TM}} \\
&= -\mathbf{a}_z \nabla_t^2 \Psi_l^{\text{TM}} \\
&= \mathbf{a}_z (k_{c,l}^{\text{TM}})^2 \Psi_l^{\text{TM}}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

これより,

$$\begin{aligned}
\iint \mathbf{E}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{h}_l^{\text{TM}}) dS &= \iint \left( \sum_n C_n \Psi_n \right) (k_{c,l}^{\text{TM}})^2 \Psi_l^{\text{TM}} dS \\
&= \sum_n C_n \cdot (k_{c,l}^{\text{TM}})^2 \iint \Psi_n \Psi_l^{\text{TM}} dS
\end{aligned} \tag{3.46}$$

したがって, 式 (3.28) の第 2 項は, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
& \iint \mathbf{h}_l^{\text{TM}} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_z) dS \\
&= \sum_n V_n \int_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} d\sigma + \sum_n C_n \cdot (k_{c,l}^{\text{TM}})^2 \iint \Psi_n \Psi_l^{\text{TM}} dS
\end{aligned} \tag{3.47}$$

また, 式 (3.28) の第 4 項の被積分関数は,

$$\begin{aligned}
\left( \mathbf{a}_z \times \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} &= (\mathbf{h}_l^{\text{TM}} \times \mathbf{a}_z) \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \\
&= \mathbf{e}_l^{\text{TM}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

以上の結果より、式 (3.28) は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \sum_n V_n \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} d\sigma + \sum_n C_n \left( (k_{c,l}^{\text{TM}})^2 \iint \Psi_n \Psi_l^{\text{TM}} dS \right) \\
& + \sum_n \frac{dV_n}{dz} \left( \iint \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} dS \right) + \sum_n V_n \iint \mathbf{e}_l^{\text{TM}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} dS \\
& = -j\omega\mu \sum_n I_n \left( \iint \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} dS \right)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

モードの正規直交条件を用いれば、

$$\begin{aligned}
& \sum_n V_n \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} d\sigma + C_l^{\text{TM}} + \frac{dV_l^{\text{TM}}}{dz} \\
& + \sum_n V_n \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} dS = -j\omega\mu I_l^{\text{TM}}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

■  $\iint (\text{式(3.26)}) \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TE}} dS$  の計算

式 (3.26) の両辺に  $\mathbf{h}_l^{\text{TE}}$  のスカラ積をとり、面積分を求めればよいが、式 (3.49) の第 2 項にあたる項については結果が異なるので注意が必要である。これは、式 (3.45) にあたる計算が、次のようにベクトル公式よりゼロになるからである。

$$\begin{aligned}
\nabla_t \times \mathbf{h}_l^{\text{TE}} &= \nabla_t \times (-\nabla_t \Psi_l^{\text{TE}}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.51}$$

このことを考慮して次式が得られる（導出省略）。

$$\begin{aligned}
& \sum_n V_n \int_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} d\sigma + \sum_n \frac{dV_n}{dz} \left( \iint \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TE}} dS \right) \\
& + \sum_n V_n \iint \mathbf{e}_l^{\text{TE}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} dS = -j\omega\mu \sum_n I_n \left( \iint \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TE}} dS \right)
\end{aligned} \tag{3.52}$$

モードの正規直交条件を用いれば、次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \sum_n V_n \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} d\sigma + \frac{dV_l^{\text{TE}}}{dz} + \sum_n V_n \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} dS \\
& = -j\omega\mu I_l^{\text{TE}}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

■  $\iint (\text{式(3.26)}) \cdot \Psi_l^{\text{TE}} \mathbf{a}_z dS$  の計算

式 (3.26) の両辺に  $\Psi_l^{\text{TE}} \mathbf{a}_z$  のスカラー積をとり、面積分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_n V_n \iint (\nabla_t \times \mathbf{e}_n) \cdot (\Psi_l^{\text{TE}} \mathbf{a}_z) dS + \iint \{\nabla_t \times (E_z \mathbf{a}_z)\} \cdot (\Psi_l^{\text{TE}} \mathbf{a}_z) dS \\ & + \sum_n \frac{dV_n}{dz} \iint \mathbf{h}_n \cdot (\Psi_l^{\text{TE}} \mathbf{a}_z) dS + \sum_n V_n \iint \left( \mathbf{a}_z \times \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \right) \cdot (\Psi_l^{\text{TE}} \mathbf{a}_z) dS \\ & = -j\omega\mu \iint (H_z \mathbf{a}_z) \cdot (\Psi_l^{\text{TE}} \mathbf{a}_z) dS \end{aligned}$$

見通しがよくなるように変形すると、

$$\begin{aligned} & \sum_n V_n \iint \Psi_l^{\text{TE}} (\nabla_t \times \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{a}_z dS + \iint \Psi_l^{\text{TE}} (\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z) \cdot (\nabla_t E_z) dS \\ & + \sum_n \frac{dV_n}{dz} \iint \Psi_l^{\text{TE}} (\mathbf{h}_n \cdot \mathbf{a}_z) dS + \sum_n V_n \iint \Psi_l^{\text{TE}} (\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z) \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} dS \\ & = -j\omega\mu \iint H_z \Psi_l^{\text{TE}} dS \end{aligned} \quad (3.54)$$

上式の左辺第 2, 3, 4 項は、スカラー積、ベクトル積がゼロとなって、第 1 項と右辺だけになる。式 (3.30) および式 (3.32) を再記して、

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \mathbf{e}_n^{\text{TM}} &= \nabla_t \times (-\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{e}_n^{\text{TE}} = \mathbf{a}_z \nabla_t^2 \Psi_n^{\text{TE}} \quad (3.56)$$

これより、

$$\begin{aligned} & \sum_n V_n^{\text{TE}} \iint \Psi_l^{\text{TE}} (\nabla_t^2 \Psi_n^{\text{TE}}) \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z dS = -j\omega\mu \iint H_z \Psi_l^{\text{TE}} dS \\ & - \sum_n V_n^{\text{TE}} (k_{c,n}^{\text{TE}})^2 \iint \Psi_l^{\text{TE}} \Psi_n^{\text{TE}} dS = -j\omega\mu \sum_n C_n^{\text{TE}} \iint \Psi_n^{\text{TE}} \Psi_l^{\text{TE}} dS \end{aligned} \quad (3.57)$$

直交性より、

$$V_l^{\text{TE}} = j\omega\mu C_l^{\text{TE}} \frac{1}{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2} \quad (3.58)$$

よって、 $C_l^{\text{TE}}$  は次のようになる。

$$C_l^{\text{TE}} = \frac{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2}{j\omega\mu} V_l^{\text{TE}} \quad (3.59)$$

■  $\iint (\text{式(3.27)}) \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} dS$  の計算

式 (3.27) の両辺に  $\mathbf{e}_l^{\text{TM}}$  のスカラー積をとり、各々面積分を実行すればよいが、 $H_z$  の取り扱いが式 (3.26) の  $E_z$  のように境界条件を考慮したものではない点が異なってくる（導出

省略).

$$\begin{aligned}
& \sum_n C_n^{\text{TE}} \left( \iint -\mathbf{e}_n^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} dS \right) + \sum_n \frac{dI_n}{dz} \left( \iint -\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} dS \right) \\
& + \sum_n I_n \iint \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \cdot (-\mathbf{h}_l^{\text{TM}}) dS \\
& = j\omega\epsilon \sum_n V_n \left( \iint \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} dS \right)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

モード関数の直交性より,

$$-\frac{dI_l^{\text{TM}}}{dz} - \sum_n I_n \iint \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} dS = j\omega\epsilon V_l^{\text{TM}} \tag{3.61}$$

■  $\iint (\text{式(3.27)}) \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} dS$  の計算

同様にして, 式 (3.27) の両辺に  $\mathbf{e}_l^{\text{TE}}$  のスカラ積をとり, 各々面積分を実行すると, 次のようになる (導出省略).

$$\begin{aligned}
& \sum_n C_n^{\text{TE}} \left( \iint -\mathbf{e}_n^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} dS \right) + \sum_n \frac{dI_n}{dz} \left( \iint -\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} dS \right) \\
& + \sum_n I_n \iint \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \cdot (-\mathbf{h}_l^{\text{TE}}) dS \\
& = j\omega\epsilon \sum_n V_n \left( \iint \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} dS \right)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

モード関数の直交性より,

$$-C_l^{\text{TE}} - \frac{dI_l^{\text{TE}}}{dz} - \sum_n I_n \iint \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TE}} dS = j\omega\epsilon V_l^{\text{TE}} \tag{3.63}$$

■  $\iint (\text{式(3.27)}) \cdot \Psi_l^{\text{TM}} \mathbf{a}_z dS$  の計算

同様にして, 式 (3.27) の両辺に  $\Psi_l^{\text{TM}} \mathbf{a}_z$  のスカラ積をとり, 各々面積分を実行すると, 次のようになる (導出省略).

$$\sum_n I_n^{\text{TM}} (k_{c,n}^{\text{TM}})^2 \iint \Psi_l^{\text{TM}} \Psi_n^{\text{TM}} dS = j\omega\epsilon \sum_n C_n^{\text{TM}} \iint \Psi_n^{\text{TM}} \Psi_l^{\text{TM}} dS \tag{3.64}$$

モード関数の直交性より,

$$C_l^{\text{TM}} = \frac{(k_{c,l}^{\text{TM}})^2}{j\omega\epsilon} I_l^{\text{TM}} \tag{3.65}$$

### 3.2.1 伝送方程式

式 (3.59), 式 (3.65) より  $C_l^{\text{TE}}$ ,  $C_l^{\text{TM}}$  を消去すると, 次のような 4 つの式が得られる.

$$\begin{aligned} & \sum_n V_n \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} d\sigma + \frac{(k_{c,l}^{\text{TM}})^2}{j\omega\epsilon} I_l^{\text{TM}} + \frac{dV_l^{\text{TM}}}{dz} \\ & + \sum_n V_n \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} dS = -j\omega\mu I_l^{\text{TM}} \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} & \sum_n V_n \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} d\sigma + \frac{\partial V_l^{\text{TE}}}{\partial z} + \sum_n V_n \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} dS \\ & = -j\omega\mu I_l^{\text{TE}} \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$-\frac{\partial I_l^{\text{TM}}}{\partial z} - \sum_n I_n \iint \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} dS = j\omega\epsilon V_l^{\text{TM}} \quad (3.68)$$

$$-\frac{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2}{j\omega\mu} V_l^{\text{TE}} - \frac{\partial I_l^{\text{TE}}}{\partial z} - \sum_n I_n \iint \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TE}} dS = j\omega\epsilon V_l^{\text{TE}} \quad (3.69)$$

これらの式を整理すると次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{dV_l^{\text{TM}}}{dz} &= - \left( \frac{(k_{c,l}^{\text{TM}})^2}{j\omega\epsilon} + j\omega\mu \right) I_l^{\text{TM}} \\ &\quad - \sum_n V_n \left( \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} d\sigma + \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} dS \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_l^{\text{TE}}}{dz} &= -j\omega\mu I_l^{\text{TE}} \\ &\quad - \sum_n V_n \left( \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} d\sigma + \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} dS \right) \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\frac{dI_l^{\text{TM}}}{dz} = -j\omega\epsilon V_l^{\text{TM}} - \sum_n I_n \iint \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TM}} dS \quad (3.72)$$

$$\frac{dI_l^{\text{TE}}}{dz} = - \left( \frac{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2}{j\omega\mu} + j\omega\epsilon \right) V_l^{\text{TE}} - \sum_n I_n \iint \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{h}_l^{\text{TE}} dS \quad (3.73)$$

ここで, TE, TM モードの添字は省略するが,

$$\beta_l^2 + \chi_l^2 \equiv k^2 \quad (3.74)$$

を定義すると,

$$\begin{aligned}
\frac{(k_{c,l}^{\text{TM}})^2}{j\omega\epsilon} + j\omega\mu &= \frac{(k_{c,l}^{\text{TM}})^2 - \omega^2\epsilon\mu}{j\omega\epsilon} \\
&= \frac{(k_{c,l}^{\text{TM}})^2 - k^2}{j\omega\epsilon} \\
&= -\frac{(\beta_{c,l}^{\text{TM}})^2}{j\omega\epsilon}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2}{j\omega\mu} + j\omega\epsilon &= \frac{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2 - \omega^2\epsilon\mu}{j\omega\mu} \\
&= \frac{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2 - k^2}{j\omega\mu} \\
&= -\frac{(\beta_{c,l}^{\text{TE}})^2}{j\omega\mu}
\end{aligned} \tag{3.76}$$

また,

$$Z \equiv j\omega\mu, \quad Y \equiv j\omega\epsilon \tag{3.77}$$

$$Z_l^{\text{TM}} \equiv -\frac{(\beta_l^{\text{TM}})^2}{j\omega\epsilon}, \quad Y_l^{\text{TE}} \equiv -\frac{(\beta_l^{\text{TE}})^2}{j\omega\mu} \tag{3.78}$$

$$T_{V,ln} \equiv \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l dS + \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l d\sigma \tag{3.79}$$

$$T_{I,ln} \equiv \iint \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{h}_l dS = \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l dS \tag{3.80}$$

とおくと, 伝送方程式は次のようになる.

$$\frac{dV_l^{\text{TM}}}{dz} = -Z_l^{\text{TM}} I_l^{\text{TM}} - \sum_n T_{V,ln}^{\text{TM-TM}} V_n^{\text{TM}} - \sum_n T_{V,ln}^{\text{TM-TE}} V_n^{\text{TE}} \tag{3.81}$$

$$\frac{dI_l^{\text{TM}}}{dz} = -Y V_l^{\text{TM}} - \sum_n T_{I,ln}^{\text{TM-TM}} I_n^{\text{TM}} - \sum_n T_{I,ln}^{\text{TM-TE}} I_n^{\text{TE}} \tag{3.82}$$

$$\frac{dV_l^{\text{TE}}}{dz} = -Z I_l^{\text{TE}} - \sum_n T_{V,ln}^{\text{TE-TE}} V_n^{\text{TE}} - \sum_n T_{V,ln}^{\text{TE-TM}} V_n^{\text{TM}} \tag{3.83}$$

$$\frac{dI_l^{\text{TE}}}{dz} = -Y_l^{\text{TE}} V_l^{\text{TE}} - \sum_n T_{I,ln}^{\text{TE-TE}} I_n^{\text{TE}} - \sum_n T_{I,ln}^{\text{TE-TM}} I_n^{\text{TM}} \tag{3.84}$$

### 3.3 伝送方程式の係数 (TE-TM)

TE と TM モードのモード関数の面積分は先に示したように周回積分に変換できる<sup>\*2</sup>.

$$\begin{aligned}
 \iint_S \mathbf{e}_n^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} dS &= - \iint_S (\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}} \times \nabla_t \Psi_l^{\text{TM}}) \cdot \mathbf{a}_z dS \\
 &= - \oint_C \Psi_n^{\text{TE}} \frac{\partial \Psi_l^{\text{TM}}}{\partial \sigma} d\sigma \\
 &= \oint_C \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial \sigma} \Psi_l^{\text{TM}} d\sigma
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

TE モードの電界モード関数の微分と TM モードの電界モード関数の面積分の場合、上式において  $\mathbf{e}_n^{\text{TE}} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{e}_n^{\text{TE}}}{\partial z}$  とすると、 $\Psi_n^{\text{TE}} \rightarrow \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z}$ 、さらに TM モードの境界条件  $\Psi_l^{\text{TM}} = 0$  (on C) ゆえ、

$$\begin{aligned}
 \iint_S \frac{\partial \mathbf{e}_n^{\text{TE}}}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} dS &= - \iint_S (\nabla_t \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \times \nabla_t \Psi_l^{\text{TM}}) \cdot \mathbf{a}_z dS \\
 &= - \oint_C \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_l^{\text{TM}}}{\partial \sigma} d\sigma \\
 &= \oint_C \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \right) \Psi_l^{\text{TM}} d\sigma = 0
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

よって、

$$T_{I,ln}^{\text{TM:TE}} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{e}_n^{\text{TE}}}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} dS = \oint_C \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \right) \Psi_l^{\text{TM}} d\sigma = 0 \tag{3.87}$$

$$T_{V,ln}^{\text{TE:TM}} = - \iint_S \mathbf{e}_n^{\text{TM}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_l^{\text{TE}}}{\partial z} dS = - \oint_C \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \Psi_l^{\text{TE}}}{\partial z} \right) \Psi_n^{\text{TM}} d\sigma = 0 \tag{3.88}$$

一方、TM モードの電界モード関数の微分と TE モードの場合、 $\mathbf{e}_l^{\text{TM}} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{e}_l^{\text{TM}}}{\partial z}$  とすると、 $\Psi_l^{\text{TM}} \rightarrow \frac{\partial \Psi_l^{\text{TM}}}{\partial z}$  より、

$$\begin{aligned}
 \iint_S \mathbf{e}_n^{\text{TE}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_l^{\text{TM}}}{\partial z} dS &= - \iint_S (\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}} \times \nabla_t \frac{\partial \Psi_l^{\text{TM}}}{\partial z}) \cdot \mathbf{a}_z dS \\
 &= - \oint_C \Psi_n^{\text{TE}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \Psi_l^{\text{TM}}}{\partial z} \right) d\sigma \\
 &= \oint_C \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \Psi_l^{\text{TM}}}{\partial z} d\sigma
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

<sup>\*2</sup> G. Figlia and G. G. Gentili, "On the Line-Integral Formulation of Mode-Matching Technique," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.MTT-50, no.2, pp.578-579, 2002.

この場合はゼロにはならない。よって,

$$T_{V,ln}^{\text{TE:TM}} = - \iint \mathbf{e}_n^{\text{TE}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_l^{\text{TM}}}{\partial z} dS = - \oint_C \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \Psi_l^{\text{TM}}}{\partial z} d\sigma = -T_{I,nl}^{\text{TE:TM}} \quad (3.90)$$

$n$  と  $l$  を入れ替えて,

$$T_{V,nl}^{\text{TE:TM}} = - \iint \mathbf{e}_l^{\text{TE}} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n^{\text{TM}}}{\partial z} dS = - \oint_C \frac{\partial \Psi_l^{\text{TE}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial z} d\sigma = -T_{I,ln}^{\text{TE:TM}} \quad (3.91)$$

ここで,  $a = z(z)$  より,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial a}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial a} \quad (3.92)$$



## 3.4 伝送方程式の係数 (TE-TE, TM-TM)

### 3.4.1 面積分による計算

伝送方程式の係数  $T_{I,ln}$ ,  $T_{V,nl}$  は,

$$T_{I,ln} = \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l dS = \iint \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{h}_l dS = -T_{V,nl} \quad (3.93)$$

電界, 磁界のモード関数の関係  $\mathbf{e} = \mathbf{h} \times \mathbf{a}_z$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}$  より,

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{h} \times \mathbf{a}_z) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \times \mathbf{a}_z \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{a}_z \times \mathbf{e}) = \mathbf{a}_z \times \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial z} \quad (3.95)$$

これより,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l &= \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot (\mathbf{h}_l \times \mathbf{a}_z) \\ &= \mathbf{h}_l \cdot \left( \mathbf{a}_z \times \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \right) \\ &= \mathbf{h}_l \cdot \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{h}_l \end{aligned} \quad (3.96)$$

ここで, モード関数はスカラー関数  $\Psi^{\text{TE}}$ ,  $\Psi^{\text{TM}}$  より,

$$\mathbf{h}^{\text{TE}} = -\nabla_t \Psi^{\text{TE}} \quad (3.97)$$

$$\mathbf{e}^{\text{TM}} = -\nabla_t \Psi^{\text{TM}} \quad (3.98)$$

よって, 電界, 磁界のモード関数の関係は,

$$\mathbf{e}^{\text{TE}} = \mathbf{h}^{\text{TE}} \times \mathbf{a}_z = -\nabla_t \Psi^{\text{TE}} \times \mathbf{a}_z \quad (3.99)$$

$$\mathbf{h}^{\text{TM}} = \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}^{\text{TM}} = \mathbf{a}_z \times (-\nabla_t \Psi^{\text{TE}}) \quad (3.100)$$

これより, 両者とも TE モードの場合,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_n^{\text{TE}}}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_n^{\text{TE}} \right) \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} \\ &= \left( \mathbf{a}_z \times \nabla_t \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} \\ &= \left( \mathbf{e}_l^{\text{TE}} \times \mathbf{a}_z \right) \cdot \nabla_t \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \\ &= -\mathbf{h}_l^{\text{TE}} \cdot \nabla_t \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \\ &= \left( \nabla_t \Psi_l^{\text{TE}} \right) \cdot \left( \nabla_t \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.101)$$

両者とも TM モードの場合も、次のように同じ形となる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_n^{\text{TM}}}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( -\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} \right) \cdot \left( -\nabla_t \Psi_l^{\text{TM}} \right) \\ &= \left( \nabla_t \Psi_l^{\text{TM}} \right) \cdot \left( \nabla_t \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (3.102)$$

比較のため、TE モードと TM モードの場合を求めてみると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_n^{\text{TE}}}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TM}} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( -\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}} \times \mathbf{a}_z \right) \cdot \left( -\nabla_t \Psi_l^{\text{TM}} \right) \\ &= \left( \nabla_t \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \times \mathbf{a}_z \right) \cdot \left( \nabla_t \Psi_l^{\text{TM}} \right) \\ &= \left\{ \left( \nabla_t \Psi_l^{\text{TM}} \right) \times \left( \nabla_t \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \right) \right\} \cdot \mathbf{a}_z \\ &= - \left\{ \left( \nabla_t \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \right) \times \left( \nabla_t \Psi_l^{\text{TM}} \right) \right\} \cdot \mathbf{a}_z\end{aligned}\quad (3.103)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_n^{\text{TM}}}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l^{\text{TE}} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( -\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} \right) \cdot \left( -\nabla_t \Psi_l^{\text{TE}} \times \mathbf{a}_z \right) \\ &= \left( \nabla_t \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial z} \right) \cdot \left( \nabla_t \Psi_l^{\text{TE}} \times \mathbf{a}_z \right) \\ &= \left\{ \left( \nabla_t \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial z} \right) \times \left( \nabla_t \Psi_l^{\text{TE}} \right) \right\} \cdot \mathbf{a}_z\end{aligned}\quad (3.104)$$

さて、伝送方程式の係数  $T_{I,ln}$  をスカラ関数より求めることを考えよう。両者とも同じ TE モード (TE-TE)、および両者とも同じ TM モード (TM-TM) の場合、

$$T_{I,ln} = \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l dS = \iint \left( \nabla_t \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) \cdot \left( \nabla_t \Psi_l \right) dS \quad (3.105)$$

2次元演算子  $\nabla_t$  を用いたグリーンの第一定理

$$\iint_S \left( \Phi \nabla_t^2 \Psi + \nabla_t \Phi \cdot \nabla_t \Psi \right) dS = \oint_C \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma \quad (3.106)$$

より、

$$\iint_S \nabla_t \Phi \cdot \nabla_t \Psi dS = - \iint_S \Phi \nabla_t^2 \Psi dS + \oint_C \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma \quad (3.107)$$

いま、 $\Phi \rightarrow \frac{\partial \Psi_n}{\partial z}$ 、 $\Psi \rightarrow \Psi_l$  とおくと、

$$\begin{aligned}T_{I,ln} &= \iint \left( \nabla_t \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) \cdot \left( \nabla_t \Psi_l \right) dS \\ &= - \iint_S \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \nabla_t^2 \Psi_l dS + \oint_C \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial \Psi_l}{\partial n} d\sigma\end{aligned}\quad (3.108)$$

スカラーヘルムホルツ方程式  $\nabla_t^2 \Psi_l + k_{c,l}^2 \Psi_l = 0$  を用いれば,

$$\begin{aligned} T_{I,ln} &= - \iint_S \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} (-k_{c,l}^2 \Psi_l) dS + \oint_C \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial \Psi_l}{\partial n} d\sigma \\ &= k_{c,l}^2 \iint_S \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \Psi_l dS + \oint_C \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial \Psi_l}{\partial n} d\sigma \end{aligned} \quad (3.109)$$

両者とも TE モードのとき, 境界条件  $\frac{\partial \Psi_l^{\text{TE}}}{\partial n} = 0$  (on C) より, 面積分を用いて,

$$T_{I,ln}^{\text{TE:TE}} = (k_{c,l}^{\text{TE}})^2 \iint_S \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \Psi_l^{\text{TE}} dS \quad (3.110)$$

上式は,  $n = l$ , および  $n \neq l$  の両方に対して計算が行えるが, 面積分が必要となる. また, グリーンの第一定理に  $\Phi \rightarrow \Psi_l$ ,  $\Psi \rightarrow \frac{\partial \Psi_n}{\partial z}$  として求めれば,

$$\begin{aligned} T_{I,ln} &= \iint_S \left( \nabla_t \Psi_l \right) \cdot \left( \nabla_t \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) dS \\ &= - \iint_S \Psi_l \nabla_t^2 \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} dS + \oint_C \Psi_l \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) d\sigma \end{aligned} \quad (3.111)$$

スカラーヘルムホルツ方程式  $\nabla_t^2 \Psi_n + k_{c,n}^2 \Psi_n = 0$  の両辺を  $z$  で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \nabla_t^2 \Psi_n + k_{c,n}^2 \Psi_n \right) &= \nabla_t^2 \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} + 2k_{c,n} \frac{\partial k_{c,n}}{\partial z} \Psi_n + k_{c,n}^2 \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.112)$$

これより,

$$\begin{aligned} T_{I,ln} &= \iint_S \Psi_l \left( 2k_{c,n} \frac{\partial k_{c,n}}{\partial z} \Psi_n + k_{c,n}^2 \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) dS \\ &\quad + \oint_C \Psi_l \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) d\sigma \\ &= 2k_{c,n} \frac{\partial k_{c,n}}{\partial z} \iint_S \Psi_l \Psi_n dS + k_{c,n}^2 \iint_S \Psi_l \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} dS \\ &\quad + \oint_C \Psi_l \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) d\sigma \end{aligned} \quad (3.113)$$

ここで,

$$\iint_S \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_n dS = k_{c,n}^2 \iint_S \Psi_l \Psi_n dS = \delta_{ln} \quad (3.114)$$

これより,

$$T_{I,ln} = \frac{2}{k_{c,n}} \frac{\partial k_{c,n}}{\partial z} \delta_{ln} + k_{c,n}^2 \iint_S \Psi_l \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} dS + \oint_C \Psi_l \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) d\sigma \quad (3.115)$$

両者とも TM モードのとき、TM モードの境界条件  $\Psi_l^{\text{TM}} = 0$  (on C) より、

$$T_{I,ln}^{\text{TM:TM}} = (k_{c,n}^{\text{TM}})^2 \iint_S \Psi_l^{\text{TM}} \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial z} dS + \frac{2}{k_{c,n}^{\text{TM}}} \frac{\partial k_{c,n}^{\text{TM}}}{\partial z} \delta_{ln} \quad (3.116)$$

両者とも TM モードの場合も、 $n = l$  および  $n \neq l$  の両方に対して計算が行えるが、面積分が必要である。

### 3.4.2 面積分から周回積分への変換

次に、面積分を周回積分に変換することを考える。まず、式 (3.109)、式 (3.115) より、

$$\begin{aligned} \iint_S \Psi_l \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} dS &= \frac{1}{k_{c,l}^2} \left( T_{I,ln} - \oint_C \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial \Psi_l}{\partial n} d\sigma \right) \\ &= \frac{1}{k_{c,n}^2} \left( T_{I,ln} - \oint_C \Psi_l \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) d\sigma - \frac{2}{k_{c,n}} \frac{\partial k_{c,n}}{\partial z} \delta_{ln} \right) \\ k_{c,n}^2 \left( T_{I,ln} - \oint_C \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial \Psi_l}{\partial n} d\sigma \right) \\ &= k_{c,l}^2 \left( T_{I,ln} - \oint_C \Psi_l \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) d\sigma - \frac{2}{k_{c,n}} \frac{\partial k_{c,n}}{\partial z} \delta_{ln} \right) \end{aligned} \quad (3.117)$$

よって、

$$\begin{aligned} T_{I,ln} &= \frac{1}{k_{c,l}^2 - k_{c,n}^2} \left\{ -k_{c,n}^2 \oint_C \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial \Psi_l}{\partial n} d\sigma \right. \\ &\quad \left. + k_{c,l}^2 \oint_C \Psi_l \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) d\sigma + \frac{2k_{c,l}^2}{k_{c,n}} \frac{\partial k_{c,n}}{\partial z} \delta_{ln} \right\} \end{aligned} \quad (3.118)$$

モードの次数が異なる場合 ( $n \neq l$ )、 $k_{c,n}^2 \neq k_{c,l}^2$ 、 $\delta_{ln} = 0$  (モード直交性) より、

$$\begin{aligned} T_{I,ln} &= \frac{1}{k_{c,l}^2 - k_{c,n}^2} \left\{ -k_{c,n}^2 \oint_C \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \frac{\partial \Psi_l}{\partial n} d\sigma \right. \\ &\quad \left. + k_{c,l}^2 \oint_C \Psi_l \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) d\sigma \right\} \end{aligned} \quad (3.119)$$

両者とも TE モードのとき ( $k_{c,l}^{\text{TE}} = \frac{\chi'_l}{a}$ ,  $k_{c,n}^{\text{TE}} = \frac{\chi'_n}{a}$ ),  $\frac{\partial \Psi_l^{\text{TE}}}{\partial n} = 0$ ,  $\frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial n} = 0$  (on C) ゆえ、

$$T_{I,ln}^{\text{TE-TE}} = \frac{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2}{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2 - (k_{c,n}^{\text{TE}})^2} \oint_C \Psi_l^{\text{TE}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \right) d\sigma \quad (3.120)$$

また、両者とも TM モードのとき ( $k_{c,l}^{\text{TM}} = \frac{\chi_l}{a}$ ,  $k_{c,n}^{\text{TM}} = \frac{\chi_n}{a}$ ),  $\Psi_l^{\text{TM}} = 0$ ,  $\Psi_n^{\text{TM}} = 0$  (on C) ゆえ,

$$T_{I,ln}^{\text{TM-TM}} = \frac{-(k_{c,n}^{\text{TM}})^2}{(k_{c,l}^{\text{TM}})^2 - (k_{c,n}^{\text{TM}})^2} \oint_C \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_l^{\text{TM}}}{\partial n} d\sigma \quad (3.121)$$

同じモードを計算する場合、モードの次数が等しい  $n = l$  とおいて、曲線テーパ構造に対してガウスの発散定理を適用すると次式が得られる.

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_n dS = -\frac{1}{2} \oint_\sigma \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n d\sigma \quad (3.122)$$

両者とも TE モードのとき,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TE}} &= \mathbf{h}_n^{\text{TE}} \cdot \mathbf{h}_n^{\text{TE}} = (-\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}}) \cdot (-\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}}) \\ &= (\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}}) \cdot (\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}}) \end{aligned} \quad (3.123)$$

また、両者とも TM モードのとき,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_n^{\text{TM}} \cdot \mathbf{h}_n^{\text{TM}} &= \mathbf{e}_n^{\text{TM}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} = (-\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) \cdot (-\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) \\ &= (\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) \cdot (\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) \end{aligned} \quad (3.124)$$

したがって,

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{e}_n^{\text{TE}}}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TE}} dS = -\frac{1}{2} \oint_\sigma \tan \vartheta (\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}}) \cdot (\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}}) d\sigma \quad (3.125)$$

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{e}_n^{\text{TM}}}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} dS = -\frac{1}{2} \oint_\sigma \tan \vartheta (\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) \cdot (\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) d\sigma \quad (3.126)$$

## 3.5 モード関数の積分 (TE-TE, TM-TM) について

### 3.5.1 面積分

2つのモード関数とも TE モード, あるいは TM モードのスカラー積の面積分は,

$$\begin{aligned}\iint_{S_a} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n dS &= \iint_{S_a} \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{h}_n dS \\ &= \iint_{S_a} (\nabla_t \Psi_m) \cdot (\nabla_t \Psi_n) dS\end{aligned}\quad (3.127)$$

ただし,  $S_a$  は管軸に直交する導波管断面全体あるいは一部の面を示す. 2次元演算子  $\nabla_t$  を用いたグリーンの第一定理, およびスカラーヘルムホルツ方程式  $\nabla_t^2 \Psi_n + k_{c,n}^2 \Psi_n = 0$  より, 上式は次のようになる.

$$\begin{aligned}\iint_{S_a} (\nabla_t \Psi_m) \cdot (\nabla_t \Psi_n) dS &= - \iint_{S_a} \Psi_m \nabla_t^2 \Psi_n dS + \oint_{C_a} \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} d\sigma \\ &= k_{c,n}^2 \iint_{S_a} \Psi_m \Psi_n dS + \oint_{C_a} \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} d\sigma\end{aligned}\quad (3.128)$$

同一モードのとき,  $m = n$  とおき,

$$\iint_{S_a} (\nabla_t \Psi_n) \cdot (\nabla_t \Psi_n) dS = k_{c,n}^2 \iint_S \Psi_n^2 dS + \oint_{C_a} \Psi_n \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} d\sigma\quad (3.129)$$

面  $S_a$  として導波管断面全体の面  $S$  をとると, 境界条件として導波管の管壁  $C$  上で  $\Psi_n = 0$  あるいは  $\frac{\partial \Psi_n}{\partial n} = 0$  のとき, 第2項はゼロゆえ,

$$\iint_S (\nabla_t \Psi_n) \cdot (\nabla_t \Psi_n) dS = k_{c,n}^2 \iint_S \Psi_n^2 dS\quad (3.130)$$

したがって, モード関数を正規化するための積分は次のようになる.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n dS &= \iint_S \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_n dS \\ &= k_{c,n}^2 \iint_S \Psi_n^2 dS \equiv 1\end{aligned}\quad (3.131)$$

一方, 異なるモードのとき,  $m \neq n$  とみなし,  $\Psi_m$  と  $\Psi_n$  を交換してグリーンの第一定理を適用して同様に求めると,

$$\iint_{S_a} (\nabla_t \Psi_n) \cdot (\nabla_t \Psi_m) dS = k_{c,m}^2 \iint_{S_a} \Psi_n \Psi_m dS + \oint_{C_a} \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} d\sigma\quad (3.132)$$

これより、次の関係式が得られる.

$$\begin{aligned} k_{c,n}^2 \iint_{S_a} \Psi_m \Psi_n dS + \oint_{C_a} \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} d\sigma \\ = k_{c,m}^2 \iint_{S_a} \Psi_n \Psi_m dS + \oint_{C_a} \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} d\sigma \end{aligned} \quad (3.133)$$

変形して,

$$(k_{c,m}^2 - k_{c,n}^2) \iint_{S_a} \Psi_m \Psi_n dS = \oint_{C_a} \left( \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} - \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} \right) d\sigma \quad (3.134)$$

$k_{c,m} \neq k_{c,n}$  のとき,

$$\iint_{S_a} \Psi_m \Psi_n dS = \frac{1}{k_{c,m}^2 - k_{c,n}^2} \oint_{C_a} \left( \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} - \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} \right) d\sigma \quad (3.135)$$

逆に, スカラ関数の面積分の項を消去すると,

$$\begin{aligned} \iint_{S_a} (\nabla_t \Psi_m) \cdot (\nabla_t \Psi_n) dS \\ = \frac{1}{k_{c,m}^2 - k_{c,n}^2} \left( k_{c,m}^2 \oint_{C_a} \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} d\sigma - k_{c,n}^2 \oint_{C_a} \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} d\sigma \right) \end{aligned} \quad (3.136)$$

面  $S_a$  として導波管段面全体の面  $S$  をとると, 境界条件として導波管の管壁境界条件として管壁  $C$  上で  $\Psi_m, \Psi_n = 0$  あるいは  $\frac{\partial \Psi_m}{\partial n}, \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} = 0$  のとき, 上式右辺はゼロとなり, 次のようにモードの直交性が得られる.

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n dS &= \iint_S \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{h}_n dS \\ &= \iint_S (\nabla_t \Psi_m) \cdot (\nabla_t \Psi_n) dS = 0 \end{aligned} \quad (3.137)$$

### 3.5.2 周回積分

一方,  $k_{c,m} = k_{c,n}$  のとき, 式 (3.136) は不定となるがロピタルの定理を用いれば次のように計算できる<sup>\*3</sup>.

$$\begin{aligned} \iint_{S_a} \Psi_m \Psi_n dS &= \lim_{k_{c,n} \rightarrow k_{c,m}} \frac{\frac{d}{dk_{c,n}} \oint_{C_a} \left( \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} - \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} \right) d\sigma}{\frac{d}{dk_{c,n}} (k_{c,m}^2 - k_{c,n}^2)} \\ &= \frac{-1}{2k_{c,m}} \oint_{C_a} \left( \Psi_m \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial k_{c,n} \partial n} - \frac{\partial \Psi_n}{\partial k_{c,n}} \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} \right) d\sigma \Big|_{k_{c,n}=k_{c,m}} \end{aligned} \quad (3.138)$$

<sup>\*3</sup> G. Figlia and G. G. Gentili, "On the Line-Integral Formulation of Mode-Matching Technique," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.MTT-50, no.2, pp.578-579, 2002.

逆に,  $k_{c,m} \rightarrow k_{c,n}$  としてロピタルの定理を用いると,

$$\iint_{S_a} \Psi_m \Psi_n dS = \frac{-1}{2k_{c,n}} \oint_{C_a} \left( \Psi_n \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial k_{c,m} \partial n} - \frac{\partial \Psi_m}{\partial k_{c,m}} \frac{\partial \Psi_n}{\partial n} \right) d\sigma \Big|_{k_{c,m}=k_{c,n}} \quad (3.139)$$

したがって,

$$\begin{aligned} & \iint_{S_a} (\nabla_t \Psi_m) \cdot (\nabla_t \Psi_n) dS \\ &= \left[ -\frac{k_{c,m}}{2} \oint_{C_a} \left( \Psi_m \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial k_{c,n} \partial n} - \frac{\partial \Psi_n}{\partial k_{c,n}} \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} \right) d\sigma + \oint_{C_a} \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} d\sigma \right]_{k_{c,n}=k_{c,m}} \end{aligned}$$

面  $S_a$  として導波管段面全体の面  $S$  をとると, 両者とも TM モードのモード関数の場合, 管壁  $C$  上で  $\Psi_m^{\text{TM}} = 0$ ,  $\Psi_n^{\text{TM}} = 0$  ゆえ,

$$\iint_S (\nabla_t \Psi_m^{\text{TM}}) \cdot (\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) dS = \frac{k_{c,m}^{\text{TM}}}{2} \oint_C \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial k_{c,n}^{\text{TM}}} \frac{\partial \Psi_m^{\text{TM}}}{\partial n} d\sigma \Big|_{k_{c,n}^{\text{TM}}=k_{c,m}^{\text{TM}}} \quad (3.140)$$

また, 両者とも TM モードのモード関数の場合, 管壁  $C$  上で  $\frac{\partial \Psi_m^{\text{TE}}}{\partial n} = 0$ ,  $\frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial n} = 0$  ゆえ,

$$\iint_S (\nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \cdot (\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}}) dS = -\frac{k_{c,m}^{\text{TE}}}{2} \oint_C \Psi_m^{\text{TE}} \frac{\partial^2 \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial k_{c,n}^{\text{TE}} \partial n} d\sigma \Big|_{k_{c,n}^{\text{TE}}=k_{c,m}^{\text{TE}}} \quad (3.141)$$

これより, 正規化係数の計算を周回積分によって行うこともできる.



## 3.6 モード関数の積分 (TE-TM) について

### 3.6.1 ストークスの定理による周回積分への変換

TE モードと TM モードの場合,

$$\begin{aligned}\iint_{S_a} \mathbf{e}_m^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} dS &= \iint_{S_a} (\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \cdot (-\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) dS \\ &= \iint_{S_a} (\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \cdot \mathbf{a}_z dS\end{aligned}\quad (3.142)$$

ただし,  $S_a$  は管軸に直交する導波管断面全体あるいは一部の面を示す. ここで,  $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$  より,

$$\begin{aligned}\nabla_t \times (\Psi_n^{\text{TM}} \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) &= \nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}} + \Psi_n^{\text{TM}} \nabla_t \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}} \\ &= \nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}\end{aligned}\quad (3.143)$$

これを面積分して,

$$\begin{aligned}&\iint_{S_a} \left\{ \nabla \times (\Psi_n^{\text{TM}} \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= \iint_{S_a} \left\{ \left( \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times (\Psi_n^{\text{TM}} \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= \iint_{S_a} \left\{ \nabla_t \times (\Psi_n^{\text{TM}} \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS\end{aligned}\quad (3.144)$$

ストークスの定理

$$\iint_{S_a} \left\{ \nabla \times (\Psi_n^{\text{TM}} \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS = \oint_{C_a} \Psi_n^{\text{TM}} \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.145)$$

より,

$$\iint_{S_a} \left\{ \nabla_t \times (\Psi_n^{\text{TM}} \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS = \oint_{C_a} \Psi_n^{\text{TM}} \frac{\partial \Psi_m^{\text{TE}}}{\partial \sigma} d\sigma \quad (3.146)$$

ただし, 面  $S$  は  $\mathbf{a}_z$  が法線方向となる平面,  $d\boldsymbol{\sigma}$  は周回積分路のベクトル線要素,  $+\sigma$  方向は  $\mathbf{a}_z$  に対して右ねじの方向である. よって, これらの結果より次式が得られる

$$\begin{aligned}\iint_{S_a} \mathbf{e}_m^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} dS &= \iint_{S_a} (\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= \oint_{C_a} \Psi_n^{\text{TM}} \frac{\partial \Psi_m^{\text{TE}}}{\partial \sigma} d\sigma\end{aligned}\quad (3.147)$$

式 (3.143), 式 (3.144), 式 (3.146) において,  $\Psi_m^{\text{TE}}$  と  $\Psi_n^{\text{TM}}$  を交換して同様に求めると,

$$\begin{aligned}\iint_{S_a} \left\{ \nabla_t \times \left( \Psi_m^{\text{TE}} \nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} \right) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS &= \oint_{C_a} \Psi_m^{\text{TE}} \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial \sigma} d\sigma \\ \iint_{S_a} \left( \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}} \times \nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} \right) \cdot \mathbf{a}_z dS &= \oint_{C_a} \Psi_m^{\text{TE}} \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial \sigma} d\sigma\end{aligned}\quad (3.148)$$

よって,

$$\begin{aligned}- \iint_{S_a} \mathbf{e}_m^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} dS &= - \iint_{S_a} \left( \nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}} \right) \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= \oint_{C_a} \Psi_m^{\text{TE}} \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial \sigma} d\sigma\end{aligned}\quad (3.149)$$

また,

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{h}_m^{\text{TE}} \cdot \mathbf{h}_n^{\text{TM}} dS &= \iint_S \left( - \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}} \right) \cdot \left( - \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} \right) \cdot dS \\ &= \iint_S \left( \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}} \times \nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} \right) \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= - \iint_S \mathbf{e}_m^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} dS\end{aligned}\quad (3.150)$$

まとめると,

$$\begin{aligned}\iint_{S_a} \mathbf{e}_m^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} dS &= - \iint_S \mathbf{h}_m^{\text{TE}} \cdot \mathbf{h}_n^{\text{TM}} dS \\ &= \oint_{C_a} \frac{\partial \Psi_m^{\text{TE}}}{\partial \sigma} \Psi_n^{\text{TM}} d\sigma \\ &= - \oint_{C_a} \Psi_m^{\text{TE}} \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial \sigma} d\sigma\end{aligned}\quad (3.151)$$

積分範囲  $S_a$  が導波管の断面  $S$  と一致している場合, 周回積分路  $C_a$  は導波管の管壁  $C$  ゆえ,  $\Psi_n^{\text{TM}} = 0$  (on  $C$ ) より上式はゼロとなる. これが TE モードと TM モードの直交性である.

$$\iint_S \mathbf{e}_m^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} dS = 0 \quad (3.152)$$

### 3.6.2 ガウスの発散定理による周回積分への変換

ガウスの発散定理を用いた別の導出を示そう<sup>\*4</sup>. まず, ベクトル公式  $\nabla \cdot (w\mathbf{A}) = w\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla w$  を変形して,

$$\mathbf{A} \cdot \nabla w = \nabla \cdot (w\mathbf{A}) - w\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (3.153)$$

<sup>\*4</sup> 小口文一, " マイクロ波およびミリ波回路," 丸善, 1964.

これより,  $w \equiv \Psi_n^{\text{TM}}$ ,  $A \equiv \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}$  とおくと,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \cdot \nabla \Psi_n^{\text{TM}} \\ &= \nabla \cdot (\Psi_n^{\text{TM}} \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) - \Psi_n^{\text{TM}} \nabla \cdot (\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \end{aligned} \quad (3.154)$$

上式右辺の第 2 項について, ベクトル公式

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) \quad (3.155)$$

より,  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{a}_z$ ,  $\mathbf{C} \equiv \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}$  とおくと次式が得られる (勾配の回転はゼロ).

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) &= (\nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{a}_z) - \mathbf{a}_z \cdot (\nabla \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.156)$$

よって,

$$(\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \cdot \nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} = \nabla_t \cdot (\Psi_n^{\text{TM}} \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \quad (3.157)$$

2 次元の  $\nabla_t$  に関するガウスの発散定理より,

$$\begin{aligned} \iint_{S_a} (\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \cdot \nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} dS &= \iint_{S_a} \nabla_t \cdot (\Psi_n^{\text{TM}} \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) dS \\ &= \oint_{C_a} (\Psi_n^{\text{TM}} \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \oint_{C_a} \Psi_n^{\text{TM}} (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_z) \cdot \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}} d\sigma \\ &= \oint_{C_a} \Psi_n^{\text{TM}} (-\mathbf{a}_\sigma) \cdot \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}} d\sigma \\ &= - \oint_{C_a} \Psi_n^{\text{TM}} \frac{\partial \Psi_m^{\text{TE}}}{\partial \sigma} d\sigma \end{aligned} \quad (3.158)$$

ただし,  $\mathbf{n}$  は面  $S$  (管軸に直交する面) 上における周回積分路の外向き法線単位ベクトルを示し, 周回積分路に沿う方向の単位ベクトルを  $\mathbf{a}_\sigma \equiv \mathbf{a}_z \times \mathbf{n}$  とおいている. したがって,

$$\begin{aligned} \iint_{S_a} \mathbf{e}_m^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} dS &= - \iint_{S_a} (\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_m^{\text{TE}}) \cdot \nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} dS \\ &= \oint_{C_a} \Psi_n^{\text{TM}} \frac{\partial \Psi_m^{\text{TE}}}{\partial \sigma} d\sigma \end{aligned} \quad (3.159)$$

その他も同様である.

## 3.7 曲線テーパ構造に対するガウスの発散定理

### 3.7.1 3次元のガウスの発散定理の応用

任意のベクトル  $\mathbf{A}$  に対して通常の3次元のガウスの発散定理を表すと,

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.160)$$

ただし,  $\mathbf{n}$  は閉曲面  $S$  の外向き単位法線ベクトルである. いま, 図のように, 管軸は直線にとり  $z$  軸と一致させ, 面  $S_1$ ,  $S_2$  は管軸に直交する断面にとり, 面  $S_3$  を管壁にとる. こ

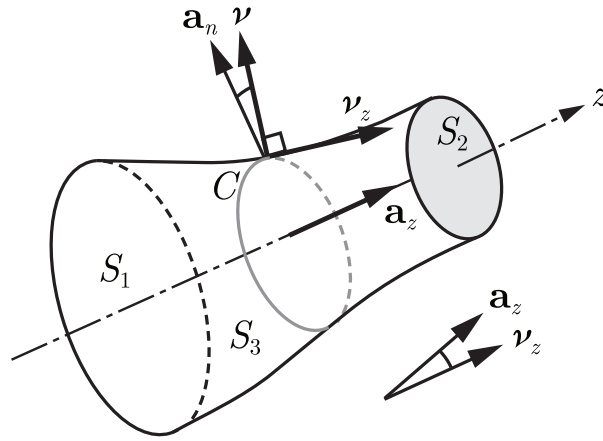


図 3.1. 単位ベクトルの定義

のような座標系においては, 式 (3.160) の右辺は次のようになる.

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1+S_2+S_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z dS + \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z dS + \iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nu} dS_3 \end{aligned} \quad (3.161)$$

ただし,  $\boldsymbol{\nu}$  は  $S_3$  の単位法線ベクトルを示す. 一方,  $\boldsymbol{\nu}$  に直交する単位ベクトルを  $\boldsymbol{\nu}_z$ , 面  $S_1$  と  $S_2$  との間において管軸方向に沿う単位ベクトルを  $\mathbf{a}_z$ , これに直交する導波管断面上の管壁 (閉曲線  $C$ ) の外向き単位法線ベクトルを  $\mathbf{a}_n$  とおき, 管壁の局所的な傾きを  $\vartheta$  とすると, 次のようになる.

$$\mathbf{a}_z \cdot \boldsymbol{\nu}_z = \mathbf{a}_n \cdot \boldsymbol{\nu} = \cos \vartheta \quad (3.162)$$

さらに,

$$dS_3 = \frac{dz}{\cos \vartheta} d\sigma \quad (3.163)$$

$$dV = dS dz \quad (3.164)$$

したがって、式 (3.160) は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int \left( \iint_S \nabla \cdot \mathbf{A} dS \right) dz \\ &= - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z dS + \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z dS + \int \left( \oint_{\sigma} \frac{\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nu}}{\cos \vartheta} d\sigma \right) dz \end{aligned} \quad (3.165)$$

$z \rightarrow 0$  のとき、上式右辺の第1項と第2項はキャンセルして、次式が得られる。

$$\iint_S \nabla \cdot \mathbf{A} dS = \oint_{\sigma} \frac{\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nu}}{\cos \vartheta} d\sigma \quad (3.166)$$

ここで、

$$A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z \quad (3.167)$$

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{A} - A_z \mathbf{a}_z \quad (3.168)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} &= (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{a}_n) \mathbf{a}_n + (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{a}_z) \mathbf{a}_z \\ &= \cos \vartheta \mathbf{a}_n - \sin \vartheta \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (3.169)$$

とおき、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla_t \cdot \mathbf{A}_t + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (3.170)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nu}}{\cos \vartheta} &= \frac{\mathbf{A} \cdot (\cos \vartheta \mathbf{a}_n - \sin \vartheta \mathbf{a}_z)}{\cos \vartheta} \\ &= \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{a}_n - \tan \vartheta A_z \end{aligned} \quad (3.171)$$

より式 (3.166) は次のようになる。

$$\iint_S \nabla_t \cdot \mathbf{A}_t dS + \iint_S \frac{\partial A_z}{\partial z} dS = \oint_{\sigma} \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{a}_n d\sigma - \oint_{\sigma} \tan \vartheta A_z d\sigma \quad (3.172)$$

上式において、 $\mathbf{A}$  が  $\mathbf{a}_z$  (管軸方向) 成分をもたない場合、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z = A_z = 0$  より、

$$\iint_S \nabla_t \cdot \mathbf{A}_t dS = \oint_{\sigma} \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{a}_n d\sigma \quad (3.173)$$

これは、2次元のガウスの発散定理と一致する。

### 3.7.2 テーパ構造における面積分と周回積分の関係

一方、 $\mathbf{A}$  が  $\mathbf{a}_z$  (管軸方向) 成分  $A_z$  のみ ( $\mathbf{A}_t = 0$ ) の場合を考えると、

$$\iint_S \frac{\partial A_z}{\partial z} dS = - \oint_{\sigma} \tan \vartheta A_z d\sigma \quad (3.174)$$

導波管のモード関数  $\mathbf{e}_n$ ,  $\mathbf{e}_l$  の内積を  $A_z = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l$  とおくと,

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l) dS = - \oint_{\sigma} \tan \vartheta (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l) d\sigma \quad (3.175)$$

$$\therefore \iint_S \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l dS + \iint_S \mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial z} dS = - \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l d\sigma \quad (3.176)$$

$n = l$  のときは次のようになる.

$$2 \iint_S \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_n dS = - \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n d\sigma \quad (3.177)$$

### 3.8 伝送方程式のまとめ

伝送方程式は次のようになる.

$$\frac{dV_l^{\text{TM}}}{dz} = -Z_l^{\text{TM}} I_l^{\text{TM}} - \sum_n T_{V,ln}^{\text{TM:TM}} V_n^{\text{TM}} - \sum_n T_{V,ln}^{\text{TM:TE}} V_n^{\text{TE}} \quad (3.178)$$

$$\frac{dI_l^{\text{TM}}}{dz} = -Y V_l^{\text{TM}} - \sum_n T_{I,ln}^{\text{TM:TM}} I_n^{\text{TM}} \quad (3.179)$$

$$\frac{dV_l^{\text{TE}}}{dz} = -Z_l^{\text{TE}} I_l^{\text{TE}} - \sum_n T_{V,ln}^{\text{TE:TE}} V_n^{\text{TE}} \quad (3.180)$$

$$\frac{dI_l^{\text{TE}}}{dz} = -Y_l^{\text{TE}} V_l^{\text{TE}} - \sum_n T_{I,ln}^{\text{TE:TE}} I_n^{\text{TE}} - \sum_n T_{I,ln}^{\text{TE:TM}} I_n^{\text{TM}} \quad (3.181)$$

ここで,

$$Z \equiv j\omega\mu, \quad Y \equiv j\omega\epsilon \quad (3.182)$$

$$Z_l^{\text{TM}} \equiv -\frac{(\beta_l^{\text{TM}})^2}{j\omega\epsilon}, \quad Y_l^{\text{TE}} \equiv -\frac{(\beta_l^{\text{TE}})^2}{j\omega\mu} \quad (3.183)$$

$$T_{V,ln} \equiv \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l dS + \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l d\sigma \quad (3.184)$$

$$T_{I,ln} \equiv \iint \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{h}_l dS = \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l dS \quad (3.185)$$

曲線テーパ構造に対してガウスの発散定理を適用して求めた式

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l dS + \iint_S \mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial z} dS = - \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l d\sigma \quad (3.186)$$

より, 伝送方程式の係数  $T_{V,ln}$  は, 次のように変形できる.

$$T_{V,ln} = \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l dS + \oint_{\sigma} \tan \vartheta \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l d\sigma = - \iint \mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial z} dS \quad (3.187)$$

$n$  と  $l$  を入れ換えると,

$$T_{V,nl} = - \iint \mathbf{e}_l \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} dS = - \iint \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_l dS = -T_{I,ln} \quad (3.188)$$

さらに  $n$  と  $l$  を入れ換えて,

$$T_{V,ln} = - \iint \mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial z} dS = - \iint \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_n dS = -T_{I,nl} \quad (3.189)$$

### 3.9 円形テーパ導波管

導波管のモード関数は,

$$\mathbf{e}_n = \begin{cases} \mathbf{e}_n^{\text{TE}} = \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_n^{\text{TE}} & (\text{TE mode}) \\ \mathbf{e}_n^{\text{TM}} = -\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} & (\text{TM mode}) \end{cases} \quad (3.190)$$

$$\mathbf{h}_n = \begin{cases} \mathbf{h}_n^{\text{TE}} = -\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}} & (\text{TE mode}) \\ \mathbf{h}_n^{\text{TM}} = -\mathbf{a}_z \times \nabla_t \Psi_n^{\text{TM}} & (\text{TM mode}) \end{cases} \quad (3.191)$$

ただし, スカラ関数  $\Psi_n^{\text{TE}}$  および  $\Psi_n^{\text{TM}}$  は変数分離した  $z$  に依らないスカラー関数を示し, スカラヘルムホルツ方程式を満足する. ここでは, 半径  $a$  の円形導波管の場合を考え,  $\text{TE}_{Mn}$  モードのスカラ関数  $\Psi_n^{\text{TE}}$ , および  $\text{TM}_{Mn}$  モードのスカラ関数  $\Psi_n^{\text{TM}}$  は,

$$\Psi_n^{\text{TE}} = A_n^{\text{TE}} J_M(k_{c,n}^{\text{TE}} \rho) \Phi_M^{\text{TE}}(\phi), \quad k_{c,n}^{\text{TE}} = \frac{\chi'_n}{a}, \quad J'_M(\chi'_n) = 0 \quad (3.192)$$

$$\Psi_n^{\text{TM}} = A_n^{\text{TM}} J_M(k_{c,n}^{\text{TM}} \rho) \Phi_M^{\text{TM}}(\phi), \quad k_{c,n}^{\text{TM}} = \frac{\chi_n}{a}, \quad J_M(\chi_n) = 0 \quad (3.193)$$

ただし,  $\Phi_M^{\text{TE}}(\phi)$ ,  $\Phi_M^{\text{TM}}(\phi)$  は次式で表され, TE モードと TM モードは, 同じ正弦モード間, 同じ余弦モード間で結合する (両者をまとめて  $\Phi_M(\phi)$  とする).

$$\Phi_M^{\text{TE}}(\phi) = \begin{cases} \sin(M\phi) \\ \cos(M\phi) \end{cases}, \quad \Phi_M^{\text{TM}}(\phi) = \begin{cases} -\cos(M\phi) \\ \sin(M\phi) \end{cases} \quad (3.194)$$

#### 3.9.1 伝送方程式の係数 (TE-TE, TM-TM)

スカラ関数の微分について, TE, TM モードをまとめて  $k_{c,l} = \frac{\bar{\chi}_l}{a}$ ,  $k_{c,n} = \frac{\bar{\chi}_n}{a}$  とおき,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( A_n J_M(k_{c,n} \rho) \Phi_M(\phi) \right) \\ &= A_n \frac{dk_{c,n}}{dz} \rho J'_M(k_{c,n} \rho) \Phi_M(\phi) \\ &= A_n \left( -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} k_{c,n} \right) \rho J'_M(k_{c,n} \rho) \Phi_M(\phi) \end{aligned} \quad (3.195)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right|_{\rho=a} = -A_n \frac{da}{dz} k_{c,n} J'_M(\bar{\chi}_n) \Phi_M(\phi) \quad (3.196)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_l}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( A_l J_M(k_{c,l} \rho) \Phi_M(\phi) \right) \\ &= A_l k_{c,l} J'_M(k_{c,l} \rho) \Phi_M(\phi) \end{aligned} \quad (3.197)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Psi_l}{\partial n} \right|_{\rho=a} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( A_l J_M(k_{c,l} \rho) \Phi_M(\phi) \right) \\ &= A_l k_{c,l} J'_M(\bar{\chi}_l) \Phi_M(\phi) \end{aligned} \quad (3.198)$$



さらに,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ A_n \left( -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} k_{c,n} \right) \rho J'_M(k_{c,n} \rho) \Phi_M(\phi) \right\} \\ &= -A_n \frac{1}{a} \frac{da}{dz} k_{c,n} \left\{ J'_M(k_{c,n} \rho) + \rho k_{c,n} J''_M(k_{c,n} \rho) \right\} \Phi_M(\phi) \end{aligned} \quad (3.199)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) \right|_{\rho=a} = -A_n \frac{1}{a} \frac{da}{dz} k_{c,n} \left\{ J'_M(\bar{\chi}_n) + \bar{\chi}_n J''_M(\bar{\chi}_n) \right\} \Phi_M(\phi) \quad (3.200)$$

ここで,

$$J''_M(\bar{\chi}_n) = \left( \frac{M^2}{\bar{\chi}_n^2} - 1 \right) J_M(\bar{\chi}_n) - \frac{J'_M(\bar{\chi}_n)}{\bar{\chi}_n} \quad (3.201)$$

これより,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \right) \right|_{\rho=a} &= -A_n \frac{da}{dz} \frac{\bar{\chi}_n}{a^2} \frac{M^2 - \bar{\chi}_n^2}{\bar{\chi}_n} J_M(\bar{\chi}_n) \Phi_M(\phi) \\ &= -A_n \frac{da}{dz} \frac{M^2 - \bar{\chi}_n^2}{a^2} J_M(\bar{\chi}_n) \Phi_M(\phi) \end{aligned} \quad (3.202)$$

よって, 異なるモードの場合 ( $n \neq l$ ), TE モードのとき,

$$\begin{aligned} T_{I,ln}^{\text{TE-TE}} &= \frac{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2}{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2 - (k_{c,n}^{\text{TE}})^2} \oint_C \Psi_l^{\text{TE}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \right) d\sigma \\ &= \frac{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2}{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2 - (k_{c,n}^{\text{TE}})^2} A_l^{\text{TE}} J_M(\chi'_l) (-A_n^{\text{TE}}) \\ &\quad \cdot \frac{da}{dz} \frac{M^2 - \chi_n'^2}{a^2} J_M(\chi'_n) \int_0^{2\pi} (\Phi^{\text{TE}}(\phi))^2 a d\phi \\ &= A_l^{\text{TE}} A_n^{\text{TE}} \frac{1}{a} \frac{da}{dz} (\chi_n'^2 - M^2) \\ &= \frac{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2}{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2 - (k_{c,n}^{\text{TE}})^2} J_M(\chi'_l) J_M(\chi'_n) \frac{2\pi}{\epsilon_M} \end{aligned} \quad (3.203)$$

ここで, 絶対値をとらない  $\text{TE}_{Ml}$ ,  $\text{TE}_{Mn}$  モードの正規化係数  $A_l^{\text{TE}}$ ,  $A_n^{\text{TE}}$  より,

$$\begin{aligned} A_l^{\text{TE}} A_n^{\text{TE}} &= \sqrt{\frac{\epsilon_M}{\pi(\chi_l'^2 - M^2)}} \frac{1}{J_M(\chi'_l)} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_M}{\pi(\chi_n'^2 - M^2)}} \frac{1}{J_M(\chi'_n)} \\ &= \frac{\epsilon_M}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\chi_l'^2 - M^2}} \frac{1}{\sqrt{\chi_n'^2 - M^2}} \frac{1}{J_M(\chi'_l)} \frac{1}{J_M(\chi'_n)} \end{aligned} \quad (3.204)$$

よって,

$$\begin{aligned}
T_{I,ln}^{\text{TE-TE}} &= \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2(k_{c,l}^{\text{TE}})^2}{(k_{c,l}^{\text{TE}})^2 - (k_{c,n}^{\text{TE}})^2} \sqrt{\frac{\chi_n'^2 - M^2}{\chi_l'^2 - M^2}} \\
&= \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2\chi_l'^2}{\chi_l'^2 - \chi_n'^2} \sqrt{\frac{\chi_n'^2 - M^2}{\chi_l'^2 - M^2}} \\
&= -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2\chi_l'^2}{\chi_n'^2 - \chi_l'^2} \sqrt{\frac{\chi_n'^2 - M^2}{\chi_l'^2 - M^2}}
\end{aligned} \tag{3.205}$$

また, TM モードのとき,  $\Psi_l = 0$ ,  $\Psi_n = 0$  (on C) ゆえ,

$$\begin{aligned}
T_{I,ln}^{\text{TM-TM}} &= \frac{-(k_{c,n}^{\text{TM}})^2}{(k_{c,l}^{\text{TM}})^2 - (k_{c,n}^{\text{TM}})^2} \oint_C \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_l^{\text{TM}}}{\partial n} d\sigma \\
&= \frac{-(k_{c,n}^{\text{TM}})^2}{(k_{c,l}^{\text{TM}})^2 - (k_{c,n}^{\text{TM}})^2} (-A_n^{\text{TM}}) \\
&\quad \cdot \frac{da}{dz} k_{c,n}^{\text{TM}} J'_M(\bar{\chi}_n) A_l^{\text{TM}} k_{c,l}^{\text{TM}} J'_M(\bar{\chi}_l) \int_0^{2\pi} (\Phi^{\text{TE}}(\phi))^2 a d\phi \\
&= A_n^{\text{TM}} A_l^{\text{TM}} \frac{da}{dz} \frac{(k_{c,n}^{\text{TM}})^2}{(k_{c,l}^{\text{TM}})^2 - (k_{c,n}^{\text{TM}})^2} \frac{\chi_n \chi_l}{a^2} J'_M(\chi_n) J'_M(\chi_l) a \frac{2\pi}{\epsilon_M}
\end{aligned} \tag{3.206}$$

ここで, 絶対値をとらない  $\text{TM}_{Ml}$ ,  $\text{TM}_{Mn}$  モードの正規化係数  $A_l^{\text{TM}}$ ,  $A_n^{\text{TM}}$  より,

$$\begin{aligned}
A_l^{\text{TM}} A_n^{\text{TM}} &= \sqrt{\frac{\epsilon_M}{\pi}} \frac{1}{\chi_l J'_M(\chi_l)} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_M}{\pi}} \frac{1}{\chi_n J'_M(\chi_n)} \\
&= \frac{\epsilon_M}{\pi} \frac{1}{\chi_l \chi_n} \frac{1}{J'_M(\chi_l)} \frac{1}{J'_M(\chi_n)}
\end{aligned} \tag{3.207}$$

よって,

$$\begin{aligned}
T_{I,ln}^{\text{TM-TM}} &= \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2(k_{c,n}^{\text{TM}})^2}{(k_{c,l}^{\text{TM}})^2 - (k_{c,n}^{\text{TM}})^2} \\
&= \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2\chi_n^2}{\chi_l^2 - \chi_n^2} \\
&= -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2\chi_n^2}{\chi_n^2 - \chi_l^2}
\end{aligned} \tag{3.208}$$

同じモードの場合 ( $n = l$ ), 円形導波管モードを TE モードと TM モードをまとめて,

$$\Psi_n = A_n J_M(k_{c,n}\rho) \Phi_M(\phi) \tag{3.209}$$

とすると,

$$\nabla_t \Psi_n = A_n \left\{ \frac{\partial J_M(k_{c,n}\rho)}{\partial \rho} \Phi_M(\phi) \mathbf{a}_\rho + J_M(k_{c,n}\rho) \frac{\partial \Phi_M(\phi)}{\rho \partial \phi} \mathbf{a}_\phi \right\} \tag{3.210}$$

$$\begin{aligned}
& (\nabla_t \Psi_n) \cdot (\nabla_t \Psi_n) \\
&= A_n^2 \left\{ \left( \frac{\partial J_M(k_{c,n}\rho)}{\partial \rho} \Phi_M(\phi) \right)^2 + \left( J_M(k_{c,n}\rho) \frac{\partial \Phi_M(\phi)}{\rho \partial \phi} \right)^2 \right\} \\
&= A_n^2 \left\{ J_M^2(k_{c,n}\rho) k_{c,n}^2 \Phi_M^2(\phi) + J_M^2(k_{c,n}\rho) \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \Phi_M(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.211}$$

$$\begin{aligned}
& (\nabla_t \Psi_n) \cdot (\nabla_t \Psi_n) \Big|_{\rho=a} \\
&= A_n^2 \left\{ J_M^2(\chi_n) k_{c,n}^2 \Phi_M^2(\phi) + J_M^2(\chi_n) \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \Phi_M(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.212}$$

軸対称ゆえ、 $\vartheta$  を定数として  $\frac{da}{dz} = \tan \vartheta$ . よって、

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_n dS = -\frac{1}{2} \frac{da}{dz} \int_{\sigma} (\nabla_t \Psi_n) \cdot (\nabla_t \Psi_n) d\sigma \tag{3.213}$$

周回積分は、半径  $a$  の円形導波管の管壁に沿う積分経路ゆえ、

$$\begin{aligned}
& \int_{\sigma} (\nabla_t \Psi_n) \cdot (\nabla_t \Psi_n) d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} (\nabla_t \Psi_n) \cdot (\nabla_t \Psi_n) \rho \Big|_{\rho=a} d\phi \\
&= A_n^2 a \left\{ J_M^2(\chi_n) k_{c,n}^2 \int_0^{2\pi} \Phi_M^2(\phi) d\phi \right. \\
&\quad \left. + J_M^2(\chi_n) \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \Phi_M(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 d\phi \right\} \\
&= A_n^2 a \left\{ J_M^2(\chi_n) k_{c,n}^2 \frac{2\pi}{\epsilon_M} + J_M^2(\chi_n) \frac{1}{a^2} M^2 \frac{2\pi}{\epsilon_M} \right\} \\
&= A_n^2 \frac{2\pi}{\epsilon_M} \frac{1}{a} \left\{ \chi_n^2 J_M^2(\chi_n) + M^2 J_M^2(\chi_n) \right\}
\end{aligned} \tag{3.214}$$

ここで、

$$\int_0^{2\pi} \Phi_M^2(\phi) d\phi = \frac{2\pi}{\epsilon_M} \tag{3.215}$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \Phi_M(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 d\phi = M^2 \frac{2\pi}{\epsilon_M} \tag{3.216}$$

両者とも TE モードのとき,  $J'_M(\chi'_n) = 0$  より,

$$\begin{aligned}
\oint_{\sigma} (\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}}) \cdot (\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}}) d\sigma &= (A_n^{\text{TE}})^2 \frac{2\pi}{\epsilon_M} \frac{1}{a} \cdot M^2 J_M^2(\chi'_n) \\
&= \frac{\epsilon_M}{\pi (\chi_n'^2 - M^2)} \frac{1}{J_M^2(\chi'_n)} \frac{2\pi}{\epsilon_M} \frac{1}{a} \cdot M^2 J_M^2(\chi'_n) \\
&= \frac{1}{a} \frac{2M^2}{\chi_n'^2 - M^2}
\end{aligned} \tag{3.217}$$

よって,

$$\begin{aligned}
T_{I,nn}^{\text{TE-TE}} &= \iint_S \frac{\partial \mathbf{e}_n^{\text{TE}}}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TE}} dS \\
&= -\frac{1}{2} \frac{da}{dz} \oint_{\sigma} (\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}}) \cdot (\nabla_t \Psi_n^{\text{TE}}) d\sigma \\
&= -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{M^2}{\chi_n'^2 - M^2}
\end{aligned} \tag{3.218}$$

また, 両者とも TM モードのとき,  $J_M(\chi_n) = 0$  より,

$$\begin{aligned}
\oint_{\sigma} (\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) \cdot (\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) d\sigma &= (A_n^{\text{TM}})^2 \frac{2\pi}{\epsilon_M} \frac{1}{a} \cdot \chi_n^2 J_M'^2(\chi_n) \\
&= \frac{\epsilon_M}{\pi} \frac{1}{\chi_n^2 J_M'^2(\chi_n)} \frac{2\pi}{\epsilon_M} \frac{1}{a} \cdot \chi_n^2 J_M'^2(\chi_n) \\
&= \frac{2}{a}
\end{aligned} \tag{3.219}$$

よって,

$$\begin{aligned}
T_{I,nn}^{\text{TM-TM}} &= \iint_S \frac{\partial \mathbf{e}_n^{\text{TM}}}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} dS \\
&= -\frac{1}{2} \frac{da}{dz} \oint_{\sigma} (\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) \cdot (\nabla_t \Psi_n^{\text{TM}}) d\sigma \\
&= -\frac{1}{a} \frac{da}{dz}
\end{aligned} \tag{3.220}$$

比較のため, 面積分表示の式でも求め, 同様の結果が得られることを確認する. まず,  $a = a(z)$  として,

$$\frac{\partial k_{c,n}}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial k_{c,n}}{\partial a} = \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\chi_n}{a} \right) = -\frac{da}{dz} \frac{\chi_n}{a^2} = -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} k_{c,n} \tag{3.221}$$

$$2k_{c,n} \frac{\partial k_{c,n}}{\partial z} \iint_S \Psi_l \Psi_n dS = 2k_{c,n} \left( -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} k_{c,n} \right) \frac{\delta_{ln}}{k_{c,n}^2} = -\frac{2}{a} \frac{da}{dz} \delta_{ln} \tag{3.222}$$

$n = l$  のとき,

$$T_{I,nn}^{\text{TE-TE}} = (k_{c,n}^{\text{TE}})^2 \iint_S \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \Psi_n^{\text{TE}} dS \quad (3.223)$$

$$T_{I,nn}^{\text{TM-TM}} = (k_{c,n}^{\text{TM}})^2 \iint_S \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial z} \Psi_n^{\text{TM}} dS - \frac{2}{a} \frac{da}{dz} \quad (3.224)$$

ここで, 式 (3.209), 式 (3.195) を再記して,

$$\Psi_n = A_n J_M(k_{c,n} \rho) \Phi_M(\phi) \quad (3.225)$$

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial z} = A_n \left( -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} k_{c,n} \right) \rho J'_M(k_{c,n} \rho) \Phi_M(\phi) \quad (3.226)$$

面積分について, 両者をまとめると,

$$\iint_S \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} \Psi_n dS = -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} A_n^2 k_{c,n} \int_0^a J'_M(k_{c,n} \rho) J_M(k_{c,n} \rho) \rho^2 d\rho \cdot \frac{2\pi}{\epsilon_M} \quad (3.227)$$

ベッセル関数の積分については, まず,

$$\frac{d}{d\rho} \left\{ \rho^2 J_M^2(k_{c,n} \rho) \right\} = 2\rho J_M^2(k_{c,n} \rho) + \rho^2 \cdot 2J_M(k_{c,n} \rho) J'_M(k_{c,n} \rho) k_{c,n} \quad (3.228)$$

不定積分して,

$$\begin{aligned} & \int \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho^2 J_M^2(k_{c,n} \rho) \right\} d\rho \\ &= \rho^2 J_M^2(k_{c,n} \rho) \\ &= 2 \int \rho J_M^2(k_{c,n} \rho) d\rho + 2k_{c,n} \int \rho^2 J_M(k_{c,n} \rho) J'_M(k_{c,n} \rho) d\rho \end{aligned} \quad (3.229)$$

よって,

$$k_{c,n} \int \rho^2 J_M(k_{c,n} \rho) J'_M(k_{c,n} \rho) d\rho = \frac{1}{2} \rho^2 J_M^2(k_{c,n} \rho) - \int \rho J_M^2(k_{c,n} \rho) d\rho \quad (3.230)$$

右辺の第 2 項は不定積分公式

$$\int \rho J_M^2(k_{c,n} \rho) d\rho = \frac{1}{2} \left\{ \rho^2 J_M'^2(k_{c,n} \rho) + \left( \rho^2 - \frac{M^2}{k_{c,n}^2} \right) J_M^2(k_{c,n} \rho) \right\} \quad (3.231)$$

より,

$$\begin{aligned} & k_{c,n} \int \rho^2 J_M(k_{c,n} \rho) J'_M(k_{c,n} \rho) d\rho \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \rho^2 J_M'^2(k_{c,n} \rho) - \frac{M^2}{k_{c,n}^2} J_M^2(k_{c,n} \rho) \right\} \end{aligned} \quad (3.232)$$

よって、新たに次の不定積分公式が得られる.

$$\begin{aligned} & \int J_M(k_{c,n}\rho) J'_M(k_{c,n}\rho) \rho^2 d\rho \\ &= \frac{1}{2k_{c,n}^3} \left\{ - (k_{c,n}\rho)^2 J_M'^2(k_{c,n}\rho) + M^2 J_M^2(k_{c,n}\rho) \right\} \end{aligned} \quad (3.233)$$

半径  $a$  の円形導波管に対して定積分して,

$$\begin{aligned} & \int_0^a J_M(k_{c,n}\rho) J'_M(k_{c,n}\rho) \rho^2 d\rho \\ &= \frac{1}{2k_{c,n}^3} \left[ -\chi_n^2 J_M'^2(\chi_n) + M^2 \left\{ J_M^2(\chi_n) - J_M^2(0) \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.234)$$

両者とも  $\text{TE}_{Mn}$  モードのとき ( $M \neq 0$ ),

$$\int J_M(k_{c,n}^{\text{TE}}\rho) J'_M(k_{c,n}^{\text{TE}}\rho) \rho^2 d\rho = \frac{M^2}{2(k_{c,n}^{\text{TE}})^3} J_M^2(\chi_n') \quad (3.235)$$

また、両者とも  $\text{TM}_{Mn}$  モードのとき,

$$\begin{aligned} \int J_M(k_{c,n}^{\text{TM}}\rho) J'_M(k_{c,n}^{\text{TM}}\rho) \rho^2 d\rho &= -\frac{\chi_n^2}{2(k_{c,n}^{\text{TM}})^3} J_M'^2(\chi_n) \\ &= -\frac{a^2}{2k_{c,n}^{\text{TM}}} J_M'^2(\chi_n) \end{aligned} \quad (3.236)$$

よって,

$$\begin{aligned} T_{I,nn}^{\text{TE-TE}} &= (k_{c,n}^{\text{TE}})^2 \iint_S \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial z} \Psi_n^{\text{TE}} dS \\ &= (k_{c,n}^{\text{TE}})^2 \left( -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} (A_n^{\text{TE}})^2 k_{c,n}^{\text{TE}} \right) \frac{M^2}{2(k_{c,n}^{\text{TE}})^3} J_M^2(\chi_n') \frac{2\pi}{\epsilon_M} \\ &= -(A_n^{\text{TE}})^2 \frac{1}{a} \frac{da}{dz} M^2 J_M^2(\chi_n') \frac{\pi}{\epsilon_M} \\ &= -\frac{\epsilon_M}{\pi(\chi_n'^2 - M^2)} \frac{1}{J_M^2(\chi_n')} \frac{1}{a} \frac{da}{dz} M^2 J_M^2(\chi_n') \frac{\pi}{\epsilon_M} \\ &= -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{M^2}{\chi_n'^2 - M^2} \end{aligned} \quad (3.237)$$

線積分表示の式より求めた結果と一致する。また、

$$\begin{aligned}
T_{I,nn}^{\text{TM-TM}} &= (k_{c,n}^{\text{TM}})^2 \iint_S \frac{\partial \Psi_n^{\text{TM}}}{\partial z} \Psi_n^{\text{TM}} dS - \frac{2}{a} \frac{da}{dz} \\
&= (k_{c,n}^{\text{TM}})^2 \left( -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} (A_n^{\text{TM}})^2 k_{c,n}^{\text{TM}} \right) \left( -\frac{\chi_n^2}{2(k_{c,n}^{\text{TM}})^3} J_M'^2(\chi_n) \right) \frac{2\pi}{\epsilon_M} \\
&\quad - \frac{2}{a} \frac{da}{dz} \\
&= (A_n^{\text{TM}})^2 \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \chi_n^2 J_M'^2(\chi_n) \frac{\pi}{\epsilon_M} - \frac{2}{a} \frac{da}{dz} \\
&= \frac{\epsilon_M}{\pi} \frac{1}{\chi_n^2 J_M'^2(\chi_n)} \cdot \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \chi_n^2 J_M'^2(\chi_n) \frac{\pi}{\epsilon_M} - \frac{2}{a} \frac{da}{dz} \\
&= \frac{1}{a} \frac{da}{dz} - \frac{2}{a} \frac{da}{dz} \\
&= -\frac{1}{a} \frac{da}{dz}
\end{aligned} \tag{3.238}$$

これについても、線積分表示の式より求めた結果と一致する。

### 3.9.2 伝送方程式の係数 (TE-TM, TM-TE)

TM モードの電界モード関数の微分と TE モードの場合、先に示したように  $\mathbf{e}_l^{\text{TM}} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{e}_l^{\text{TM}}}{\partial z}$  とすると、 $\Psi_l^{\text{TM}} \rightarrow \frac{\partial \Psi_l^{\text{TM}}}{\partial z}$  より ( $J_M'(\chi_n') = 0$ ,  $J_M(\chi_l) = 0$ ),

$$\oint_C \frac{\partial \Psi_n^{\text{TE}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \Psi_l^{\text{TM}}}{\partial z} d\sigma = A_n^{\text{TE}} J_M(\chi_n') A_l^{\text{TM}} \frac{da}{dz} k_{c,l} J_M'(\chi_l) \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi_M^{\text{TE}}(\phi)}{ad\phi} \Phi_M^{\text{TM}}(\phi) ad\phi \tag{3.239}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\Phi_M^{\text{TE}}(\phi)}{d\phi} \Phi_M^{\text{TM}}(\phi) d\phi &= \int_0^{2\pi} M \frac{\cos(M\phi)}{-\sin(M\phi)} \frac{(-\cos(M\phi))}{\sin(M\phi)} d\phi \\
&= -\frac{2M\pi}{\epsilon_M}
\end{aligned} \tag{3.240}$$

TE<sub>Mn</sub> モードの正規化係数  $A_n^{\text{TE}}$ , TM<sub>Ml</sub> モードの正規化係数  $A_l^{\text{TM}}$

$$A_n^{\text{TE}} = \sqrt{\frac{\epsilon_M}{\pi(\chi_n'^2 - M^2)}} \frac{1}{J_M(\chi_n')} \tag{3.241}$$

$$A_l^{\text{TM}} = \sqrt{\frac{\epsilon_M}{\pi}} \frac{1}{\chi_l J_M'(\chi_l)} \tag{3.242}$$

より、

$$A_n^{\text{TE}} A_l^{\text{TM}} = \frac{\epsilon_M}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\chi_n'^2 - M^2}} \frac{1}{J_M(\chi_n')} \frac{1}{\chi_l J_M'(\chi_l)} \tag{3.243}$$

これより,

$$\begin{aligned}
-T_{V,ln}^{\text{TM-TE}} = T_{I,nl}^{\text{TE-TM}} &= \frac{\epsilon_M}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\chi_n'^2 - M^2}} \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \left( -\frac{2M\pi}{\epsilon_M} \right) \\
&= -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2M}{\sqrt{\chi_n'^2 - M^2}}
\end{aligned} \tag{3.244}$$

### 3.9.3 伝送方程式

以上をまとめると,

$$T_{I,nl}^{\text{TE-TM}} = -T_{V,ln}^{\text{TM-TE}} = -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2M}{\sqrt{\chi_n'^2 - M^2}} \tag{3.245}$$

$$T_{I,nn}^{\text{TE-TE}} = -T_{V,nn}^{\text{TE-TE}} = -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{M^2}{\chi_n'^2 - M^2} \tag{3.246}$$

$$T_{I,nn}^{\text{TM-TM}} = -T_{V,nn}^{\text{TM-TM}} = -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} \tag{3.247}$$

$$T_{I,ln}^{\text{TE-TE}} = -T_{V,nl}^{\text{TE-TE}} = -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2\chi_l'^2}{\chi_n'^2 - \chi_l'^2} \sqrt{\frac{\chi_n'^2 - M^2}{\chi_l'^2 - M^2}} \quad (n \neq l) \tag{3.248}$$

$$T_{I,ln}^{\text{TM-TM}} = -T_{V,nl}^{\text{TM-TM}} = -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2\chi_n^2}{\chi_n^2 - \chi_l^2} \quad (n \neq l) \tag{3.249}$$

$n$  と  $l$  を入れ換えて,

$$T_{I,ln}^{\text{TE-TM}} = -T_{V,nl}^{\text{TM-TE}} = -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2M}{\sqrt{\chi_l'^2 - M^2}} \tag{3.250}$$

$$T_{I,nl}^{\text{TE-TE}} = -T_{V,ln}^{\text{TE-TE}} = -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2\chi_n'^2}{\chi_l'^2 - \chi_n'^2} \sqrt{\frac{\chi_l'^2 - M^2}{\chi_n'^2 - M^2}} \quad (l \neq n) \tag{3.251}$$

$$T_{I,nl}^{\text{TM-TM}} = -T_{V,ln}^{\text{TM-TM}} = -\frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2\chi_l^2}{\chi_l^2 - \chi_n^2} \quad (l \neq n) \tag{3.252}$$



展開モード数を TE, TM について  $N_{\text{TE}}$ ,  $N_{\text{TM}}$  とすると,

$$\begin{aligned} \frac{dV_l^{\text{TM}}}{dz} &= -Z_l^{\text{TM}} I_l^{\text{TM}} - \sum_n^{N_{\text{TM}}} T_{V,ln}^{\text{TM-TM}} V_n^{\text{TM}} - \sum_n^{N_{\text{TE}}} T_{V,ln}^{\text{TM-TE}} V_n^{\text{TE}} \\ (l &= 1, 2, \dots, N_{\text{TM}}) \end{aligned} \quad (3.253)$$

$$\frac{dI_l^{\text{TM}}}{dz} = -Y_l^{\text{TM}} V_l^{\text{TM}} + \sum_n^{N_{\text{TM}}} T_{V,nl}^{\text{TM-TM}} I_n^{\text{TM}} \quad (l = 1, 2, \dots, N_{\text{TM}}) \quad (3.254)$$

$$\frac{dV_l^{\text{TE}}}{dz} = -Z_l^{\text{TE}} I_l^{\text{TE}} - \sum_n^{N_{\text{TE}}} T_{V,ln}^{\text{TE-TE}} V_n^{\text{TE}} \quad (l = 1, 2, \dots, N_{\text{TE}}) \quad (3.255)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_l^{\text{TE}}}{dz} &= -Y_l^{\text{TE}} V_l^{\text{TE}} + \sum_n^{N_{\text{TE}}} T_{V,nl}^{\text{TE-TE}} I_n^{\text{TE}} + T_{V,-l}^{\text{TM-TE}} \sum_n^{N_{\text{TM}}} I_n^{\text{TM}} \\ (l &= 1, 2, \dots, N_{\text{TE}}) \end{aligned} \quad (3.256)$$

ここで,

$$T_{V,ln}^{\text{TM-TM}} = \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2\chi_l^2}{\chi_l^2 - \chi_n^2} \quad (l \neq n) \quad (3.257)$$

$$T_{V,ll}^{\text{TM-TM}} = \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \quad (3.258)$$

$$T_{V,ln}^{\text{TM-TE}} = \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2M}{\sqrt{\chi_n'^2 - M^2}} \quad (3.259)$$

$$T_{V,nl}^{\text{TM-TM}} = \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2\chi_n^2}{\chi_n^2 - \chi_l^2} \quad (n \neq l) \quad (3.260)$$

$$T_{V,ln}^{\text{TE-TE}} = \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2\chi_n'^2}{\chi_l'^2 - \chi_n'^2} \sqrt{\frac{\chi_l'^2 - M^2}{\chi_n'^2 - M^2}} \quad (l \neq n) \quad (3.261)$$

$$T_{V,ll}^{\text{TE-TE}} = \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{M^2}{\chi_l'^2 - M^2} \quad (3.262)$$

$$T_{V,nl}^{\text{TE-TE}} = \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2\chi_l'^2}{\chi_n'^2 - \chi_l'^2} \sqrt{\frac{\chi_n'^2 - M^2}{\chi_l'^2 - M^2}} \quad (n \neq l) \quad (3.263)$$

$$T_{V,nl}^{\text{TM-TE}} = \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{2M}{\sqrt{\chi_l'^2 - M^2}} \equiv T_{V,-l}^{\text{TM-TE}} \quad (3.264)$$

## 3.10 モード電圧，電流と散乱パラメータ

### 3.10.1 多モード基本行列から散乱行列への変換

散乱行列を，基本行列  $[\mathbf{F}]$  の要素  $A, B, C, D$  を用いて表す式を導出しよう．ただし，入出力の2ポートは各々，多モードとする．まず，端子 1-1', 2-2' の基準インピーダンスを対角行列  $Z_{01}, Z_{02}$  とすると，列ベクトルのモード電圧  $V_1, V_2$  は，

$$V_1 = \sqrt{Z_{01}}(a_1 + b_1) \quad (3.265)$$

$$V_2 = \sqrt{Z_{02}}(a_2 + b_2) \quad (3.266)$$

また，モード電流  $I_1, I_2$  は， $+z$  方向を電流の正方向にとると，

$$I_1 = \sqrt{Y_{01}}(a_1 + b_1) \quad (3.267)$$

$$I_2 = -\sqrt{Y_{02}}(a_2 + b_2) \quad (3.268)$$

このとき，基本行列  $[\mathbf{F}]$  は，

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = [\mathbf{F}] \begin{pmatrix} V_2 \\ I_1 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (3.269)$$

ゆえ，基本行列  $[\mathbf{F}]$  の電圧の列ベクトル  $V_1, V_2$ ，電流の列ベクトル  $I_1, I_2$  を，入射波の波動振幅の列ベクトル  $a_1, a_2$ ，反射波の波動振幅の列ベクトル  $b_1, b_2$  によって表すと，

$$\begin{pmatrix} \sqrt{Z_{01}}(a_1 + b_1) \\ \sqrt{Y_{01}}(a_1 - b_1) \end{pmatrix} = [\mathbf{F}] \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{02}}(a_2 + b_2) \\ -\sqrt{Y_{02}}(a_2 - b_2) \end{pmatrix} \quad (3.270)$$

ただし， $Z_{01}, Z_{02}$  は，端子 1-1', 2-2' の基準インピーダンスを示す．

$$\begin{pmatrix} \sqrt{Z_{01}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{01}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 \end{pmatrix} = [\mathbf{F}] \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{02}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{02}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 + a_2 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \quad (3.271)$$

整理して，

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{Y_{01}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{01}} \end{pmatrix} [\mathbf{F}] \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{02}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{02}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 + a_2 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \quad (3.272)$$

ここで，

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{Y_{01}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{01}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{02}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{02}} \end{pmatrix} \quad (3.273)$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 + a_2 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}, \quad [\bar{\mathbf{F}}] = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} \quad (3.274)$$

すなわち,

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= \bar{A}(b_2 + a_2) + \bar{B}(b_2 - a_2) = (\bar{A} + \bar{B})b_2 + (\bar{A} - \bar{B})a_2 \\ a_1 - b_1 &= \bar{C}(b_2 + a_2) + \bar{D}(b_2 - a_2) = (\bar{C} + \bar{D})b_2 + (\bar{C} - \bar{D})a_2 \end{aligned} \quad (3.275)$$

列ベクトル  $b_1$  を消去するため, 両者の和より,

$$2a_1 = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})b_2 + (\bar{A} - \bar{B} + \bar{C} - \bar{D})a_2 \quad (3.276)$$

ここで,

$$\bar{\Delta}_F \equiv \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} \quad (3.277)$$

とにおいて,

$$\begin{aligned} b_2 &= \bar{\Delta}_F^{-1} \{2a_1 - (\bar{A} - \bar{B} + \bar{C} - \bar{D})a_2\} \\ &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned} \quad (3.278)$$

したがって, 散乱行列要素  $S_{11}$ ,  $S_{12}$  は,

$$S_{21} = 2\bar{\Delta}_F^{-1} \quad (3.279)$$

$$S_{22} = \bar{\Delta}_F^{-1} (\bar{A} + \bar{B} - \bar{C} - \bar{D}) \quad (3.280)$$

また, 列ベクトル  $b_2$  を消去するため,

$$\begin{aligned} (\bar{A} + \bar{B})^{-1}(a_1 + b_1) &= b_2 + (\bar{A} + \bar{B})^{-1}(\bar{A} - \bar{B})a_2 \\ (\bar{C} + \bar{D})^{-1}(a_1 - b_1) &= b_2 + (\bar{C} + \bar{D})^{-1}(\bar{C} - \bar{D})a_2 \end{aligned} \quad (3.281)$$

両者の差より,

$$\begin{aligned} &(\bar{A} + \bar{B})^{-1}(a_1 + b_1) - (\bar{C} + \bar{D})^{-1}(a_1 - b_1) \\ &= (\bar{A} + \bar{B})^{-1}(\bar{A} - \bar{B})a_2 - (\bar{C} + \bar{D})^{-1}(\bar{C} - \bar{D})a_2 \end{aligned} \quad (3.282)$$

整理して,

$$\begin{aligned} &\left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1} - (\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\}a_1 + \left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1} + (\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\}b_1 \\ &= \left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1}(\bar{A} - \bar{B}) - (\bar{C} + \bar{D})^{-1}(\bar{C} - \bar{D})\right\}a_2 \end{aligned} \quad (3.283)$$

よって,

$$\begin{aligned} b_1 &= -\left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1} + (\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\}^{-1} \left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1} - (\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\}a_1 \\ &\quad + \left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1} + (\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\}^{-1} \left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1}(\bar{A} - \bar{B}) - (\bar{C} + \bar{D})^{-1}(\bar{C} - \bar{D})\right\}a_2 \\ &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \end{aligned} \quad (3.284)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1} + (\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\}^{-1} &= (\bar{C} + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})^{-1}(\bar{A} + \bar{B}) \\ &= (\bar{C} + \bar{D})\bar{\Delta}_F^{-1}(\bar{A} + \bar{B})\end{aligned}\quad (3.285)$$

また,

$$(\bar{A} + \bar{B})^{-1} - (\bar{C} + \bar{D})^{-1} = (\bar{A} + \bar{B})^{-1}(-\bar{A} - \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})(\bar{C} + \bar{D})^{-1} \quad (3.286)$$

これより,

$$\begin{aligned}&\left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1} + (\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\}^{-1}\left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1} - (\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\} \\ &= (\bar{C} + \bar{D})\bar{\Delta}_F^{-1}(\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} + \bar{B})^{-1}(-\bar{A} - \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})(\bar{C} + \bar{D})^{-1} \\ &= (\bar{C} + \bar{D})\bar{\Delta}_F^{-1}(-\bar{A} - \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})(\bar{C} + \bar{D})^{-1} \\ &= (\bar{C} + \bar{D})\bar{\Delta}_F^{-1}\left\{1 - (\bar{A} + \bar{B})(\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\}\end{aligned}\quad (3.287)$$

また,

$$\begin{aligned}&\left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1} + (\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\}^{-1}\left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1}(\bar{A} - \bar{B}) - (\bar{C} + \bar{D})^{-1}(\bar{C} - \bar{D})\right\} \\ &= (\bar{C} + \bar{D})\bar{\Delta}_F^{-1}(\bar{A} + \bar{B})\left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1}(\bar{A} - \bar{B}) - (\bar{C} + \bar{D})^{-1}(\bar{C} - \bar{D})\right\} \\ &= (\bar{C} + \bar{D})\bar{\Delta}_F^{-1}\left\{(\bar{A} - \bar{B}) - (\bar{A} + \bar{B})(\bar{C} + \bar{D})^{-1}(\bar{C} - \bar{D})\right\}\end{aligned}\quad (3.288)$$

したがって, 散乱行列要素  $S_{11}$ ,  $S_{12}$  は,

$$\begin{aligned}S_{11} &= -\left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1} + (\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\}^{-1}\left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1} - (\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\} \\ &= -(\bar{C} + \bar{D})\bar{\Delta}_F^{-1}\left\{1 - (\bar{A} + \bar{B})(\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\}\end{aligned}\quad (3.289)$$

$$\begin{aligned}S_{12} &= \left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1} + (\bar{C} + \bar{D})^{-1}\right\}^{-1}\left\{(\bar{A} + \bar{B})^{-1}(\bar{A} - \bar{B}) - (\bar{C} + \bar{D})^{-1}(\bar{C} - \bar{D})\right\} \\ &= (\bar{C} + \bar{D})\bar{\Delta}_F^{-1}\left\{(\bar{A} - \bar{B}) - (\bar{A} + \bar{B})(\bar{C} + \bar{D})^{-1}(\bar{C} - \bar{D})\right\}\end{aligned}\quad (3.290)$$

なお, 相反定理より,  $AD - BC = 1$  ゆえ,

$$\begin{aligned}\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} &= \sqrt{Y_{01}Z_{02}}A\sqrt{Z_{01}Y_{02}}D - \sqrt{Y_{01}Y_{02}}B\sqrt{Z_{01}Z_{02}}C \\ &= AD - BC = 1\end{aligned}\quad (3.291)$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{Y_{01}Z_{02}}A & \sqrt{Y_{01}Y_{02}}B \\ \sqrt{Z_{01}Z_{02}}C & \sqrt{Z_{01}Y_{02}}D \end{pmatrix}\quad (3.292)$$

### 3.10.2 多モード基本行列の逆行列から散乱行列への変換

基本行列の逆行列の関係より,

$$[\mathbf{F}]^{-1} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{F}]^{-1} \equiv \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \quad (3.293)$$

入射波の波動振幅  $a_1$ ,  $a_2$ , 反射波の波動振幅  $b_1$ ,  $b_2$  によって表すと,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{Z_{02}}(a_2 + b_2) \\ -\sqrt{Y_{02}}(a_2 - b_2) \end{pmatrix} = [\mathbf{F}]^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{01}}(a_1 + b_1) \\ \sqrt{Y_{01}}(a_1 - b_1) \end{pmatrix} \quad (3.294)$$

ただし,  $Z_{01}$ ,  $Z_{02}$  は, 端子 1-1', 2-2' の基準インピーダンスを示す.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{Z_{02}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{02}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 + a_2 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = [\mathbf{F}]^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{01}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{01}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 \end{pmatrix} \quad (3.295)$$

整理して,

$$\begin{pmatrix} b_2 + a_2 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{Y_{02}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{02}} \end{pmatrix} [\mathbf{F}]^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{01}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{01}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 \end{pmatrix} \quad (3.296)$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} \bar{A}' & \bar{B}' \\ \bar{C}' & \bar{D}' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{Y_{02}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{02}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{01}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{01}} \end{pmatrix} \quad (3.297)$$

とおくと,

$$\begin{pmatrix} b_2 + a_2 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}' & \bar{B}' \\ \bar{C}' & \bar{D}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 \end{pmatrix} \quad (3.298)$$

すなわち,

$$\begin{aligned} b_2 + a_2 &= \bar{A}'(a_1 + b_1) + \bar{B}'(a_1 - b_1) = (\bar{A}' + \bar{B}')a_1 + (\bar{A}' - \bar{B}')b_1 \\ b_2 - a_2 &= \bar{C}'(a_1 + b_1) + \bar{D}'(a_1 - b_1) = (\bar{C}' + \bar{D}')a_1 + (\bar{C}' - \bar{D}')b_1 \end{aligned} \quad (3.299)$$

列ベクトル  $b_2$  を消去するため, 両者の差より,

$$2a_2 = (\bar{A}' + \bar{B}' - \bar{C}' - \bar{D}')a_1 + (\bar{A}' - \bar{B}' - \bar{C}' + \bar{D}')b_1 \quad (3.300)$$

ここで,

$$\bar{\Delta}'_F \equiv \bar{A}' - \bar{B}' - \bar{C}' + \bar{D}' \quad (3.301)$$

とおいて,

$$b_1 = (\bar{\Delta}'_F)^{-1} \{2a_2 - (\bar{A}' + \bar{B}' - \bar{C}' - \bar{D}')a_1\} \quad (3.302)$$

$$= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \quad (3.303)$$

したがって、散乱行列要素  $S_{11}$ ,  $S_{12}$  は、

$$S_{11} = (\bar{\Delta}'_F)^{-1} (-\bar{A}' - \bar{B}' + \bar{C}' + \bar{D}') \quad (3.304)$$

$$S_{12} = 2(\bar{\Delta}'_F)^{-1} \quad (3.305)$$

また、列ベクトル  $b_1$  を消去するため、

$$\begin{aligned} (\bar{A}' - \bar{B}')^{-1}(b_2 + a_2) &= (\bar{A}' - \bar{B}')^{-1}(\bar{A}' + \bar{B}')a_1 + b_1 \\ (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}(b_2 - a_2) &= (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}(\bar{C}' + \bar{D}')a_1 + b_1 \end{aligned} \quad (3.306)$$

両者の差より、

$$\begin{aligned} &(\bar{A}' - \bar{B}')^{-1}(b_2 + a_2) - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}(b_2 - a_2) \\ &= (\bar{A}' - \bar{B}')^{-1}(\bar{A}' + \bar{B}')a_1 - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}(\bar{C}' + \bar{D}')a_1 \end{aligned} \quad (3.307)$$

整理して、

$$\begin{aligned} &\left\{(\bar{A}' - \bar{B}')^{-1} - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}\right\}b_2 + \left\{(\bar{A}' - \bar{B}')^{-1} + (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}\right\}a_2 \\ &= \left\{(\bar{A}' - \bar{B}')^{-1}(\bar{A}' + \bar{B}') - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}(\bar{C}' + \bar{D}')\right\}a_1 \end{aligned} \quad (3.308)$$

よって、

$$\begin{aligned} b_2 &= \left\{(\bar{A}' - \bar{B}')^{-1} - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}\right\}^{-1} \left\{(\bar{A}' - \bar{B}')^{-1}(\bar{A}' + \bar{B}') - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}(\bar{C}' + \bar{D}')\right\}a_1 \\ &\quad - \left\{(\bar{A}' - \bar{B}')^{-1} + (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}\right\}^{-1} \left\{(\bar{A}' - \bar{B}')^{-1} + (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}\right\}a_2 \\ &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned} \quad (3.309)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \left\{(\bar{A}' - \bar{B}')^{-1} - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}\right\}^{-1} &= (\bar{C}' - \bar{D}')(-\bar{A}' + \bar{B}' + \bar{C}' - \bar{D}')^{-1}(\bar{A}' - \bar{B}') \\ &= -(\bar{C}' - \bar{D}')(\bar{\Delta}'_F)^{-1}(\bar{A}' - \bar{B}') \end{aligned} \quad (3.310)$$

また、

$$(\bar{A}' - \bar{B}')^{-1} + (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1} = (\bar{A}' - \bar{B}')^{-1}(\bar{A}' - \bar{B}' + \bar{C}' - \bar{D}')(\bar{C}' - \bar{D}')^{-1} \quad (3.311)$$

これより、

$$\begin{aligned} &\left\{(\bar{A}' - \bar{B}')^{-1} - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}\right\}^{-1} \left\{(\bar{A}' - \bar{B}')^{-1} + (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}\right\} \\ &= -(\bar{C}' - \bar{D}')(\bar{\Delta}'_F)^{-1}(\bar{A}' - \bar{B}')(\bar{A}' - \bar{B}')^{-1}(\bar{A}' - \bar{B}' + \bar{C}' - \bar{D}')(\bar{C}' - \bar{D}')^{-1} \\ &= -(\bar{C}' - \bar{D}')(\bar{\Delta}'_F)^{-1}(\bar{A}' - \bar{B}' + \bar{C}' - \bar{D}')(\bar{C}' - \bar{D}')^{-1} \\ &= -(\bar{C}' - \bar{D}')(\bar{\Delta}'_F)^{-1} \left\{1 + (\bar{A}' - \bar{B}')(\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}\right\} \end{aligned} \quad (3.312)$$

また,

$$\begin{aligned}
& \left\{ (\bar{A}' - \bar{B}')^{-1} - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1} \right\}^{-1} \left\{ (\bar{A}' - \bar{B}')^{-1}(\bar{A}' + \bar{B}') - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}(\bar{C}' + \bar{D}') \right\} \\
&= -(\bar{C}' - \bar{D}')(\bar{\Delta}'_F)^{-1}(\bar{A}' - \bar{B}') \left\{ (\bar{A}' - \bar{B}')^{-1}(\bar{A}' + \bar{B}') - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}(\bar{C}' + \bar{D}') \right\} \\
&= -(\bar{C}' - \bar{D}')(\bar{\Delta}'_F)^{-1} \left\{ (\bar{A}' + \bar{B}') - (\bar{A}' - \bar{B}')(\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}(\bar{C}' + \bar{D}') \right\} \quad (3.313)
\end{aligned}$$

したがって, 散乱行列要素  $S_{21}$ ,  $S_{22}$  は,

$$\begin{aligned}
S_{21} &= \left\{ (\bar{A}' - \bar{B}')^{-1} - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1} \right\}^{-1} \left\{ (\bar{A}' - \bar{B}')^{-1}(\bar{A}' + \bar{B}') - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}(\bar{C}' + \bar{D}') \right\} \\
&= -(\bar{C}' - \bar{D}')(\bar{\Delta}'_F)^{-1} \left\{ (\bar{A}' + \bar{B}') - (\bar{A}' - \bar{B}')(\bar{C}' - \bar{D}')^{-1}(\bar{C}' + \bar{D}') \right\} \quad (3.314)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{22} &= - \left\{ (\bar{A}' - \bar{B}')^{-1} - (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1} \right\}^{-1} \left\{ (\bar{A}' - \bar{B}')^{-1} + (\bar{C}' - \bar{D}')^{-1} \right\} \\
&= (\bar{C}' - \bar{D}')(\bar{\Delta}'_F)^{-1} \left\{ 1 + (\bar{A}' - \bar{B}')(\bar{C}' - \bar{D}')^{-1} \right\} \quad (3.315)
\end{aligned}$$

なお, 相反定理より,  $AD - BC = 1$  ゆえ,

$$\begin{aligned}
\bar{A}'\bar{D}' - \bar{B}'\bar{C}' &= \sqrt{Y_{02}Z_{01}}A\sqrt{Z_{02}Y_{01}}D - \sqrt{Y_{02}Y_{01}}B\sqrt{Z_{02}Z_{01}}C \\
&= AD - BC = 1 \quad (3.316)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} \bar{A}' & \bar{B}' \\ \bar{C}' & \bar{D}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{Y_{02}Z_{01}}A' & \sqrt{Y_{02}Y_{01}}B' \\ \sqrt{Z_{02}Z_{01}}C' & \sqrt{Z_{02}Y_{01}}D' \end{pmatrix} \quad (3.317)$$

いま,  $A' = D$ ,  $D' = A$ ,  $B' = -B$ ,  $C' = -C$  とおくと,

$$\bar{A}' = \sqrt{Y_{02}Z_{01}}A' = \sqrt{Z_{01}Y_{02}}D = \bar{D} \quad (3.318)$$

$$\bar{D}' = \sqrt{Z_{02}Y_{01}}D' = \sqrt{Y_{01}Z_{02}}A = \bar{A} \quad (3.319)$$

$$\bar{B}' = \sqrt{Y_{02}Y_{01}}B' = \sqrt{Y_{01}Y_{02}}(-B) = -\bar{B} \quad (3.320)$$

$$\bar{C}' = \sqrt{Z_{02}Z_{01}}C' = \sqrt{Z_{01}Z_{02}}(-C) = -\bar{C} \quad (3.321)$$

より, 前半で求めた結果と一致する.





# CHAPTER 4

## 円筒波展開

円筒座標系におけるヘルムホルツ方程式の解法と、それを用いた電磁界の導出について説明する。まず、ヘルムホルツ方程式を変数分離法によって解き、その一般解がベッセル関数と調和関数の積で表されることを示す。次に、この解を用いて、 $TM$ 波（磁界の $z$ 成分がゼロ）と $TE$ 波（電界の $z$ 成分がゼロ）それぞれの電界および磁界成分を円筒座標系で導出する。その際、ベッセル関数の微分関係式を活用して、各成分を具体的に求めていく。

### 4.1 円筒座標系におけるヘルムホルツ方程式

ベクトルポテンシャルを  $\psi \mathbf{a}_z$  とおくと、次のスカラーヘルムホルツ方程式が得られる。

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (4.1)$$

これを、円筒座標系  $(\rho, \phi, z)$  によって表せば、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (4.2)$$

いま、 $\psi$  を変数分離形によって

$$\psi = \mathcal{R}(\rho) \Phi(\phi) \mathcal{Z}(z) \quad (4.3)$$

とおき、スカラーヘルムホルツ方程式に代入すると、次のようになる。

$$\Phi \mathcal{Z} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\mathcal{R}}{d\rho} \right) + \mathcal{R} \mathcal{Z} \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \mathcal{R} \Phi \frac{d^2 \mathcal{Z}}{dz^2} + k^2 \mathcal{R} \Phi \mathcal{Z} = 0 \quad (4.4)$$

両辺を  $\psi = \mathcal{R} \Phi \mathcal{Z}$  で割って、

$$\frac{1}{\rho \mathcal{R}} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\mathcal{R}}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{d^2 \mathcal{Z}}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (4.5)$$

第3項は,  $\rho, \phi$  に対して独立, 他の項は  $z$  に対して独立であるから,

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{d^2 \mathcal{Z}}{dz^2} = -k_z^2 \quad (4.6)$$

とおける. これを代入して,

$$\frac{1}{\rho \mathcal{R}} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\mathcal{R}}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} - k_z^2 + k^2 = 0 \quad (4.7)$$

両辺に  $\rho^2$  を乗じて,

$$\frac{\rho}{\mathcal{R}} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\mathcal{R}}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + (k^2 - k_z^2) \rho^2 = 0 \quad (4.8)$$

第2項は  $\rho, z$  に対して独立, 他の項は  $\phi$  に対して独立であるから,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad (4.9)$$

とおける. これを代入すると,  $\rho$  のみの方程式が得られる.

$$\frac{\rho}{\mathcal{R}} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\mathcal{R}}{d\rho} \right) - m^2 + (k^2 - k_z^2) \rho^2 = 0 \quad (4.10)$$

両辺に  $\mathcal{R}$  を乗じて,

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\mathcal{R}}{d\rho} \right) + \{ (k^2 - k_z^2) \rho^2 - m^2 \} \mathcal{R} = 0 \quad (4.11)$$

いま,

$$k_\rho^2 \equiv k^2 - k_z^2 \quad (4.12)$$

とおくと, 次式を得る.

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\mathcal{R}}{d\rho} \right) + \{ (k_\rho \rho)^2 - m^2 \} \mathcal{R} = 0 \quad [\text{Bessel's equation of order } m] \quad (4.13)$$

また,

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad [\text{Harmonic equation}] \quad (4.14)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{Z}}{dz^2} + k_z^2 \mathcal{Z} = 0 \quad [\text{Harmonic equation}] \quad (4.15)$$

これらの方程式の解を各々求めれば  $\psi$  の一般解  $\psi_{k_\rho, m, k_z}$  (elementary wave function) が得られ, 次のようになる.

$$\psi_{k_\rho, m, k_z} = \mathcal{B}_m(k_\rho \rho) \mathcal{H}(m\phi) \mathcal{H}(k_z z) \quad (4.16)$$

ここで、 $\mathcal{B}_m(k_\rho\rho)$  は  $m$  次の（広義）ベッセル関数を示し、

$$\mathcal{B}_m(k_\rho\rho) \sim J_m(k_\rho\rho), N_m(k_\rho\rho), H_m^{(1)}(k_\rho\rho), H_m^{(2)}(k_\rho\rho) \quad (4.17)$$

ただし、 $J_m(k_\rho\rho)$  は第 1 種ベッセル関数、 $N_m(k_\rho\rho)$  は第 2 種ベッセル関数、 $H_m^{(1)}(k_\rho\rho)$  は第 1 種ハンケル関数、 $H_m^{(2)}(k_\rho\rho)$  は第 2 種ハンケル関数を示し、次のような関係がある。

$$H_m^{(1)}(k_\rho\rho) = J_m(k_\rho\rho) + iN_m(k_\rho\rho) \quad (4.18)$$

$$H_m^{(2)}(k_\rho\rho) = J_m(k_\rho\rho) - iN_m(k_\rho\rho) \quad (4.19)$$

また、 $\mathcal{H}(m\phi)$ 、 $\mathcal{H}(k_z z)$  は調和関数を示し、次のようになる。

$$\mathcal{H}(m\phi) \sim \cos m\phi, \sin m\phi, e^{jm\phi}, e^{-jm\phi} \quad (4.20)$$

$$\mathcal{H}(k_z z) \sim \cos k_z z, \sin k_z z, e^{jk_z z}, e^{-jk_z z} \quad (4.21)$$

#### 4.1.1 ベッセル関数

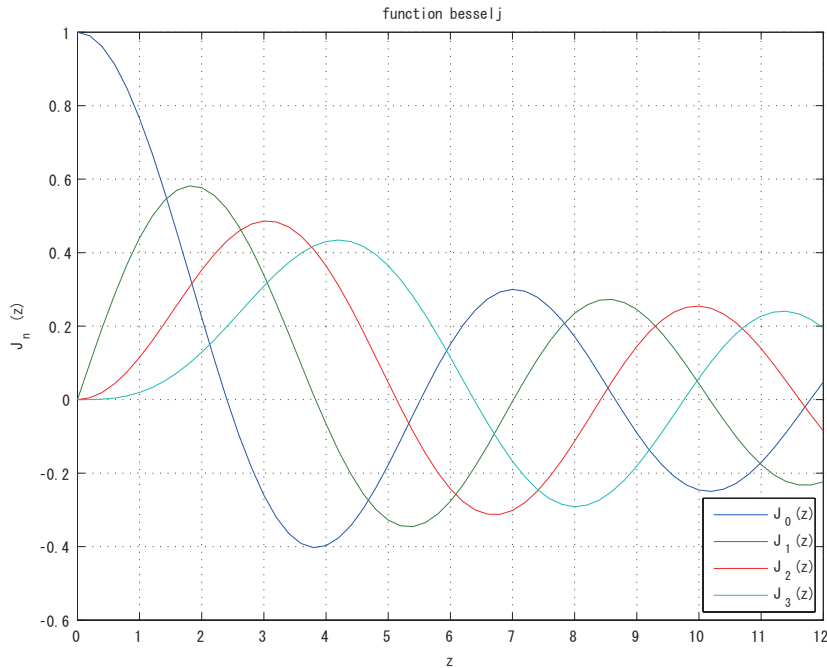


図 4.1. 第 1 種ベッセル関数  $J_0(z)$ ,  $J_1(z)$ ,  $J_2(z)$ ,  $J_3(z)$

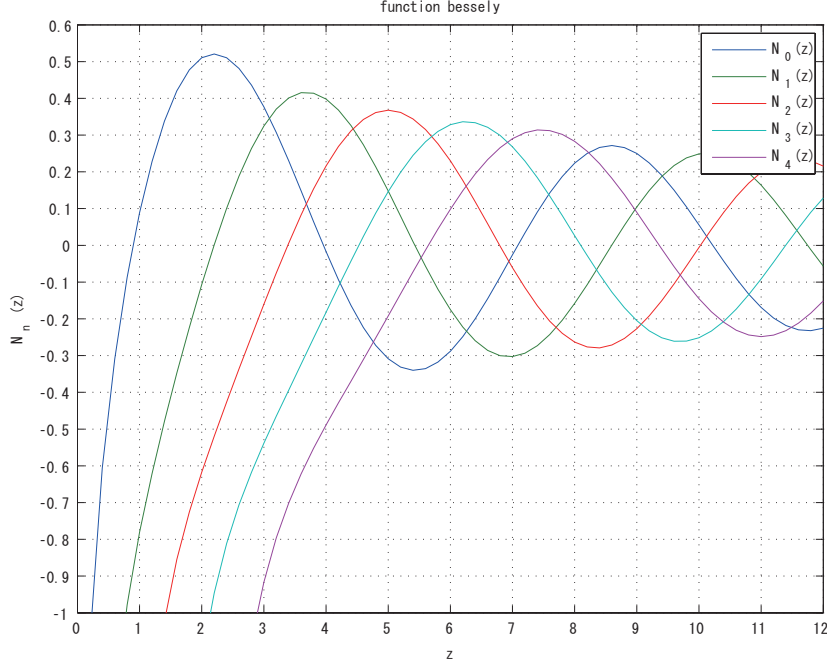


図 4.2. 第 2 種ベッセル関数  $N_0(z), N_1(z), N_2(z), N_3(z), N_4(z)$

#### 4.1.2 ヘルムホルツ方程式の解

先に示した  $\psi_{k_\rho, m, k_z}$  の線形結合もヘルムホルツ方程式を満たし、例えば、 $m, k_\rho$  が離散値となる場合、次のようになる。

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_m \sum_{k_\rho} C_{m, k_\rho} \psi_{k_\rho, m, k_z} \\ &= \sum_m \sum_{k_\rho} C_{m, k_\rho} \mathcal{B}_m(k_\rho \rho) \mathcal{H}(m\phi) \mathcal{H}(k_z z)\end{aligned}\quad (4.22)$$

ここで、

$$k^2 = k_\rho^2 + k_z^2 \quad (4.23)$$

ただし、係数  $C_{m, k_\rho}$  は境界条件によって決められる定数である。また、 $k_\rho$  が連続的な値をとる場合、積分形で表して、

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_m \int_{k_\rho} f_m(k_\rho) \psi_{k_\rho, m, k_z} dk_\rho \\ &= \sum_m \int_{k_\rho} f_m(k_\rho) \mathcal{B}_m(k_\rho \rho) \mathcal{H}(m\phi) \mathcal{H}(k_z z) dk_\rho\end{aligned}\quad (4.24)$$

ただし、 $f_m(k_\rho)$  は境界条件によって決定される。

## 4.2 ベクトルポテンシャルを用いた解析

TM (no  $H_z$ ) 波の電磁界  $\mathbf{H}^{\text{TM}}$ ,  $\mathbf{E}^{\text{TM}}$  は, ベクトルポテンシャルを  $\mathbf{A} = \psi \mathbf{a}_z$  とおいて求められ, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^{\text{TM}} &= \nabla \times \mathbf{A} \\
 &= \nabla \times (\psi \mathbf{a}_z) \\
 &= \nabla \psi \times \mathbf{a}_z + \psi \nabla \times \mathbf{a}_z \\
 &= \nabla \psi \times \mathbf{a}_z \\
 &= \left( \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times \mathbf{a}_z \\
 &= -\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{a}_\rho \\
 &\equiv H_\rho^{\text{TM}} \mathbf{a}_\rho + H_\phi^{\text{TM}} \mathbf{a}_\phi + H_z^{\text{TM}} \mathbf{a}_z
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^{\text{TM}} &= -j\omega\mu\mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\
 &= -j\omega\mu(\psi \mathbf{a}_z) + \frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla\{\nabla \cdot (\psi \mathbf{a}_z)\} \\
 &= -j\omega\mu(\psi \mathbf{a}_z) + \frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla(\mathbf{a}_z \cdot \nabla\psi) \\
 &= -j\omega\mu(\psi \mathbf{a}_z) + \frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla\frac{\partial \psi}{\partial z} \\
 &= -j\omega\mu(\psi \mathbf{a}_z) + \frac{1}{j\omega\epsilon}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial z} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \mathbf{a}_z\right) \\
 &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial z} \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \psi \mathbf{a}_z \\
 &\equiv E_\rho^{\text{TM}} \mathbf{a}_\rho + E_\phi^{\text{TM}} \mathbf{a}_\phi + E_z^{\text{TM}} \mathbf{a}_z
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

これより、TM 波の電磁界  $\mathbf{E}^{\text{TM}}$ ,  $\mathbf{H}^{\text{TM}}$  の円筒座標系の各成分は、

$$E_\rho^{\text{TM}} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} \quad (4.27)$$

$$E_\phi^{\text{TM}} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial z} \quad (4.28)$$

$$E_z^{\text{TM}} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi \quad (4.29)$$

$$H_\rho^{\text{TM}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (4.30)$$

$$H_\phi^{\text{TM}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \quad (4.31)$$

$$H_z^{\text{TM}} = 0 \quad (4.32)$$

同様に、TE (no  $E_z$ ) 波の電磁界  $\mathbf{E}^{\text{TE}}$ ,  $\mathbf{H}^{\text{TE}}$  は電氣的ベクトルポテンシャル ( $\mathbf{E}^{\text{TE}} = -\nabla \times \mathbf{F}$ ) を  $\mathbf{F} = \psi \mathbf{a}_z$  とおいて得られ、各成分は (導出省略)、

$$E_\rho^{\text{TE}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (4.33)$$

$$E_\phi^{\text{TE}} = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \quad (4.34)$$

$$E_z^{\text{TE}} = 0 \quad (4.35)$$

$$H_\rho^{\text{TE}} = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} \quad (4.36)$$

$$H_\phi^{\text{TE}} = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial z} \quad (4.37)$$

$$H_z^{\text{TE}} = \frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi \quad (4.38)$$

これらの方程式の解を各々求めれば  $\psi$  の一般解  $\psi_{k_\rho, m, k_z}$  (elementary wave functions) が得られ、次のようになる。

$$\psi_{\gamma, m, h}(\rho, \phi, z) = J_m(\gamma\rho) \frac{\sin}{\cos} m\phi \cdot e^{-jh z} \quad \rho = 0 \text{ included} \quad (4.39)$$

ここで、

$$k^2 = h^2 + \gamma^2 \quad (4.40)$$

ただし、 $h(m\phi)$  は  $\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi)$  を満たす周期関数であるから、 $m$  は整数となる。そして、次式が得られる。

$$\frac{\partial \psi_{\gamma, m, h}}{\partial z} = -jh \psi_{\gamma, m, h} \quad (4.41)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi_{\gamma, m, h} = (-h^2 + k^2) \psi_{\gamma, m, h} = \gamma^2 \psi_{\gamma, m, h} \quad (4.42)$$

### 4.3 TE 波

TE 波の電界の  $z$  成分は  $E_z^{\text{TE}} = 0$ , 磁界の  $z$  成分  $H_z^{\text{TE}}$  は,

$$\begin{aligned}
 H_z^{\text{TE}} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TE}}(\gamma) \frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi_{\gamma,m,h} d\gamma \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TE}}(\gamma) \frac{\gamma^2}{j\omega\mu} \psi_{\gamma,m,h} d\gamma
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

ただし,  $f_m^{\text{TE}}(\gamma)$  は TE 波の円筒波スペクトラムを示す. また,  $z$  軸に直交する横断面内電界成分は,

$$E_{\rho}^{\text{TE}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TE}}(\gamma) \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \phi} \right) d\gamma \tag{4.44}$$

$$E_{\phi}^{\text{TE}} = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TE}}(\gamma) \frac{\partial \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \rho} d\gamma \tag{4.45}$$

TE 波の横断面内磁界成分は,

$$\begin{aligned}
 H_{\rho}^{\text{TE}} &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TE}}(\gamma) \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \rho \partial z} d\gamma \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TE}}(\gamma) \frac{-jh}{j\omega\mu} \frac{\partial \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \rho} d\gamma \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TE}}(\gamma) Y^{\text{TE}} \left( -\frac{\partial \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \rho} \right) d\gamma
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
 H_{\phi}^{\text{TE}} &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial z} \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TE}}(\gamma) \frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \phi \partial z} d\gamma \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TE}}(\gamma) \frac{-jh}{j\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \phi} d\gamma \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TE}}(\gamma) Y^{\text{TE}} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \phi} \right) d\gamma
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

ここで,

$$Y^{\text{TE}} \equiv \frac{h}{\omega\mu} = \frac{k}{\omega\mu} \cdot \frac{h}{k} = Y_w \frac{h}{k} \left( \equiv \frac{1}{Z^{\text{TE}}} \right) \quad (4.48)$$

$$Y_w = \frac{k}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{1}{Z_w} \quad (4.49)$$

ベッセル関数の関係式

$$\frac{dJ_m(\gamma\rho)}{d\rho} = \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \quad (4.50)$$

$$J_m(\gamma\rho) = \frac{\gamma\rho}{2m} \{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \quad (4.51)$$

を用いて微分等を行うと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_{\gamma,m,h}}{\partial\rho} &= \frac{\partial J_m(\gamma\rho)}{\partial\rho} \cdot \frac{\sin}{\cos} m\phi \cdot e^{-jhz} \\ &= \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \cdot \frac{\sin}{\cos} m\phi \cdot e^{-jhz} \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi_{\gamma,m,h}}{\partial\phi} &= \frac{1}{\rho} J_m(\gamma\rho) \cdot m \frac{\cos}{-\sin} m\phi \cdot e^{-jhz} \\ &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\gamma\rho}{2m} \{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \right] m \frac{\cos}{-\sin} m\phi \cdot e^{-jhz} \\ &= \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \cdot \frac{\cos}{-\sin} m\phi \cdot e^{-jhz} \end{aligned} \quad (4.53)$$



これより，TE (no  $E_z$ ) 波の各成分は，

$$E_\rho^{\text{TE}} = \mp \sum_m \int_\gamma f_m^{\text{TE}}(\gamma) \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \cdot \frac{\cos}{\sin} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.54)$$

$$E_\phi^{\text{TE}} = \pm \sum_m \int_\gamma f_m^{\text{TE}}(\gamma) \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \cdot \frac{\sin}{-\cos} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.55)$$

$$H_\rho^{\text{TE}} = \mp Y_w \sum_m \int_\gamma f_m^{\text{TE}}(\gamma) \frac{h}{k} \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \cdot \frac{\sin}{-\cos} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.56)$$

$$H_\phi^{\text{TE}} = \mp Y_w \sum_m \int_\gamma f_m^{\text{TE}}(\gamma) \frac{h}{k} \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \cdot \frac{\cos}{\sin} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.57)$$

$$H_z^{\text{TE}} = \pm \frac{1}{j\omega\mu} \sum_m \int_\gamma f_m^{\text{TE}}(\gamma) \gamma^2 J_m(\gamma\rho) \cdot \frac{\sin}{-\cos} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.58)$$

ここで，

$$\begin{aligned} \cos\left(m\phi - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos m\phi \cos \frac{\pi}{2} + \sin m\phi \sin \frac{\pi}{2} \\ &= \sin m\phi \end{aligned} \quad (4.59)$$

より，

$$\cos(m\phi + \alpha_m) \equiv \frac{\cos}{\sin} m\phi \quad \begin{matrix} (\alpha_m = 0) \\ (\alpha_m = -\pi/2) \end{matrix} \quad (4.60)$$

ここで，

$$\bar{f}_m^{\text{TE}} \equiv \mp \frac{1}{k} f_m^{\text{TE}} \quad (4.61)$$

とおく．また，

$$\begin{aligned} \sin\left(m\phi - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin m\phi \cos \frac{\pi}{2} + \cos m\phi \sin \frac{\pi}{2} \\ &= -\cos m\phi \end{aligned} \quad (4.62)$$

ゆえ，

$$\sin(m\phi + \alpha_m) = \frac{\sin}{-\cos} m\phi \quad \begin{matrix} (\alpha_m = 0) \\ (\alpha_m = -\pi/2) \end{matrix} \quad (4.63)$$

また,

$$Y_w f_m^{\text{TE}} \frac{h}{k} = \mp Y_w \bar{f}_m^{\text{TE}} h \quad (4.64)$$

これより,

$$\begin{aligned} E_\rho^{\text{TE}} &= \sum_m \int_\gamma \bar{f}_m^{\text{TE}}(\gamma) k \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\ &\quad \cdot \cos(m\phi + \alpha_m) e^{-jhz} d\gamma \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} E_\phi^{\text{TE}} &= - \sum_m \int_\gamma \bar{f}_m^{\text{TE}}(\gamma) k \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\ &\quad \cdot \sin(m\phi + \alpha_m) e^{-jhz} d\gamma \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} H_\rho^{\text{TE}} &= Y_w \sum_m \int_\gamma \bar{f}_m^{\text{TE}}(\gamma) h \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\ &\quad \cdot \sin(m\phi + \alpha_m) e^{-jhz} d\gamma \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} H_\phi^{\text{TE}} &= Y_w \sum_m \int_\gamma \bar{f}_m^{\text{TE}}(\gamma) h \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\ &\quad \cdot \cos(m\phi + \alpha_m) e^{-jhz} d\gamma \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$H_z^{\text{TE}} = jY_w \sum_m \int_\gamma \bar{f}_m^{\text{TE}}(\gamma) \gamma^2 J_m(\gamma\rho) \sin(m\phi + \alpha_m) e^{-jhz} d\gamma \quad (4.69)$$

## 4.4 TM 波

TM 波の磁界の  $z$  成分は  $H_z^{\text{TM}} = 0$ , 電界の  $z$  成分  $E_z^{\text{TM}}$  は,

$$\begin{aligned}
 E_z^{\text{TM}} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{1}{j\omega\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi_{\gamma,m,h} d\gamma \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{\gamma^2}{j\omega\epsilon} \psi_{\gamma,m,h} d\gamma
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

ただし,  $f_m^{\text{TM}}(\gamma)$  は TM 波の円筒波スペクトラムを示す. また,  $z$  軸に直交する横断面内磁界成分は,

$$H_{\rho}^{\text{TM}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \phi} d\gamma \tag{4.71}$$

$$H_{\phi}^{\text{TM}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) \left( -\frac{\partial \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \rho} \right) d\gamma \tag{4.72}$$

TM 波の横断面内電界成分は,

$$\begin{aligned}
 E_{\rho}^{\text{TM}} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial^2 \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \rho \partial z} d\gamma \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{-jh}{j\omega\epsilon} \frac{\partial \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \rho} d\gamma \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) Z^{\text{TM}} \left( -\frac{\partial \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \rho} \right) d\gamma
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}
 E_{\phi}^{\text{TM}} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial z} \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \phi \partial z} d\gamma \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{-jh}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \phi} d\gamma \\
 &= \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) Z^{\text{TM}} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_{\gamma,m,h}}{\partial \phi} \right) d\gamma
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

ここで,

$$Z^{\text{TM}} \equiv \frac{h}{\omega\epsilon} = \frac{k}{\omega\epsilon} \cdot \frac{h}{k} = Z_w \frac{h}{k} \left( \equiv \frac{1}{Y^{\text{TM}}} \right) \quad (4.75)$$

$$Z_w = \frac{k}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{1}{Y_w} \quad (4.76)$$

これより, TM (no  $H_z$ ) 波の各成分は,

$$E_\rho^{\text{TM}} = -Z_w \sum_m \int_\gamma f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{h}{k} \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\ \cdot \frac{\sin}{\cos} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.77)$$

$$E_\phi^{\text{TM}} = -Z_w \sum_m \int_\gamma f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{h}{k} \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\ \cdot \frac{\cos}{-\sin} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.78)$$

$$E_z^{\text{TM}} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_m \int_\gamma f_m^{\text{TM}}(\gamma) \gamma^2 J_m(\gamma\rho) \frac{\sin}{\cos} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.79)$$

$$H_\rho^{\text{TM}} = \sum_m \int_\gamma f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\ \cdot \frac{\cos}{-\sin} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.80)$$

$$H_\phi^{\text{TM}} = - \sum_m \int_\gamma f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\ \cdot \frac{\sin}{\cos} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.81)$$

上側と下側を入れ換えて,

$$E_{\rho}^{\text{TM}} = -Z_w \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{h}{k} \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \cdot \frac{\cos}{\sin} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.82)$$

$$E_{\phi}^{\text{TM}} = -Z_w \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{h}{k} \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \cdot \frac{-\sin}{\cos} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.83)$$

$$E_z^{\text{TM}} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) \gamma^2 J_m(\gamma\rho) \frac{\cos}{\sin} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.84)$$

$$H_{\rho}^{\text{TM}} = \sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \cdot \frac{-\sin}{\cos} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.85)$$

$$H_{\phi}^{\text{TM}} = -\sum_m \int_{\gamma} f_m^{\text{TM}}(\gamma) \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \cdot \frac{\cos}{\sin} m\phi \cdot e^{-jhz} d\gamma \quad (4.86)$$

また,

$$\cos(m\phi + \alpha_m) \equiv \frac{\cos}{\sin} m\phi \quad \begin{matrix} (\alpha_m = 0) \\ (\alpha_m = -\pi/2) \end{matrix} \quad (4.87)$$

$$\bar{f}_m^{\text{TM}} \equiv \frac{Z_w}{k} f_m^{\text{TM}} \quad (4.88)$$

とおくと,

$$-\sin(m\phi + \alpha_m) = \frac{-\sin}{\cos} m\phi \quad \begin{matrix} (\alpha_m = 0) \\ (\alpha_m = -\pi/2) \end{matrix} \quad (4.89)$$

$$f_m^{\text{TM}} = \frac{k}{Z_w} \bar{f}_m^{\text{TM}} = Y_w \bar{f}_m^{\text{TM}} k \quad (4.90)$$

これより,

$$E_\rho^{\text{TM}} = -\sum_m \int_\gamma \bar{f}_m^{\text{TM}}(\gamma) h \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\ \cdot \cos(m\phi + \alpha_m) e^{-jhz} d\gamma \quad (4.91)$$

$$E_\phi^{\text{TM}} = \sum_m \int_\gamma \bar{f}_m^{\text{TM}}(\gamma) h \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\ \cdot \sin(m\phi + \alpha_m) e^{-jhz} d\gamma \quad (4.92)$$

$$E_z^{\text{TM}} = -j \sum_m \int_\gamma \bar{f}_m^{\text{TM}}(\gamma) \gamma^2 J_m(\gamma\rho) \cos(m\phi + \alpha_m) e^{-jhz} d\gamma \quad (4.93)$$

$$H_\rho^{\text{TM}} = -Y_w \sum_m \int_\gamma \bar{f}_m^{\text{TM}}(\gamma) k \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\ \cdot \sin(m\phi + \alpha_m) e^{-jhz} d\gamma \quad (4.94)$$

$$H_\phi^{\text{TM}} = -Y_w \sum_m \int_\gamma \bar{f}_m^{\text{TM}}(\gamma) k \frac{\gamma}{2} \{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\ \cdot \cos(m\phi + \alpha_m) e^{-jhz} d\gamma \quad (4.95)$$

# CHAPTER 5

## ビームモード展開法

ビームモードによって電磁界を展開し、アンテナの設計・解析に応用する方法について説明する。まず、任意の電磁界が  $TE$  波と  $TM$  波の合成として表現できることを示し、それらの成分を円筒波スペクトラムとラゲルの多項式で展開する基礎理論を詳細に解説する。さらに、平面波面の近似を行い、波面の曲率半径やビーム半径といったビームモードの重要なパラメータがどのように定義され、計算されるかを示す。そして、これらの理論をホーンアンテナの設計に応用し、軸長最小化や位相中心の決定など、実践的な設計例を通じてその有用性を示していく。

### 5.1 $TE$ 波と $TM$ 波の合成

---

任意の電磁界は、 $TE$  波と  $TM$  波の合成によって表すことができるので、まず、電界を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{TE} + \mathbf{E}^{TM} \\ &= (E_{\rho}^{TE} \mathbf{a}_{\rho} + E_{\phi}^{TE} \mathbf{a}_{\phi}) + (E_{\rho}^{TM} \mathbf{a}_{\rho} + E_{\phi}^{TM} \mathbf{a}_{\phi} + E_z^{TM} \mathbf{a}_z) \\ &= (E_{\rho}^{TE} + E_{\rho}^{TM}) \mathbf{a}_{\rho} + (E_{\phi}^{TE} + E_{\phi}^{TM}) \mathbf{a}_{\phi} + E_z^{TM} \mathbf{a}_z \\ &= E_{\rho} \mathbf{a}_{\rho} + E_{\phi} \mathbf{a}_{\phi} + E_z \mathbf{a}_z \end{aligned} \tag{5.1}$$

同様にして、磁界は

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}^{TE} + \mathbf{H}^{TM} \\ &= (H_{\rho}^{TE} \mathbf{a}_{\rho} + H_{\phi}^{TE} \mathbf{a}_{\phi} + H_z^{TE} \mathbf{a}_z) + (H_{\rho}^{TM} \mathbf{a}_{\rho} + H_{\phi}^{TM} \mathbf{a}_{\phi}) \\ &= (H_{\rho}^{TE} + H_{\rho}^{TM}) \mathbf{a}_{\rho} + (H_{\phi}^{TE} + H_{\phi}^{TM}) \mathbf{a}_{\phi} + H_z^{TE} \mathbf{a}_z \\ &= H_{\rho} \mathbf{a}_{\rho} + H_{\phi} \mathbf{a}_{\phi} + H_z \mathbf{a}_z \end{aligned} \tag{5.2}$$

これより、電界の  $\rho$  方向に沿う成分  $E_\rho$ 、および  $\phi$  方向に沿う成分  $E_\phi$  は、次のようになる。

$$\begin{aligned} E_\rho &= E_\rho^{\text{TE}} + E_\rho^{\text{TM}} \\ &= \sum_m \left\{ \int_\gamma \frac{\gamma}{2} \left( \bar{f}_m^{\text{TE}}(\gamma) R_{E\rho}^{\text{TE}} + \bar{f}_m^{\text{TM}}(\gamma) R_{E\rho}^{\text{TM}} \right) e^{-jhz} d\gamma \right\} \\ &\quad \cdot \cos(m\phi + \alpha_m) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} E_\phi &= E_\phi^{\text{TE}} + E_\phi^{\text{TM}} \\ &= \sum_m \left\{ \int_\gamma \frac{\gamma}{2} \left( \bar{f}_m^{\text{TE}}(\gamma) R_{E\phi}^{\text{TE}} + \bar{f}_m^{\text{TM}}(\gamma) R_{E\phi}^{\text{TM}} \right) e^{-jhz} d\gamma \right\} \\ &\quad \cdot \sin(m\phi + \alpha_m) \end{aligned} \quad (5.4)$$

ここで、

$$R_{E\rho}^{\{\text{TE}\}} \equiv \pm \left\{ \begin{matrix} k \\ h \end{matrix} \right\} \{ J_{m-1}(\gamma\rho) \pm J_{m+1}(\gamma\rho) \} \quad (5.5)$$

$$R_{E\phi}^{\{\text{TE}\}} \equiv \mp \left\{ \begin{matrix} k \\ h \end{matrix} \right\} \{ J_{m-1}(\gamma\rho) \mp J_{m+1}(\gamma\rho) \} \quad (5.6)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} &\bar{f}_m^{\text{TE}} R_{E\{\rho\}}^{\text{TE}} + \bar{f}_m^{\text{TM}} R_{E\{\phi\}}^{\text{TM}} \\ &\equiv f_m^{(+)} \left( R_{E\{\rho\}}^{\text{TE}} + R_{E\{\phi\}}^{\text{TM}} \right) + f_m^{(-)} \left( R_{E\{\rho\}}^{\text{TE}} - R_{E\{\phi\}}^{\text{TM}} \right) \\ &\equiv f_m^{(+)} R_{E\{\rho\}}^{(+)} + f_m^{(-)} R_{E\{\phi\}}^{(-)} \\ &= \left( f_m^{(+)} + f_m^{(-)} \right) R_{E\{\rho\}}^{\text{TE}} + \left( f_m^{(+)} - f_m^{(-)} \right) R_{E\{\phi\}}^{\text{TM}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

ただし、 $\bar{f}_m^{\text{TE}}$ 、 $\bar{f}_m^{\text{TM}}$  は、TE 波、TM 波の円筒波スペクトラムを示し、新たに、スペクトラム  $f_m^{(+)}$ 、 $f_m^{(-)}$  を定義している。

$$\bar{f}_m^{\text{TE}} = f_m^{(+)} + f_m^{(-)} \quad (5.8)$$

$$\bar{f}_m^{\text{TM}} = f_m^{(+)} - f_m^{(-)} \quad (5.9)$$

よって、

$$f_m^{(+)} = \bar{f}_m^{\text{TE}} + \bar{f}_m^{\text{TM}} \quad (5.10)$$

$$f_m^{(-)} = \bar{f}_m^{\text{TE}} - \bar{f}_m^{\text{TM}} \quad (5.11)$$

ここで、

$$R_{E\{\rho\}}^{(+)} = R_{E\{\rho\}}^{\text{TE}} + R_{E\{\phi\}}^{\text{TM}} \quad (5.12)$$

$$R_{E\{\phi\}}^{(-)} = R_{E\{\rho\}}^{\text{TE}} - R_{E\{\phi\}}^{\text{TM}} \quad (5.13)$$



これより,

$$\begin{aligned}
R_{E\rho}^{(+)} &= R_{E\rho}^{\text{TE}} + R_{E\rho}^{\text{TM}} \\
&= k\{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} - h\{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\
&= (k+h)J_{m+1}(\gamma\rho) + (k-h)J_{m-1}(\gamma\rho)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
R_{E\rho}^{(-)} &= R_{E\rho}^{\text{TE}} - R_{E\rho}^{\text{TM}} \\
&= k\{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} + h\{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\
&= (k-h)J_{m+1}(\gamma\rho) + (k+h)J_{m-1}(\gamma\rho)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
R_{E\phi}^{(+)} &= R_{E\phi}^{\text{TE}} + R_{E\phi}^{\text{TM}} \\
&= -k\{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} + h\{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\
&= (k+h)J_{m+1}(\gamma\rho) - (k-h)J_{m-1}(\gamma\rho)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
R_{E\phi}^{(-)} &= R_{E\phi}^{\text{TE}} - R_{E\phi}^{\text{TM}} \\
&= -k\{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} - h\{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\
&= (k-h)J_{m+1}(\gamma\rho) - (k+h)J_{m-1}(\gamma\rho)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

また, 磁界の  $\rho$  方向に沿う成分  $H_\rho$ , および  $\phi$  方向に沿う成分  $H_\phi$  は,

$$\begin{aligned}
H_\rho &= H_\rho^{\text{TE}} + H_\rho^{\text{TM}} \\
&= Y_w \sum_m \left\{ \int_\gamma \frac{\gamma}{2} \left( \bar{f}_m^{\text{TE}}(\gamma) R_{H\rho}^{\text{TE}} + \bar{f}_m^{\text{TM}}(\gamma) R_{H\rho}^{\text{TM}} \right) e^{-jhz} d\gamma \right\} \\
&\quad \cdot \sin(m\phi + \alpha_m) \\
&\equiv Y_w \sum_m \left\{ \int_\gamma \frac{\gamma}{2} \left( f_m^{(+)}(\gamma) R_{H\rho}^{(+)} + f_m^{(-)}(\gamma) R_{H\rho}^{(-)} \right) e^{-jhz} d\gamma \right\} \\
&\quad \cdot \sin(m\phi + \alpha_m)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

ここで,

$$R_{H\rho}^{\{\text{TE}\}^{\text{TM}}\}} \equiv \pm \begin{Bmatrix} h \\ k \end{Bmatrix} \{J_{m-1}(\gamma\rho) \mp J_{m+1}(\gamma\rho)\} \tag{5.19}$$

これより,

$$\begin{aligned}
R_{H\rho}^{(+)} &= R_{H\rho}^{\text{TE}} + R_{H\rho}^{\text{TM}} \\
&= h\{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} - k\{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\
&= -(k+h)J_{m+1}(\gamma\rho) - (k-h)J_{m-1}(\gamma\rho) \\
&= -R_{E\rho}^{(+)}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
R_{H\rho}^{(-)} &= R_{H\rho}^{\text{TE}} - R_{H\rho}^{\text{TM}} \\
&= h\{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} + k\{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\
&= (k-h)J_{m+1}(\gamma\rho) + (k+h)J_{m-1}(\gamma\rho) \\
&= R_{E\rho}^{(-)}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

また,

$$\begin{aligned}
H_\phi &= H_\phi^{\text{TE}} + H_\phi^{\text{TM}} \\
&= Y_w \sum_m \left\{ \int_\gamma \frac{\gamma}{2} \left( \bar{f}_m^{\text{TE}}(\gamma) R_{H\phi}^{\text{TE}} + \bar{f}_m^{\text{TM}}(\gamma) R_{H\phi}^{\text{TM}} \right) e^{-jhz} d\gamma \right\} \\
&\quad \cdot \cos(m\phi + \alpha_m) \\
&\equiv Y_w \sum_m \left\{ \int_\gamma \frac{\gamma}{2} \left( f_m^{(+)}(\gamma) R_{H\phi}^{(+)} + f_m^{(-)}(\gamma) R_{H\phi}^{(-)} \right) e^{-jhz} d\gamma \right\} \\
&\quad \cdot \cos(m\phi + \alpha_m)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

ここで,

$$R_{H\phi}^{\{\text{TE}\}} \equiv \pm \begin{Bmatrix} h \\ k \end{Bmatrix} \{J_{m-1}(\gamma\rho) \pm J_{m+1}(\gamma\rho)\} \tag{5.23}$$

これより,

$$\begin{aligned}
R_{H\phi}^{(+)} &= R_{H\phi}^{\text{TE}} + R_{H\phi}^{\text{TM}} \\
&= h\{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} - k\{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\
&= (k+h)J_{m+1}(\gamma\rho) - (k-h)J_{m-1}(\gamma\rho) \\
&= R_{E\phi}^{(+)}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
R_{H\phi}^{(-)} &= R_{H\phi}^{\text{TE}} - R_{H\phi}^{\text{TM}} \\
&= h\{J_{m-1}(\gamma\rho) + J_{m+1}(\gamma\rho)\} + k\{J_{m-1}(\gamma\rho) - J_{m+1}(\gamma\rho)\} \\
&= -(k-h)J_{m+1}(\gamma\rho) + (k+h)J_{m-1}(\gamma\rho) \\
&= -R_{E\phi}^{(-)}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

$z$  成分については,

$$\begin{aligned}
E_z &= E_z^{\text{TM}} = -j \sum_m \left\{ \int_\gamma \bar{f}_m^{\text{TM}}(\gamma) \gamma^2 J_m(\gamma\rho) e^{-jhz} d\gamma \right\} \cos(m\phi + \alpha_m) \\
&= -j \sum_m \left\{ \int_\gamma \left( f_m^{(+)}(\gamma) - f_m^{(-)}(\gamma) \right) \gamma^2 J_m(\gamma\rho) e^{-jhz} d\gamma \right\} \cos(m\phi + \alpha_m) \\
&= \sum_m \left( E_{zm}^{(+)} + E_{zm}^{(-)} \right) \cos(m\phi + \alpha_m)
\end{aligned}$$

ここで,

$$E_{zm}^{(\pm)} = \mp j \int_\gamma f_m^{(\pm)}(\gamma) e^{-jhz} J_m(\gamma\rho) \gamma^2 d\gamma \tag{5.26}$$

また,

$$\begin{aligned}
H_z &= H_z^{\text{TE}} = jY_w \sum_m \left\{ \int_{\gamma} \bar{f}_m^{\text{TE}}(\gamma) \gamma^2 J_m(\gamma\rho) e^{-jhz} d\gamma \right\} \sin(m\phi + \alpha_m) \\
&= jY_w \sum_m \left\{ \int_{\gamma} \left( f_m^{(+)}(\gamma) + f_m^{(-)}(\gamma) \right) \gamma^2 J_m(\gamma\rho) e^{-jhz} d\gamma \right\} \sin(m\phi + \alpha_m) \\
&\equiv \sum_m \left( H_{zm}^{(+)} + H_{zm}^{(-)} \right) \sin(m\phi + \alpha_m)
\end{aligned}$$

ここで,

$$H_{zm}^{(\pm)} = jY_w \int_{\gamma} f_m^{(\pm)}(\gamma) e^{-jhz} J_m(\gamma\rho) \gamma^2 d\gamma = \mp Y_w E_{zm}^{(\pm)} \quad (5.27)$$

これより,

$$E_{\rho} = \sum_m \left( E_{\rho m}^{(+)} + E_{\rho m}^{(-)} \right) \cos(m\phi + \alpha_m) \equiv \sum_m \left( \hat{E}_{\rho m, c}^{(+)} + \hat{E}_{\rho m, c}^{(-)} \right) \quad (5.28)$$

$$E_{\phi} = \sum_m \left( E_{\phi m}^{(+)} + E_{\phi m}^{(-)} \right) \sin(m\phi + \alpha_m) \equiv \sum_m \left( \hat{E}_{\phi m, c}^{(+)} + \hat{E}_{\phi m, c}^{(-)} \right) \quad (5.29)$$

$$E_z = \sum_m \left( E_{zm}^{(+)} + E_{zm}^{(-)} \right) \cos(m\phi + \alpha_m) \equiv \sum_m \left( \hat{E}_{zm, c}^{(+)} + \hat{E}_{zm, c}^{(-)} \right) \quad (5.30)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
E_{\rho m}^{(\pm)} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f_m^{(\pm)}(\gamma) \left\{ (k \pm h) J_{m+1}(\gamma\rho) + (k \mp h) J_{m-1}(\gamma\rho) \right\} \\
&\quad \cdot e^{-jhz} \gamma d\gamma
\end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned}
E_{\phi m}^{(\pm)} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f_m^{(\pm)}(\gamma) \left\{ (k \pm h) J_{m+1}(\gamma\rho) - (k \mp h) J_{m-1}(\gamma\rho) \right\} \\
&\quad \cdot e^{-jhz} \gamma d\gamma
\end{aligned} \quad (5.32)$$

$$E_{zm}^{(\pm)} = \mp j \int_0^{\infty} f_m^{(\pm)}(\gamma) e^{-jhz} J_m(\gamma\rho) \gamma^2 d\gamma \quad (5.33)$$

また,

$$\begin{aligned}
H_{\rho} &= \sum_m \left( H_{\rho m}^{(+)} + H_{\rho m}^{(-)} \right) \sin(m\phi + \alpha_m) \equiv \sum_m \left( \hat{H}_{\rho m, c}^{(+)} + \hat{H}_{\rho m, c}^{(-)} \right) \\
&= Y_w \sum_m \left( -E_{\rho m}^{(+)} + E_{\rho m}^{(-)} \right) \sin(m\phi + \alpha_m)
\end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned}
H_{\phi} &= \sum_m \left( H_{\phi m}^{(+)} + H_{\phi m}^{(-)} \right) \cos(m\phi + \alpha_m) \equiv \sum_m \left( \hat{H}_{\phi m, c}^{(+)} + \hat{H}_{\phi m, c}^{(-)} \right) \\
&= Y_w \sum_m \left( E_{\phi m}^{(+)} - E_{\phi m}^{(-)} \right) \cos(m\phi + \alpha_m)
\end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}
H_z &= \sum_m \left( H_{zm}^{(+)} + H_{zm}^{(-)} \right) \sin(m\phi + \alpha_m) \equiv \sum_m \left( \hat{H}_{zm, c}^{(+)} + \hat{H}_{zm, c}^{(-)} \right) \\
&= Y_w \sum_m \left( -E_{zm}^{(+)} + E_{zm}^{(-)} \right) \sin(m\phi + \alpha_m)
\end{aligned} \quad (5.36)$$

ここで,

$$\hat{E}_{\rho m, c}^{(\pm)} = E_{\rho m}^{(\pm)} \cos(m\phi + \alpha_m) \quad (5.37)$$

$$\hat{E}_{\phi m, c}^{(\pm)} = E_{\phi m}^{(\pm)} \sin(m\phi + \alpha_m) \quad (5.38)$$

$$\hat{E}_{zm, c}^{(\pm)} = E_{zm}^{(\pm)} \cos(m\phi + \alpha_m) \quad (5.39)$$

また,

$$\hat{H}_{\rho m, c}^{(\pm)} = \mp \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{\rho m}^{(\pm)} \sin(m\phi + \alpha_m) \quad (5.40)$$

$$\hat{H}_{\phi m, c}^{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{\phi m}^{(\pm)} \cos(m\phi + \alpha_m) \quad (5.41)$$

$$\hat{H}_{zm, c}^{(\pm)} = \mp \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{zm}^{(\pm)} \sin(m\phi + \alpha_m) \quad (5.42)$$

## 5.2 平面波面の近似

TE 波と TM 波を合成した電界分布  $E_{\rho m}^{(\pm)}$  を再記して,

$$E_{\rho m}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty f_m^{(\pm)}(\gamma) \left\{ (k \pm h) J_{m+1}(\gamma \rho) + (k \mp h) J_{m-1}(\gamma \rho) \right\} \cdot e^{-jhz} \gamma d\gamma \quad (5.43)$$

ここでは、波面が平面波に近い場合を考え、 $z$  方向の波数成分  $h$  を次のように近似する.

$$h = \sqrt{k^2 - \gamma^2} \simeq k - \frac{\gamma^2}{2k} \quad (5.44)$$

変形して,

$$k \pm h \simeq \begin{Bmatrix} 2k \\ 0 \end{Bmatrix} \mp \frac{\gamma^2}{2k} \quad (5.45)$$

これより、式 (5.43) を近似すると次のようになる.

$$E_{\rho m}^{(\pm)} \simeq \frac{1}{2} e^{-jkz} \int_0^\infty f_m^{(\pm)}(\gamma) \cdot \left[ 2k J_{m\pm 1}(\gamma \rho) \mp \frac{\gamma^2}{2k} \{ J_{m+1}(\gamma \rho) - J_{m-1}(\gamma \rho) \} \right] e^{j\frac{\gamma^2}{2k}z} \gamma d\gamma \quad (5.46)$$

さらに、第 2 項を無視して次式が得られる.

$$E_{\rho m}^{(\pm)} \simeq k e^{-jkz} \int_0^\infty f_m^{(\pm)}(\gamma) J_{m\pm 1}(\gamma \rho) e^{j\frac{\gamma^2}{2k}z} \gamma d\gamma \quad (5.47)$$

同様にして,

$$\begin{aligned} E_{\phi m}^{(\pm)} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty f_m^{(\pm)}(\gamma) \{ (k \pm h) J_{m+1}(\gamma \rho) - (k \mp h) J_{m-1}(\gamma \rho) \} e^{-jhz} \gamma d\gamma \\ &\simeq \frac{1}{2} e^{-jkz} \int_0^\infty f_m^{(\pm)}(\gamma) \cdot \left[ \pm 2k J_{m\pm 1}(\gamma \rho) \mp \frac{\gamma^2}{2k} \{ J_{m+1}(\gamma \rho) + J_{m-1}(\gamma \rho) \} \right] e^{j\frac{\gamma^2}{2k}z} \gamma d\gamma \\ &\simeq \pm k e^{-jkz} \int_0^\infty f_m^{(\pm)}(\gamma) J_{m\pm 1}(\gamma \rho) e^{j\frac{\gamma^2}{2k}z} \gamma d\gamma \end{aligned} \quad (5.48)$$

これより、電界の  $\rho$  成分と  $\phi$  成分の関係は,

$$E_{\rho m}^{(\pm)} = \pm E_{\phi m}^{(\pm)} \quad (5.49)$$

また, 同様にして,  $z$  成分についても,

$$\begin{aligned}
 E_{zm}^{(\pm)} &= \mp j \int_0^\infty f_m^{(\pm)}(\gamma) e^{-jhz} J_m(\gamma\rho) \gamma^2 d\gamma \\
 &\simeq \mp j k e^{-jkz} \int_0^\infty f_m^{(\pm)}(\gamma) J_m(\gamma\rho) e^{j\frac{\gamma^2}{2k}z} \frac{\gamma^2}{k} d\gamma
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

ただし, 係数  $f_m^{(\pm)}(\gamma)$  は円筒波スペクトラムを示す.

## 5.3 ラゲルの多項式による電磁界の展開

### 5.3.1 電磁界の展開

円筒波スペクトラム  $f_m^{(\pm)}(\gamma)$  を、次のラゲルの多項式  $L_{n,l}(x)$  を用いて展開する。まず、すでに求めた  $E_{\rho m}^{(\pm)}$ ,  $E_{\phi m}^{(\pm)}$  の式

$$E_{\rho m}^{(\pm)} = \pm E_{\phi m}^{(\pm)} = k e^{-jkz} \int_0^\infty f_m^{(\pm)}(\gamma) J_{m\pm 1}(\gamma \rho) e^{j\frac{\gamma^2}{2k}z} \gamma d\gamma \quad (5.51)$$

における円筒波スペクトラム  $f_m^{(\pm)}(\gamma)$  を、正規直交化したラゲルの多項式

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right)} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{m\pm 1} L_{n,m\pm 1}\left(\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right) \quad (5.52)$$

により次のように展開する。

$$f_m^{(\pm)}(\gamma) = \sum_{n=0}^\infty g_{n,m}^{(\pm)} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{m\pm 1} L_{n,m\pm 1}\left(\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right)} \quad (5.53)$$

係数  $\alpha_{n,m}^{(\pm)}$  を求めるため、上に示した  $f_m^{(\pm)}(\gamma)$  の両辺に

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{m\pm 1+1} L_{n',m\pm 1}\left(\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right)} \quad (5.54)$$

を乗じ、 $(\gamma/\gamma_0)$  について積分すると、直交性を用いて次式が得られる。

$$\begin{aligned} \alpha_{n,m}^{(\pm)} &= \frac{2 \cdot n!}{(n+m\pm 1)!} \\ &\cdot \int_0^\infty f_m^{(\pm)}(\gamma) \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{m\pm 1+1} L_{n,m\pm 1}\left(\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}} d\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right) \end{aligned} \quad (5.55)$$

なお、 $n'$  は  $n$  に置き換えている。ラゲルの多項式で展開した式 (5.53) の  $f_m^{(\pm)}(\gamma)$  を  $E_{\rho m}^{(\pm)}$  に代入すると、

$$\begin{aligned} E_{\rho m}^{(\pm)} &= k e^{-jkz} \sum_{n=0}^\infty g_{n,m}^{(\pm)} \\ &\cdot \int_0^\infty \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{m\pm 1} L_{n,m\pm 1}\left(\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right) J_{m\pm 1}(\gamma \rho) e^{-\frac{1}{2}\left(1-j\frac{\gamma_0^2 z}{k}\right)\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}} \gamma d\gamma \end{aligned} \quad (5.56)$$

いま、

$$\bar{m} \equiv m \pm 1 \quad (5.57)$$

$$X \equiv \gamma/\gamma_0 \quad (5.58)$$

とおき、上式の積分項を、

$$I = \int_0^\infty X^{\bar{m}} L_{n,\bar{m}}(X^2) J_{\bar{m}}(\gamma_0 \rho X) e^{-\frac{1}{2}(1-j\frac{\gamma_0^2 z}{k})X^2} (\gamma_0 X) \gamma_0 dX \quad (5.59)$$

とすると、 $E_{\rho m}^{(\pm)}$  は次のようになる。

$$E_{\rho m}^{(\pm)} = k e^{-jkz} \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,m}^{(\pm)} I \quad (5.60)$$

この積分を実行すると次のようになる（問題参照）。

$$I = (-1)^n \frac{\gamma_0^{\bar{m}+2}}{(1-jv)^{\bar{m}+1}} e^{j2n \tan^{-1} v} \rho^{\bar{m}} L_{n,\bar{m}} \left( \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1+v^2} \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1-jv}} \quad (5.61)$$

ここで、

$$v = \frac{\gamma_0^2 z}{k} \quad (5.62)$$

したがって、 $E_{\rho m}^{(\pm)}$  は次のようになる。

$$E_{\rho m}^{(\pm)} = k e^{-jkz} \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,m}^{(\pm)} (-1)^n \frac{\gamma_0^{\bar{m}+2}}{(1-jv)^{\bar{m}+1}} e^{j2n \tan^{-1} v} \rho^{\bar{m}} \cdot L_{n,\bar{m}} \left( \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1+v^2} \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1-jv}} \quad (5.63)$$

ここで、

$$v = \frac{\gamma_0^2 z}{k} \quad (5.64)$$

$$\bar{m} = m \pm 1 \quad (5.65)$$

より、式は複雑になるが次の形にもかける。

$$E_{\rho m}^{(\pm)} = k e^{-jkz} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,m}^{(\pm)} (-1)^n \frac{\gamma_0^{m\pm 1+2}}{\left(1-j\frac{\gamma_0^2 z}{k}\right)^{m\pm 1+1}} \cdot e^{j2n \tan^{-1} \frac{\gamma_0^2 z}{k}} \rho^{m\pm 1} \cdot L_{n,m\pm 1} \left[ \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1+\left(\frac{\gamma_0^2 z}{k}\right)^2} \right] e^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1-j\frac{\gamma_0^2 z}{k}}} \quad (5.66)$$

いま、 $E_{\rho m}^{(\pm)}$  を次のようにおく。

$$E_{\rho m}^{(\pm)} = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,m}^{(\pm)} E_{\rho m,n}^{(\pm)} \quad (5.67)$$



の形で表すと,  $E_{\rho m, n}^{(\pm)}$  (elementary beams) は次のようになる.

$$E_{\rho m, n}^{(\pm)} = k e^{-jkz} (-1)^n \frac{\gamma_0^{m\pm 1+2}}{\left(1 - j \frac{\gamma_0^2 z}{k}\right)^{m\pm 1+1}} \cdot e^{j2n \tan^{-1} \frac{\gamma_0^2 z}{k}} \rho^{m\pm 1} \\ \cdot L_{n, m\pm 1} \left[ \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1 + \left(\frac{\gamma_0^2 z}{k}\right)^2} \right] e^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1 - j \frac{\gamma_0^2 z}{k}}} \quad (5.68)$$

あるいは,

$$E_{\rho m, n}^{(\pm)} = e^{-jkz} (-1)^n \gamma_0^2 k \frac{u^{m\pm 1}}{(1 - jv)^{m\pm 1+1}} e^{j2n \tan^{-1} v} \\ \cdot L_{n, m\pm 1} \left( \frac{u^2}{1 + v^2} \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{1 - jv}} \quad (5.69)$$

これを, **ビームモード** (beam-mode) という. ここで,

$$u \equiv \gamma_0 \rho = \left( \frac{\gamma_0}{k} \right) k \rho \quad (5.70)$$

$$v = \frac{\gamma_0^2}{k} z = \left( \frac{\gamma_0}{k} \right)^2 k z \quad (5.71)$$

さらに,

$$1 - jv = \left(1 + v^2\right)^{\frac{1}{2}} e^{-j \tan^{-1} v} \quad (5.72)$$

$$\frac{u^2}{1 - jv} = \frac{u^2(1 + jv)}{1 + v^2} = \frac{u^2}{1 + v^2} + j \frac{u^2 v}{1 + v^2} \quad (5.73)$$

より,

$$E_{\rho m, n}^{(\pm)} = e^{-jkz} (-1)^n \gamma_0^2 k \frac{u^{m\pm 1}}{(1 + v^2)^{\frac{1}{2}(m\pm 1+1)} e^{-j(m\pm 1+1) \tan^{-1} v}} \\ \cdot e^{j2n \tan^{-1} v} L_{n, m\pm 1} \left( \frac{u^2}{1 + v^2} \right) e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{u^2}{1 + v^2} + j \frac{u^2 v}{1 + v^2} \right)} \quad (5.74)$$

いま, ビームモードの正規化係数を

$$A_{m, n}^{(\pm)} \equiv (-1)^n \gamma_0^2 k \quad (5.75)$$

とおき, 若干変形すると,  $E_{\rho m, n}^{(\pm)}$  は次のようになる.

$$E_{\rho m, n}^{(\pm)} = e^{-jkz} A_{m, n}^{(\pm)} \frac{u^{m\pm 1}}{(1 + v^2)^{\frac{1}{2}(m\pm 1+1)}} \\ \cdot L_{n, m\pm 1} \left( \frac{u^2}{1 + v^2} \right) \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{1 + v^2} + j \{ (2n + m\pm 1 + 1) \tan^{-1} v - \frac{1}{2} \frac{u^2 v}{1 + v^2} \}} \quad (5.76)$$

同様に  $E_{\phi m}^{(\pm)}$  についても展開すると,

$$E_{\phi m}^{(\pm)} = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,m}^{(\pm)} E_{\phi m,n}^{(\pm)} \quad (5.77)$$

このようにして定義した  $E_{\phi m,n}^{(\pm)}$  は,

$$E_{\phi m,n}^{(\pm)} = \pm E_{\rho m,n}^{(\pm)} \quad (5.78)$$

磁界についても,  $H_{\rho m,n}^{(\pm)}$ ,  $H_{\phi m,n}^{(\pm)}$  を同様に定義すると, 次のようになる.

$$H_{\rho m,n}^{(\pm)} = \mp \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{\rho m,n}^{(\pm)} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{\phi m,n}^{(\pm)} = \mp H_{\phi m,n}^{(\pm)} \quad (5.79)$$

そこで,

$$E_{m,n}^{(\pm)} \equiv E_{\rho m,n}^{(\pm)} \quad (5.80)$$

とおくと,

$$E_{\phi m,n}^{(\pm)} = \pm E_{m,n}^{(\pm)} \quad (5.81)$$

$$H_{\rho m,n}^{(\pm)} = \mp \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{m,n}^{(\pm)} = \mp H_{\phi m,n}^{(\pm)} \quad (5.82)$$

これより, 次数  $m$ ,  $n$  のビームモードをベクトル表示した  $\mathbf{E}_{m,n}^{(\pm)}$ ,  $\mathbf{H}_{m,n}^{(\pm)}$  は, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{m,n}^{(\pm)} &= E_{\rho m,n}^{(\pm)} \cos(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\rho + E_{\phi m,n}^{(\pm)} \sin(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\phi \\ &= E_{m,n}^{(\pm)} [\cos(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\rho \pm \sin(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\phi] \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{m,n}^{(\pm)} &= H_{\rho m,n}^{(\pm)} \sin(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\rho + H_{\phi m,n}^{(\pm)} \cos(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\phi \\ &= \mp \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{m,n}^{(\pm)} [\sin(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\rho \mp \cos(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\phi] \end{aligned} \quad (5.84)$$

このとき, 異なるビームモードのスカラー積は,

$$\mathbf{E}_{m,n}^{(\pm)} \cdot \mathbf{E}_{m',n'}^{(\pm)*} = E_{m,n}^{(\pm)} E_{m',n'}^{(\pm)*} \cos\{(m - m')\phi + (\alpha_m - \alpha_{m'})\} \quad (5.85)$$

$$\mathbf{E}_{m,n}^{(\pm)} \cdot \mathbf{E}_{m',n'}^{(\mp)*} = E_{m,n}^{(\pm)} E_{m',n'}^{(\mp)*} \cos\{(m + m')\phi + (\alpha_m + \alpha_{m'})\} \quad (5.86)$$

### 5.3.2 ビームモードの正規化

伝送電力に関わる積分は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \iint \{ \mathbf{E}_{m,n}^{(\pm)} \times \mathbf{H}_{m',n'}^{(\pm)*} \} \cdot \mathbf{a}_z dS \\
&= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \iint \mathbf{E}_{m,n}^{(\pm)} \cdot \mathbf{E}_{m',n'}^{(\pm)*} dS \\
&= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_0^{2\pi} \cos\{(m-m')\phi + (\alpha_m - \alpha_{m'})\} d\phi \int_0^\infty E_{m,n}^{(\pm)} E_{m',n'}^{(\pm)*} \rho d\rho \\
&= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} 2\pi \delta_{m,m'} \int_0^\infty E_{m,n}^{(\pm)} E_{m,n}^{(\pm)*} \rho d\rho \\
&= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_{m,n}^{(\pm)} A_{m,n}^{(\pm)*} \frac{\pi}{\gamma_0^2} \frac{(n+m\pm 1)!}{n!} \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \quad (5.87)
\end{aligned}$$

ここで、上式の積分項は、

$$\int_0^\infty E_{m,n}^{(\pm)} E_{m,n}^{(\pm)*} \rho d\rho = \frac{1}{2\gamma_0^2} A_{m,n}^{(\pm)} A_{m,n}^{(\pm)*} \delta_{n,n'} \frac{(n+m\pm 1)!}{n!} \quad (5.88)$$

これより、異なるビームモードの間には直交性があることがわかる。

### 5.3.3 ビームモードの電力

ビームモードの電力  $P_{n,m}^{(\pm)}$  は、

$$P_{n,m}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \iint \{ \mathbf{E}_{m,n}^{(\pm)} \times \mathbf{H}_{m,n}^{(\pm)*} \} \cdot \mathbf{a}_z dS \quad (5.89)$$

によって求められるから、 $m \neq 0$  のとき、

$$P_{n,m}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_{m,n}^{(\pm)} A_{m,n}^{(\pm)*} \frac{\pi}{\gamma_0^2} \frac{(n+m\pm 1)!}{n!} \quad (5.90)$$

$m = 0$  のとき、

$$P_{n,0}^{(+)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_{0,n}^{(+)} A_{0,n}^{(+)*} \frac{\pi}{\gamma_0^2} \frac{(n\pm 1)!}{n!} \quad (5.91)$$

伝送電力は、このようにして得られた各々のビームモードの電力の和により求めることができる。ビームモードの正規化条件を次のようにする。

$$P_{n,m}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad (5.92)$$

正規化条件より,

$$1 = |A_{m,n}^{(\pm)}|^2 \frac{\pi}{\gamma_0^2} \frac{(n+m\pm 1)!}{n!} \quad (5.93)$$

これより, 正規化係数  $A_{m,n}^{(\pm)}$  は次のように決まる.

$$A_{m,n}^{(\pm)} = \gamma_0 \sqrt{\frac{n!}{\pi(n+m\pm 1)!}} \quad (5.94)$$

したがって,  $E_{\rho m,n}^{(\pm)}$ ,  $E_{\phi m,n}^{(\pm)}$  は次のようになる.

$$E_{m,n}^{(\pm)} = \gamma_0 \sqrt{\frac{n!}{\pi(n+m\pm 1)!}} \frac{u^{m\pm 1}}{(1+v^2)^{\frac{1}{2}(m\pm 1+1)}} L_{n,m\pm 1} \left( \frac{u^2}{1+v^2} \right) \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{1+v^2} + j\{(2n+m\pm 1+1) \tan^{-1} v - \frac{1}{2} \frac{u^2 v}{1+v^2}\}} e^{-jkz} \quad (5.95)$$

#### 問題

式 (5.61) を導出せよ.

■ **略解** まず,  $b \equiv \gamma_0 \rho$ ,  $a^2 \equiv \frac{1}{2}(1 - j\frac{\gamma_0^2 z}{k})$  とおくと, 積分項  $I$  は次のようになる.

$$I = \gamma_0^2 \int_0^\infty X^{\bar{m}+1} L_{n,\bar{m}}(X^2) J_{\bar{m}}(bX) e^{-a^2 X^2} dX \quad (5.96)$$

ここで,

$$L_{n,\bar{m}}(X^2) = \sum_{i=0}^n \binom{n+\bar{m}}{n-i} \frac{(-1)^i}{i!} X^{2i} \quad (5.97)$$

これより,

$$I = \gamma_0^2 \sum_{i=0}^n \binom{n+\bar{m}}{n-i} \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^\infty X^{\bar{m}+1+2i} J_{\bar{m}}(bX) e^{-a^2 X^2} dX \quad (5.98)$$

いま, 積分項  $I'$  を

$$I' = \int_0^\infty X^{\bar{m}+1+2i} J_{\bar{m}}(bX) e^{-a^2 X^2} dX \quad (5.99)$$

とおき, 次の積分公式を適用する.

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-a^2 x^2} J_\nu(bx) x^{\mu-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\frac{\mu+\nu}{2}) b^\nu}{2^{\nu+1} a^{\mu+\nu} \Gamma(\nu+1)} {}_1F_1 \left( \frac{\mu+\nu}{2}, \nu+1, -\frac{b^2}{4a^2} \right) \end{aligned} \quad (5.100)$$

ここで,

$${}_1F_1(\alpha, \beta, z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+r)} \frac{z^r}{r!} \quad (5.101)$$

よって

$$\mu = \bar{m} + 1 + 2i + 1 \quad (5.102)$$

$$\nu = \bar{m} \quad (5.103)$$

とすれば,

$$\alpha = \frac{\mu + \nu}{2} = \bar{m} + i + 1 \quad (5.104)$$

$$\beta = \nu + 1 = \bar{m} + 1 \quad (5.105)$$

これより, 積分項  $I'$  は次のようになる.

$$\begin{aligned} I' &= \int_0^{\infty} X^{\bar{m}+1+2i} J_{\bar{m}}(bX) e^{-a^2 X^2} dX \\ &= \frac{\Gamma(\bar{m} + i + 1) b^{\bar{m}}}{2^{\bar{m}+1} (a^2)^{\bar{m}+i+1} \Gamma(\bar{m} + 1)} \\ &\quad \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\bar{m} + i + 1 + r)}{\Gamma(\bar{m} + i + 1)} \frac{\Gamma(\bar{m} + 1)}{\Gamma(\bar{m} + 1 + r)} \frac{1}{r!} \left( -\frac{b^2}{4a^2} \right)^r \\ &= \frac{(\bar{m} + i)! b^{\bar{m}}}{2^{\bar{m}+1} (a^2)^{\bar{m}+i+1} \bar{m}!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\bar{m} + i + r)!}{(\bar{m} + i)!} \frac{\bar{m}!}{(\bar{m} + r)!} \frac{1}{r!} \left( -\frac{b^2}{4a^2} \right)^r \\ &= \frac{b^{\bar{m}}}{(2a^2)^{\bar{m}+1} (a^2)^i} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\bar{m} + i + r)!}{(\bar{m} + r)!} \frac{1}{r!} \left( -\frac{b^2}{4a^2} \right)^r \end{aligned} \quad (5.106)$$

さて, ラゲルの多項式  $L_{n,\alpha}(x)$  はロドリゲス表示より, 次のようになる.

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}(x) &= \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) \\ &= \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x)^p}{p!} \right\} x^{n+\alpha} \right] \\ &= \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha+p}) \\ &= \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{(n + \alpha + p)!}{(\alpha + p)!} x^{\alpha+p} \\ &= \frac{e^x}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n + \alpha + p)!}{p! (\alpha + p)!} (-x)^p \end{aligned} \quad (5.107)$$

ここで,

$$x \equiv \frac{b^2}{4a^2} \quad (5.108)$$

$$p \equiv r \quad (5.109)$$

$$\alpha \equiv \bar{m} \quad (5.110)$$

$$n \equiv i \quad (5.111)$$

これより,  $L_{i,\bar{m}}(\frac{b^2}{4a^2})$  は次のようになる.

$$L_{i,\bar{m}}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) = \frac{e^{\frac{b^2}{4a^2}}}{i!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i + \bar{m} + r)!}{r!(\bar{m} + r)!} \left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)^r \quad (5.112)$$

積分項  $I'$  は次のようになる.

$$\begin{aligned} I' &= \frac{b^{\bar{m}}}{(2a^2)^{\bar{m}+1}(a^2)^i} L_{i,\bar{m}}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \frac{i!}{e^{\frac{b^2}{4a^2}}} \\ &= \frac{b^{\bar{m}}}{(2a^2)^{\bar{m}+1}(a^2)^i} i! e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \sum_{r=0}^i \binom{i + \bar{m}}{i - r} \frac{(-\frac{b^2}{4a^2})^r}{r!} \end{aligned} \quad (5.113)$$

よって, 与式の積分  $I$  は次のようになる.

$$\begin{aligned} I &= \gamma_0^2 \sum_{i=0}^n \binom{n + \bar{m}}{n - i} \frac{(-1)^i}{i!} I' \\ &= \gamma_0^2 \sum_{i=0}^n \binom{n + \bar{m}}{n - i} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{b^{\bar{m}}}{(2a^2)^{\bar{m}+1}(a^2)^i} i! e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \\ &\quad \cdot \sum_{r=0}^i \binom{i + \bar{m}}{i - r} \frac{(-\frac{b^2}{4a^2})^r}{r!} \\ &= \gamma_0^2 e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \frac{b^{\bar{m}}}{(2a^2)^{\bar{m}+1}} \sum_{i=0}^n \sum_{r=0}^i \binom{n + \bar{m}}{n - i} \binom{i + \bar{m}}{i - r} \frac{(-1)^i}{(a^2)^i} \frac{(-\frac{b^2}{4a^2})^r}{r!} \\ &= \gamma_0^2 e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \frac{b^{\bar{m}}}{(2a^2)^{\bar{m}+1}} \\ &\quad \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{r=0}^i \frac{(n + \bar{m})!}{(n - i)!(\bar{m} + i)!} \frac{(i + \bar{m})!}{(i - r)!(\bar{m} + r)!} \frac{(-1)^i}{(a^2)^i} \frac{(-\frac{b^2}{4a^2})^r}{r!} \\ &= \gamma_0^2 e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \frac{b^{\bar{m}}}{(2a^2)^{\bar{m}+1}} \sum_{r=0}^n \frac{(n + \bar{m})!}{(\bar{m} + r)!} \frac{(-\frac{b^2}{4a^2})^r}{r!} \\ &\quad \cdot \sum_{i=r}^n \frac{1}{(n - i)!(i - r)!} \frac{(-1)^i}{(a^2)^i} \end{aligned} \quad (5.114)$$

いま,

$$j \equiv i - r \quad (5.115)$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=r}^n \frac{1}{(n-i)!(i-r)!} \frac{(-1)^i}{(a^2)^i} &= \sum_{j=0}^{n-r} \frac{1}{(n-r-j)!j!} \left(-\frac{1}{a^2}\right)^{j+r} \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{a^2}\right)^r}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \frac{(n-r)!}{(n-r-j)!j!} \left(-\frac{1}{a^2}\right)^j \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{a^2}\right)^r}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} \left(-\frac{1}{a^2}\right)^j \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{a^2}\right)^r}{(n-r)!} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)^{n-r}
\end{aligned} \tag{5.116}$$

となり,  $I$  は,

$$\begin{aligned}
I &= \gamma_0^2 e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \frac{b^{\bar{m}}}{(2a^2)^{\bar{m}+1}} \sum_{r=0}^n \frac{(n+\bar{m})!}{(\bar{m}+r)!} \frac{\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)^r}{r!} \frac{\left(-\frac{1}{a^2}\right)^r}{(n-r)!} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)^{n-r} \\
&= \gamma_0^2 e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \frac{b^{\bar{m}}}{(2a^2)^{\bar{m}+1}} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)^n \\
&\quad \cdot \sum_{r=0}^n \frac{(n+\bar{m})!}{(\bar{m}+r)!r!(n-r)!} \left(\frac{b^2}{4a^2} \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{a^2}}\right)^r
\end{aligned} \tag{5.117}$$

ここで,

$$\frac{b^2}{4a^2} \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{a^2}} = \frac{b^2}{4a^2(a^2 - 1)} \tag{5.118}$$

さらに,

$$v \equiv \frac{\gamma_0^2 z}{k} \tag{5.119}$$

とおくと,

$$a^2 = \frac{1}{2} \left(1 - j \frac{\gamma_0^2 z}{k}\right) = \frac{1}{2}(1 - jv) \tag{5.120}$$

$$a^2 - 1 = -\frac{1}{2}(1 + jv) \tag{5.121}$$

$$4a^2(a^2 - 1) = -(1 + v^2) \tag{5.122}$$

$$\frac{b^2}{4a^2} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{(1 - jv)} \tag{5.123}$$

$$\frac{b^2}{4a^2(a^2 - 1)} = -\frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1 + v^2} \tag{5.124}$$

また,

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)^n &= \left\{ \frac{-\frac{1}{2}(1+jv)}{\frac{1}{2}(1-jv)} \right\}^n \\
&= (-1)^n \left( \frac{1+jv}{1-jv} \right)^n \\
&= (-1)^n \left( \frac{e^{j \tan^{-1} v}}{e^{-j \tan^{-1} v}} \right)^n \\
&= (-1)^n e^{j 2n \tan^{-1} v}
\end{aligned} \tag{5.125}$$

よって,  $I$  は次のようになる.

$$\begin{aligned}
I &= \gamma_0^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1-jv}} \frac{(\gamma_0 \rho)^{\bar{m}}}{(1-jv)^{\bar{m}+1}} (-1)^n e^{j 2n \tan^{-1} v} \\
&\quad \cdot \sum_{r=0}^n \frac{(n+\bar{m})!}{(\bar{m}+r)!(n-r)!} \frac{1}{r!} \left( -\frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1+v^2} \right)^r \\
&= e^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1-jv}} \frac{\gamma_0^{\bar{m}+2} \rho^{\bar{m}}}{(1-jv)^{\bar{m}+1}} (-1)^n e^{j 2n \tan^{-1} v} \sum_{r=0}^n \binom{n+\bar{m}}{n-r} \frac{\left(-\frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1+v^2}\right)^r}{r!} \\
&= (-1)^n \frac{\gamma_0^{\bar{m}+2}}{(1-jv)^{\bar{m}+1}} e^{j 2n \tan^{-1} v} \rho^{\bar{m}} L_{n,\bar{m}} \left( \frac{\gamma_0^2 \rho^2}{1+v^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.126}$$

ここで,

$$v = \frac{\gamma_0^2 z}{k} \tag{5.127}$$



## 5.4 ビームモードのパラメータ

### 5.4.1 波面の曲率半径

ビームモードの位相項について見ると,

$$\begin{aligned} & \exp \left[ j \left\{ (2n + m \pm 1 + 1) \tan^{-1} v - \frac{1}{2} \frac{u^2 v}{1 + v^2} \right\} \right] \\ & \equiv \exp \left[ j \left\{ \bar{\psi}_{m,n}^{(\pm)}(z) + \hat{\psi}(\rho, z) \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.128)$$

ここで,

$$\bar{\psi}_{m,n}^{(\pm)}(z) = (2n + m \pm 1 + 1) \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_0^2}{k} z \right) \quad (5.129)$$

$$\hat{\psi}(\rho, z) = -\frac{1}{2} \frac{u^2 v}{1 + v^2} = -\frac{\rho^2}{2} \frac{v \gamma_0^2}{1 + v^2} \quad (5.130)$$

上式より,  $z = 0$  では位相分布は一様となり, この位置を**ビームウエスト**という. また,  $\hat{\psi}(\rho, z)$  は波面を表し, モードの次数  $m, n$  には依存しないことがわかる. いま, 波面の曲率半径  $\bar{R}$  の球面波を考えたとき,  $\theta$  が十分小さい場合,

$$\begin{aligned} k \left( \bar{R} - \sqrt{\bar{R}^2 + \rho^2} \right) &= k \left\{ \bar{R} - \bar{R} \sqrt{1 + \left( \frac{\rho}{\bar{R}} \right)^2} \right\} \\ &\simeq k \left[ \bar{R} - \bar{R} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{\bar{R}} \right)^2 \right\} \right] \\ &= -\frac{\rho^2}{2} \frac{k}{\bar{R}} \end{aligned} \quad (5.131)$$

で近似でき, 両者を比較すると,

$$\frac{k}{\bar{R}} = \frac{v \gamma_0^2}{1 + v^2} \quad (5.132)$$

これより, 波面の曲率半径  $\bar{R}$  が定まり, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{1 + v^2}{v \gamma_0^2} k = \frac{1 + v^2}{v^2} z \\ &= z \left( 1 + \frac{1}{v^2} \right) \end{aligned} \quad (5.133)$$

### 5.4.2 ビーム半径

基本ビームモードは  $\bar{m} = 0, n = 0$  によって与えられ, この基本ビームモードにおいて  $\rho = 0$  のピーク値から  $1/e$  となる半径をビーム半径  $\omega$  と定めることにする. これより,

$\bar{m} = m \pm 1 = 0$  のときは肩添字 (±) の下側 (−) のときの  $m = 1$  より,

$$\frac{E_{\rho,1,0}^{(-)}|_{\rho=\omega}}{E_{\rho,1,0}^{(-)}|_{\rho=0}} = \frac{1}{e} \quad (5.134)$$

よって,

$$L_{0,0} \left( \frac{u^2}{1+v^2} \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{1+v^2}} = e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{1+v^2}} = e^{-1} \quad (5.135)$$

これより,

$$\frac{1}{2} \frac{(\gamma_0 \omega)^2}{1+v^2} = 1 \quad (5.136)$$

よって,

$$\omega^2 = 2 \frac{1+v^2}{\gamma_0^2} \quad (5.137)$$

また, ビームモードの波面が平面となる  $z = 0$  (ビームウエスト) におけるビーム半径を  $\omega_0$  とすると,  $v = 0$  より,

$$\omega_0^2 = \frac{2}{\gamma_0^2} \quad (5.138)$$

これにより, ビーム半径  $\omega$  は次のようになる.

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{2}{\gamma_0^2} (1+v^2) \\ &= \omega_0^2 (1+v^2) \end{aligned} \quad (5.139)$$

一方,  $v$  は  $\omega_0$  を用いて次のように表される.

$$\begin{aligned} v &= \frac{\gamma_0^2}{k} z \\ &= \frac{2}{k\omega_0^2} z \end{aligned} \quad (5.140)$$

### 5.4.3 異なる位置でのビームモードの関係

ビーム半径  $\omega$  および波面の曲率半径  $\bar{R}$  は,  $z$  の関数であり, ある位置  $z = z_1$  における値  $\omega_1 = \omega(z_1)$ ,  $\bar{R}_1 = \bar{R}(z_1)$  が与えられれば, ビームウエストの位置  $z = z_0$  およびそのビームウエストでのビーム半径  $\omega_0$  が次式によって求められる.

$$z_0 = z_1 - \frac{\bar{R}_1}{1 + \frac{1}{v_1^2}} \quad (5.141)$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1+v_1^2}} \quad (5.142)$$

ここで,

$$v_1 = \frac{\pi\omega_1^2}{\lambda\bar{R}_1} \quad (5.143)$$

ただし,  $\lambda$  は自由空間波長を示す. このようにビームウエストが決まれば, さらに任意の位置  $z = z_2$  における値  $\omega_2 = \omega(z_2)$ ,  $\bar{R}_2 = \bar{R}(z_2)$  も求めることができる.

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + v_2^2} \quad (5.144)$$

$$\bar{R}_2 = (z_2 - z_0) \left( 1 + \frac{1}{v_2^2} \right) \quad (5.145)$$

ここで,

$$v_2 = \frac{\lambda(z_2 - z_0)}{\pi\omega_0^2} \quad (5.146)$$

## 5.5 ビームモード関数

ビーム半径  $\omega$ , 波面の曲率半径  $\bar{R}$  を用いると,

$$\frac{u^2}{1+v^2} = \frac{\gamma_0^2}{1+v^2} \rho^2 = 2 \frac{\rho^2}{\omega^2} \quad (5.147)$$

$$\frac{1}{2} \frac{u^2}{1+v^2} = -\frac{\rho^2}{\omega^2} \quad (5.148)$$

$$\frac{u^2 v}{1+v^2} = \frac{k}{\bar{R}} \rho^2 \quad (5.149)$$

また,

$$\begin{aligned} \gamma_0 \frac{u^{m\pm 1}}{(1+v^2)^{\frac{1}{2}(m\pm 1+1)}} &= \left( \frac{u^2}{1+v^2} \right)^{\frac{1}{2}(m\pm 1)} \left( \frac{\gamma_0^2}{1+v^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( 2 \frac{\rho^2}{\omega^2} \right)^{\frac{m\pm 1}{2}} \left( \frac{2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.150)$$

これより,  $E_{m,n}^{(\pm)}$  は次のように表される.

$$\begin{aligned} E_{m,n}^{(\pm)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n!}{(n+m\pm 1)!}} \left( \frac{2}{\omega} \right) \left( 2 \frac{\rho^2}{\omega^2} \right)^{\frac{m\pm 1}{2}} L_{n,m\pm 1} \left( 2 \frac{\rho^2}{\omega^2} \right) \\ &\quad \cdot e^{-\frac{\rho^2}{\omega^2} + j\{(2n+m\pm 1+1) \tan^{-1} v - \frac{k}{2\bar{R}} \rho^2\}} e^{-jkz} \end{aligned} \quad (5.151)$$

ここで,

$$F_{m\pm 1,n}(t) \equiv \sqrt{\frac{n!}{(n+m\pm 1)!}} (2t^2)^{\frac{m\pm 1}{2}} L_{n,m\pm 1}(2t^2) e^{-t^2} \quad (5.152)$$

$$t \equiv \frac{\rho}{\omega} \quad (5.153)$$

とおくと,

$$E_{m,n}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{2}{\omega} \right) F_{m\pm 1,n}(t) \cdot e^{j\{(2n+m\pm 1+1) \tan^{-1} v - \frac{k}{2\bar{R}} \rho^2\}} e^{-jkz} \quad (5.154)$$

さらに,

$$\bar{m} \equiv m \pm 1 \quad (5.155)$$

とおけば,

$$F_{\bar{m},n}(t) = \sqrt{\frac{n!}{(n+\bar{m})!}} \sqrt{2\bar{m}} t^{\bar{m}} L_{n,\bar{m}}(2t^2) e^{-t^2} \quad (5.156)$$

この式をもとに低次の  $F_{\bar{m},n}(t)$  について具体的に考えてみる．まず， $n = 0$  のとき，

$$F_{\bar{m},0}(t) = \sqrt{\frac{1}{\bar{m}!}} \sqrt{2\bar{m}} t^{\bar{m}} L_{0,\bar{m}}(2t^2) e^{-t^2} = \sqrt{\frac{1}{\bar{m}!}} \sqrt{2\bar{m}} t^{\bar{m}} e^{-t^2} \quad (5.157)$$

より，

$$F_{0,0}(t) = e^{-t^2} \quad [\text{dominate mode}] \quad (5.158)$$

$$F_{1,0}(t) = \sqrt{2} t e^{-t^2} \quad [\text{typical higher-order mode}] \quad (5.159)$$

$$F_{2,0}(t) = \sqrt{2} t^2 e^{-t^2} \quad (5.160)$$

$n = 1$  のとき，

$$F_{\bar{m},1}(t) = \sqrt{\frac{1}{(1+\bar{m})!}} \sqrt{2\bar{m}} t^{\bar{m}} L_{1,\bar{m}}(2t^2) e^{-t^2} \quad (5.161)$$

より，

$$\begin{aligned} F_{0,1}(t) &= L_{1,0}(2t^2) e^{-t^2} \\ &= (1 - 2t^2) e^{-t^2} \end{aligned} \quad (5.162)$$

$$\begin{aligned} F_{1,1}(t) &= t L_{1,1}(2t^2) e^{-t^2} \\ &= 2t(1 - t^2) e^{-t^2} \quad [\text{typical higher-order mode}] \end{aligned} \quad (5.163)$$

$$\begin{aligned} F_{2,1}(t) &= \frac{2}{\sqrt{6}} t^2 L_{1,2}(2t^2) e^{-t^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}} t^2 (3 - 2t^2) e^{-t^2} \end{aligned} \quad (5.164)$$

$n = 2$  のとき，

$$F_{\bar{m},2}(t) = \sqrt{\frac{2}{(2+\bar{m})!}} \sqrt{2\bar{m}} t^{\bar{m}} L_{2,\bar{m}}(2t^2) e^{-t^2} \quad (5.165)$$

より，

$$\begin{aligned} F_{0,2}(t) &= L_{2,0}(2t^2) e^{-t^2} \\ &= (1 - 4t^2 + 2t^4) e^{-t^2} \quad [\text{typical higher-order mode}] \end{aligned} \quad (5.166)$$

$$\begin{aligned} F_{1,2}(t) &= \frac{2}{\sqrt{6}} t L_{2,1}(2t^2) e^{-t^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}} t (3 - 6t^2 + 2t^4) e^{-t^2} \end{aligned} \quad (5.167)$$

$$\begin{aligned} F_{2,2}(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} t^2 L_{2,2}(2t^2) e^{-t^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} t^2 (3 - 4t^2 + t^4) e^{-t^2} \end{aligned} \quad (5.168)$$

### 5.5.1 正規直交化したラゲルの多項式の計算例

$$F_{\bar{m},n}(t) = \sqrt{\frac{n!}{(n+\bar{m})!}} \sqrt{2\bar{m}} t^{\bar{m}} L_{n,\bar{m}}(2t^2) e^{-t^2} \quad (5.169)$$

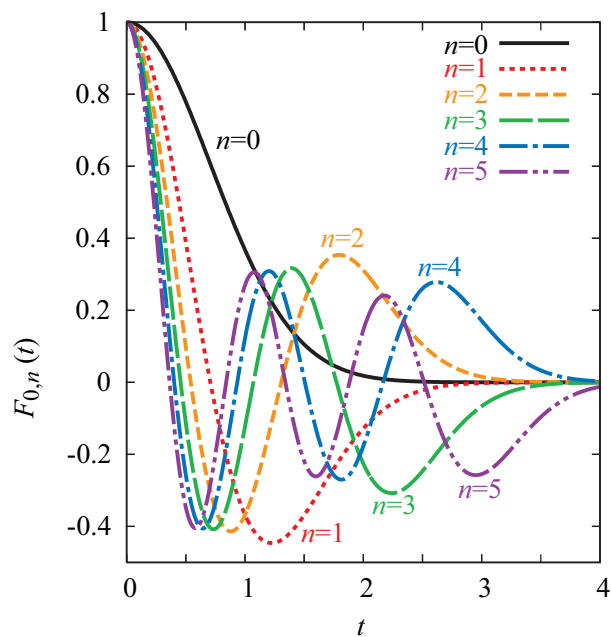


図 5.1. 正規直交系にしたラゲルの多項式 ( $\bar{m} = 0$ )

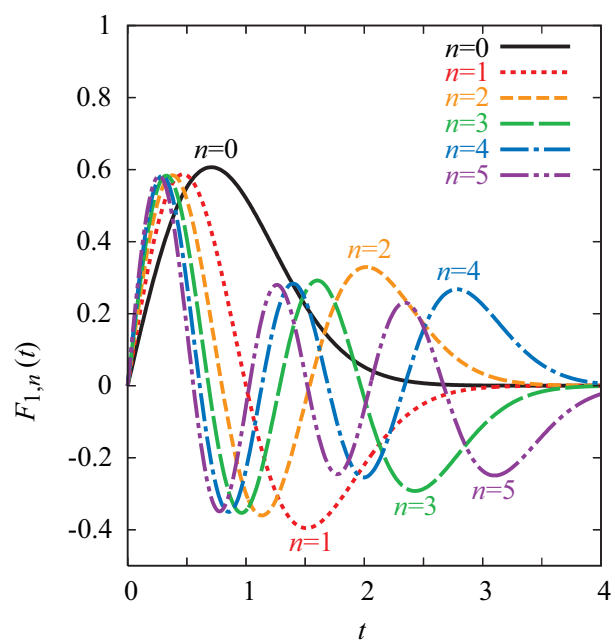


図 5.2. 正規直交系にしたラゲルの多項式 ( $\bar{m} = 1$ )

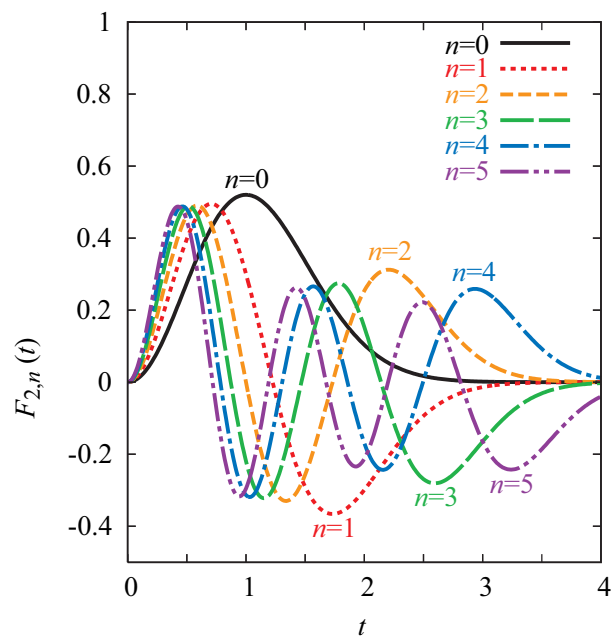


図 5.3. 正規直交系にしたラゲルの多項式 ( $\bar{m} = 2$ )

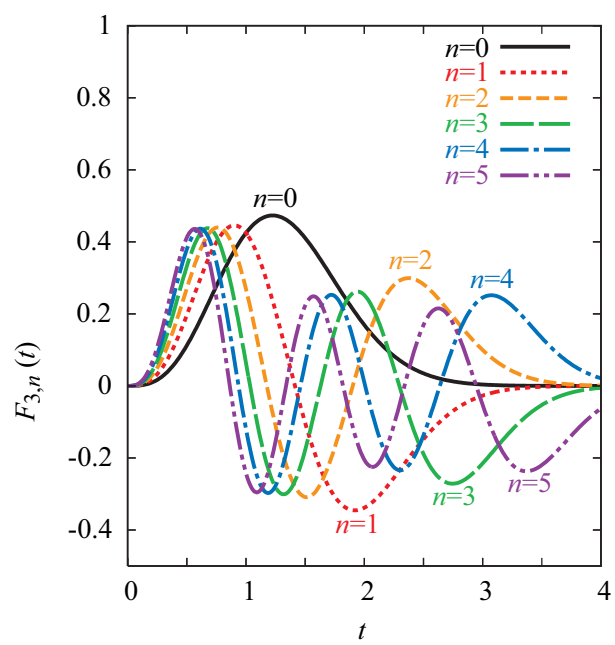


図 5.4. 正規直交系にしたラゲルの多項式 ( $\bar{m} = 3$ )



## 5.6 ビームモード展開

ビームモード関数  $e_{m,n}^{(\pm)}$  を新たに次のように定義する.

$$E_{m,n}^{(\pm)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_{m,n}^{(\pm)} e^{-jkz} \quad (5.170)$$

これより,

$$e_{m,n}^{(\pm)} \equiv \frac{2}{\omega} \cdot F_{m\pm 1,n}(t) \cdot e^{j\{(2n+m\pm 1+1)\tan^{-1}v - \frac{k}{2R}\rho^2\}} \quad (5.171)$$

これに伴い, ビームモード係数  $f_{m,n}^{(\pm)}$  も新たに次のように定義する.

$$g_{m,n}^{(\pm)} \equiv \sqrt{2\pi} f_{m,n}^{(\pm)} \quad (5.172)$$

このとき, ビームモード展開された横断面内電界  $\mathbf{E}_T$  は, 次のように表される.

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_t e^{-jkz} = (E_\rho \mathbf{a}_\rho + E_\phi \mathbf{a}_\phi) e^{-jkz} \quad (5.173)$$

$$E_\rho = \sum_{m=1}^{\infty} E_m^{(-)} \cos(m\phi + \alpha_m^{(-)}) + \sum_{m=0}^{\infty} E_m^{(+)} \cos(m\phi + \alpha_m^{(+)}) \quad (5.174)$$

$$E_\phi = \sum_{m=1}^{\infty} -E_m^{(-)} \sin(m\phi + \alpha_m^{(-)}) + \sum_{m=0}^{\infty} E_m^{(+)} \sin(m\phi + \alpha_m^{(+)}) \quad (5.175)$$

$$E_m^{(\pm)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{m,n}^{(\pm)} e_{m,n}^{(\pm)} \quad (5.176)$$

$$e_{m,n}^{(\pm)} = \sqrt{\frac{n!}{(n+m\pm 1)!}} \left(\frac{2}{\omega}\right) \left(2\frac{\rho^2}{\omega^2}\right)^{\frac{m\pm 1}{2}} L_{n,m\pm 1} \left(2\frac{\rho^2}{\omega^2}\right) \cdot e^{-\frac{\rho^2}{\omega^2} + j\{(2n+m\pm 1+1)\tan^{-1}v - \frac{k}{2R}\rho^2\}} \quad (5.177)$$

上式において,  $m$  について 0 から  $\infty$  までの和のところを,  $-\infty$  から  $\infty$  までの和の形になるよう変形する.

$$E_\rho = \sum_{m=-\infty}^{-1} E_{|m|}^{(-)} \cos(-m\phi + \alpha_{|m|}^{(-)}) + \sum_{m=0}^{\infty} E_m^{(+)} \cos(m\phi + \alpha_m^{(+)}) \quad (5.178)$$

$$E_\phi = \sum_{m=-\infty}^{-1} -E_{|m|}^{(-)} \sin(-m\phi + \alpha_{|m|}^{(-)}) + \sum_{m=0}^{\infty} E_m^{(+)} \sin(m\phi + \alpha_m^{(+)}) \quad (5.179)$$

さらに,

$$E_m \equiv \begin{cases} E_m^{(+)} \\ E_{|m|}^{(-)} \end{cases}, \quad \alpha_m \equiv \begin{cases} \alpha_m^{(+)} & (m = 0, 1, 2, \dots) \\ -\alpha_{|m|}^{(-)} & (m = -1, -2, \dots) \end{cases} \quad (5.180)$$

とおくと、次のようになる。

$$E_\rho = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m \cos(m\phi + \alpha_m) \quad (5.181)$$

$$E_\phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m \sin(m\phi + \alpha_m) \quad (5.182)$$

同様に、

$$\bar{f}_{m,n} \equiv \begin{cases} f_{m,n}^{(+)} \\ f_{|m|,n}^{(-)} \end{cases}, \quad \bar{e}_{m,n} \equiv \begin{cases} e_{m,n}^{(+)} & (m = 0, 1, 2, \dots) \\ e_{|m|,n}^{(-)} & (m = -1, -2, \dots) \end{cases} \quad (5.183)$$

とおけば、

$$E_m = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_{m,n} \bar{e}_{m,n} \quad (m = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (5.184)$$

となり、これより、

$$E_\rho = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_{m,n} \bar{e}_{m,n} \right) \cos(m\phi + \alpha_m) \quad (5.185)$$

$$E_\phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_{m,n} \bar{e}_{m,n} \right) \sin(m\phi + \alpha_m) \quad (5.186)$$

### 5.6.1 ビームモードの伝送電力

電力  $P$  は、ビームモード展開された電界  $\mathbf{E}$  より、

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \iint \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \iint \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dS \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (|E_\rho|^2 + |E_\phi|^2) \rho d\rho d\phi \end{aligned} \quad (5.187)$$

すでに示した直交性より、

$$\begin{aligned} P &= \pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (|f_{m,n}^{(c)}|^2 + |f_{m,n}^{(s)}|^2) \\ &= \pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\bar{f}_{m,n}|^2 \end{aligned} \quad (5.188)$$

ここで、

$$f_{m,n}^{(c)} = \bar{f}_{m,n} \cos \alpha_m \quad (5.189)$$

$$f_{m,n}^{(s)} = \bar{f}_{m,n} \sin \alpha_m \quad (5.190)$$

つまり、ビームモード係数  $\bar{f}_{m,n}$  がわかれば、伝送電力  $P$  が得られることになる。

### 5.6.2 電界の直角座標成分

電界  $\mathbf{E}_t$  を直角座標系の成分で表すと、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_t &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m \mathbf{a}_m \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_{m,n} \bar{e}_{m,n} \right) \left\{ (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_x + (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_y \right\} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_{m,n} \bar{e}_{m,n} \right) \\
&\quad \cdot \left[ \cos \left\{ (m+1)\phi + \alpha_m \right\} \mathbf{a}_x + \sin \left\{ (m+1)\phi + \alpha_m \right\} \mathbf{a}_y \right] \\
&\equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_{m,n} \left( e_{xm,n} \mathbf{a}_x + e_{ym,n} \mathbf{a}_y \right) \\
&\equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_{m,n} \mathbf{e}_{m,n}^{(R)}
\end{aligned} \tag{5.191}$$

ここで、

$$E_m = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_{m,n} \bar{e}_{m,n} \tag{5.192}$$

$$\mathbf{a}_m \equiv \cos(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\rho + \sin(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\phi \tag{5.193}$$

また、

$$\mathbf{a}_\rho = \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y \tag{5.194}$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y \tag{5.195}$$

## 5.7 ビームモード係数

横断面内電界  $\mathbf{E}_T$  のビームモード展開は,

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_t e^{-jkz} \quad (5.196)$$

$$\mathbf{E}_t = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m \mathbf{a}_m \quad (5.197)$$

$$E_m = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_{m,n} \bar{e}_{m,n} \quad (5.198)$$

ここで,  $\bar{f}_{m,n}$  はビームモード係数,  $\bar{e}_{m,n}$  はビームモード関数を示し,

$$\begin{aligned} \bar{e}_{m,n} = & \sqrt{\frac{n!}{(n+|m+1|)!}} \left(\frac{2}{\omega}\right) \left(2\frac{\rho^2}{\omega^2}\right)^{\frac{|m+1|}{2}} L_{n,|m+1|} \left(2\frac{\rho^2}{\omega^2}\right) \\ & \cdot e^{-\frac{\rho^2}{\omega^2} + j\{(2n+|m+1|+1)\tan^{-1}v - \frac{k}{2R}\rho^2\}} \end{aligned} \quad (5.199)$$

また,  $\mathbf{a}_m$  は単位ベクトルを示し,

$$\mathbf{a}_m \equiv \cos(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\rho + \sin(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\phi \quad (5.200)$$

横断面内電界分布  $\mathbf{E}_t$  が与えられれば, 次式によりビームモード展開してビームモード係数  $\bar{f}_{m,n}$  を求めることができる.

$$\bar{f}_{m,n} = \int_0^\infty E_m \bar{e}_{m,n}^* \rho d\rho \quad (5.201)$$

$$E_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{a}_m d\phi \quad (5.202)$$

ただし,  $\bar{e}_{m,n}^*$  はビームモード関数  $\bar{e}_{m,n}$  の複素共役を示す. このとき, ビームウエストでのビーム半径  $\omega_0$ , ビームウエストからの距離  $z$  は,

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1+v^2}} \quad (5.203)$$

$$z = \frac{\bar{R}}{1 + \frac{1}{v^2}} \quad (5.204)$$

ここで,

$$v = \frac{k\omega^2}{2\bar{R}} \quad (5.205)$$

さて,

$$f_{m,n}^{(c)} \equiv \bar{f}_{m,n} \cos \alpha_m \quad (5.206)$$

$$f_{m,n}^{(s)} \equiv \bar{f}_{m,n} \sin \alpha_m \quad (5.207)$$

とおくと,

$$E_\rho = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{m,n} \left( f_{m,n}^{(c)} \cos m\phi - f_{m,n}^{(s)} \sin m\phi \right) \quad (5.208)$$

$$E_\phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{m,n} \left( f_{m,n}^{(c)} \sin m\phi + f_{m,n}^{(s)} \cos m\phi \right) \quad (5.209)$$

さらに,

$$E_m^{(c)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f_{m,n}^{(c)} \bar{e}_{m,n} \quad (5.210)$$

$$E_m^{(s)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f_{m,n}^{(s)} \bar{e}_{m,n} \quad (5.211)$$

とおくと,

$$E_\rho = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( E_m^{(c)} \cos m\phi - E_m^{(s)} \sin m\phi \right) \quad (5.212)$$

$$E_\phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( E_m^{(c)} \sin m\phi + E_m^{(s)} \cos m\phi \right) \quad (5.213)$$

これより,  $\mathbf{E}_t$  は次のようになる.

$$\mathbf{E}_t = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ E_m^{(c)} \mathbf{a}_m^{(c)} + E_m^{(s)} \mathbf{a}_m^{(s)} \right\} \quad (5.214)$$

ここで,  $\mathbf{a}_m^{(c)}$ ,  $\mathbf{a}_m^{(s)}$  は直交単位ベクトルであり,

$$\mathbf{a}_m^{(c)} \equiv \cos m\phi \mathbf{a}_\rho + \sin m\phi \mathbf{a}_\phi \quad (5.215)$$

$$\mathbf{a}_m^{(s)} \equiv -\sin m\phi \mathbf{a}_\rho + \cos m\phi \mathbf{a}_\phi \quad (5.216)$$

横断面内電界分布  $\mathbf{E}_t$ , ビーム半径  $\omega$ , 波面の曲率半径  $\bar{R}$  が与えられれば, ビームモード係数  $f_{m,n}^{(s)}$  は次式により求められる.

$$f_{m,n}^{(c)} = \int_0^\infty E_m^{(c)} \bar{e}_{m,n}^* \rho d\rho \quad (5.217)$$

$$E_m^{(c)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{a}_m^{(c)} d\phi \quad (5.218)$$

## 5.8 単一ビームモードの放射パターン

単一ビームモードの直角座標成分は,

$$\mathbf{e}_{m,n}^{(R)} = e_{xm,n} \mathbf{a}_x + e_{ym,n} \mathbf{a}_y \quad (5.219)$$

ここで,

$$e_{xm,n} = e_{m,n} \cos \{(m+1)\phi + \alpha_m\} \quad (5.220)$$

$$e_{ym,n} = e_{m,n} \sin \{(m+1)\phi + \alpha_m\} \quad (5.221)$$

球座標系  $(r, \theta, \varphi)$  で表した単一ビームモードの放射電界  $\mathbf{E}_s$  は,  $r > 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  において, 次のように近似できる (導出省略).

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{m,n}^{(S)} &\simeq \frac{s}{(\cos \theta)^{3/2}} e^{jk \frac{\rho^2}{2s}} (e_{xm,n} \mathbf{a}_\xi + e_{ym,n} \mathbf{a}_\eta) \\ &= \frac{1}{(\cos \theta)^{3/2}} \cdot \frac{2s}{\omega} \cdot F_{l,n}(t) \cdot e^{j\{(2n+l+1)\tan^{-1} v\}} \\ &\quad \cdot e^{j \frac{k}{2} (\frac{1}{s} - \frac{1}{R}) \rho^2} \left\{ \cos(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\theta + \sin(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\varphi \right\} \end{aligned} \quad (5.222)$$

このとき,  $\varphi = \phi$  より,

$$\mathbf{a}_\xi = \cos \phi \mathbf{a}_\theta - \sin \phi \mathbf{a}_\varphi \quad (5.223)$$

$$\mathbf{a}_\eta = -\sin \phi \mathbf{a}_\theta + \cos \phi \mathbf{a}_\varphi \quad (5.224)$$

このとき, 球座標系  $(r, \theta, \varphi)$  の単位ベクトル  $\mathbf{a}_\theta$ ,  $\mathbf{a}_\varphi$  は次のようになる.

$$\mathbf{a}_\theta = \cos \theta (\cos \varphi \mathbf{a}_x + \sin \varphi \mathbf{a}_y) - \sin \theta \mathbf{a}_z \quad (5.225)$$

$$\mathbf{a}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{a}_x + \cos \varphi \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_\phi \quad (5.226)$$

無限遠方での放射電界を求めるためには,  $r \rightarrow \infty$  とすればよい. いま, 次の図のように  $s_0$ ,  $s$  を定義すると,

$$\tan \theta = \frac{\rho}{s} \quad (5.227)$$

$$z = s_0 + s \quad (5.228)$$

これより, ビーム半径  $\omega$  は次のようになる.

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \sqrt{1 + v^2} \\ &= \omega_0 \sqrt{1 + \left( \frac{2z}{k\omega_0^2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4(s_0 + s)^2}{k^2 \omega_0^2}} \end{aligned} \quad (5.229)$$

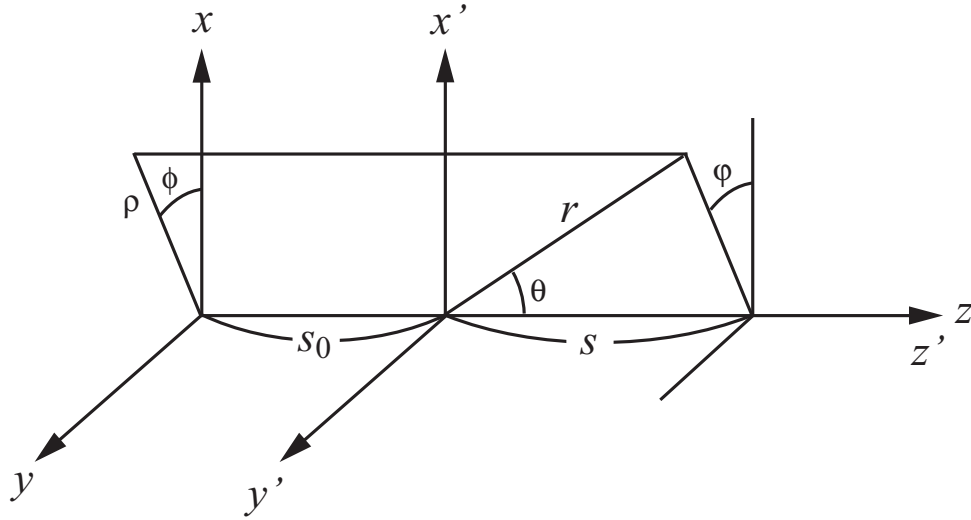


図 5.5. 球座標系の定義

近軸のみに着目するなら， $s \rightarrow \infty$  としても差し支えない．そこで，まず  $t(= \rho/\omega)$  について  $s \rightarrow \infty$  とすると，

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow \infty} t &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho}{\omega} \\
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s \tan \theta}{\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2^2(s_0+s)^2}{k^2\omega_0^2}}} \\
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tan \theta}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^2 + \frac{2^2\left(\frac{s_0}{s}+1\right)^2}{k^2\omega_0^2}}} \\
 &= \frac{\tan \theta}{\sqrt{\frac{2^2}{k^2\omega_0^2}}} \\
 &= \frac{k\omega_0}{2} \tan \theta
 \end{aligned} \tag{5.230}$$

同様にして，

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s}{\omega} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s}{\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2^2(s_0+s)^2}{k^2\omega_0^2}}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\frac{2^2}{k^2\omega_0^2}}} \\
 &= k\omega_0
 \end{aligned} \tag{5.231}$$

また,

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} v &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2z}{k\omega_0^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2(s_0 + s)}{k\omega_0^2} \rightarrow \infty\end{aligned}\tag{5.232}$$

より次のようになる.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tan^{-1} v = \frac{\pi}{2}\tag{5.233}$$

一方, 波面の曲率半径  $\bar{R}$  は,

$$\begin{aligned}\bar{R} &= z \left( 1 + \frac{1}{v^2} \right) \\ &= z \left\{ 1 + \left( \frac{k\omega_0^2}{2z} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{4z^2 + k^2\omega_0^4}{4z} \\ &= \frac{4(s_0 + s)^2 + k^2\omega_0^4}{4(s_0 + s)}\end{aligned}\tag{5.234}$$

となるので,

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{\bar{R}} \right) \rho^2 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{4(s_0 + s)}{4(s_0 + s)^2 + k^2\omega_0^4} \right\} s^2 \tan^2 \theta \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(4s_0s + k^2\omega_0^4)s^2}{s\{4(s_0 + s)^2 + k^2\omega_0^4\}} \tan^2 \theta \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s_0 + \frac{k^2\omega_0^4}{4s}}{\left( \frac{s_0}{s} + 1 \right)^2 + \frac{k^2\omega_0^4}{4s^2}} \tan^2 \theta \\ &= s_0 \tan^2 \theta\end{aligned}\tag{5.235}$$

よって, 無限遠方の放射電界は, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{e}_{m,n}^{(S)} &= \frac{k\omega_0}{(\cos \theta)^{3/2}} \cdot F_{l,n}(t) \cdot e^{j(2n+l+1)\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{k}{2}s_0 \tan^2 \theta} \\ &\quad \cdot \left\{ \cos(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\theta + \sin(m\phi + \alpha_m) \mathbf{a}_\varphi \right\}\end{aligned}\tag{5.236}$$

ここで,

$$F_{l,n}(t) = \sqrt{\frac{n!}{(n+l)!}} \sqrt{2^l t^l} L_{n,l}(2t^2) e^{-t^2}\tag{5.237}$$

$$l = |m + 1|\tag{5.238}$$

$$t = \frac{k\omega_0}{2} \tan \theta\tag{5.239}$$



## 5.9 ビームモードのホーンアンテナへの応用

### 5.9.1 1次ホーンおよび鏡面上のビームモードのパラメータ

反射鏡アンテナの一次放射器として用いるホーンアンテナ（開口径  $D_h$ ，長さ  $L = R_h$ ）の設計に対して，近傍界が考慮できるビームモードは非常に有用である．ホーンの開口面分布をビームモード展開すればビーム半径  $\omega_h$  および波面の曲率半径  $R_h$  が求められ，開口面からビームウエストまでの距離  $z_h$  およびビームウエストにおけるビーム半径  $\omega_0$  が決まる．

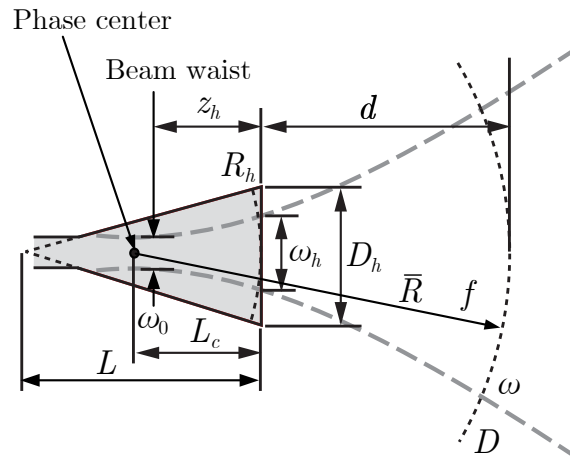


図 5.6. ホーンに対するビームモード・パラメータ

### 5.9.2 基本ビームモード

基本ビームモード  $m = -1$ ， $n = 0$  のビームモード関数  $\bar{e}_{-1,0}$  は，

$$\begin{aligned}\bar{e}_{-1,0} &= \frac{2}{\omega} L_{0,0} \left( 2 \frac{\rho^2}{\omega^2} \right) e^{j(\tan^{-1} v - \frac{k}{R} \rho^2)} \\ &= \frac{2}{\omega} e^{-\left(\frac{\rho}{\omega}\right)^2} e^{j(\tan^{-1} v - \frac{k}{R} \rho^2)}\end{aligned}\quad (5.240)$$

ビームウエスト位置は  $z = 0$  であり， $\omega|_{z=0} = \omega_0$ ， $\bar{R}|_{z=0} \rightarrow \infty$ ， $v|_{z=0} = 0$  より，ビームウエストでのビームモード関数

$$\bar{e}_{-1,0} \Big|_{z=0} = \frac{2}{\omega_0} e^{-\left(\frac{\rho}{\omega_0}\right)^2}\quad (5.241)$$

ピーク値で規格化すると,

$$\frac{\bar{e}_{-1,0}}{\bar{e}_{-1,0}|_{z=0,\rho=0}} = \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\left(\frac{\rho}{\omega}\right)^2} e^{j(\tan^{-1} v - \frac{k}{R} \rho^2)} \equiv \tilde{e}_{-1,0} \quad (5.242)$$

$$|\tilde{e}_{-1,0}|^2 = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 e^{-2\left(\frac{\rho}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1+v^2} e^{-2\left(\frac{\rho}{\omega}\right)^2} \quad (5.243)$$

### 5.9.3 鏡面上のビーム半径

基本ビームモードを開口径  $D$  の反射鏡に照射したときのエッジレベルを  $-L_e$  [dB], このときのビーム半径を  $\omega$  とすると,

$$10^{\frac{-L_e}{20}} = e^{-\left(\frac{D}{2\omega}\right)^2} \quad (5.244)$$

$$\log_{10} 10^{\frac{-L_e}{20}} = \log_{10} e^{-\left(\frac{D}{2\omega}\right)^2} \quad (5.245)$$

$$\frac{-L_e}{20} = -\left(\frac{D}{2\omega}\right)^2 \log_{10} e \quad (5.246)$$

$$\omega^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{20 \log_{10} e}{L_e} \simeq \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{8.69}{L_e} \quad (5.247)$$

よって, ビーム半径  $\omega$  は,

$$\omega = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{8.69}{L_e}} \quad (5.248)$$

### 5.9.4 ホーンアンテナ

ホーンの開口径  $D_h$ , ホーン開口面での波面の曲率半径  $R_h$  は, ホーン開口面でのビーム半径を  $\omega_h$ , 開口面からビームウエストまでの距離を  $z_h$  とすると ( $R_h \geq z_h$  より, ホーンのビームウエスト位置はホーン内部にある),

$$D_h = 2\omega_h \Omega_0 \quad (5.249)$$

$$R_h = z_h \left(1 + \frac{1}{v_h^2}\right) \quad (5.250)$$

ここで,

$$\omega_h = \omega_0 \sqrt{1 + v_h^2} \quad (5.251)$$

$$v_h = \frac{2}{k\omega_0^2} z_h \quad (5.252)$$

また、 $\omega_0$  はビームウエストにおけるビーム半径を示し、

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1+v^2}} \quad (5.253)$$

$$v = \frac{2}{k\omega_0^2}z \quad (5.254)$$

ただし、 $\omega$  は鏡面上のビーム半径、 $z$  は鏡面からビームウエストまでの距離を示す。反射鏡に照射されるビームモードの波面の曲率半径を  $\bar{R}$  とすると、

$$z = z_h + d = \frac{\bar{R}}{1 + \frac{1}{v^2}} \quad (5.255)$$

パラメータ  $v$  を変形すると、

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{k\omega_0^2}z \\ &= \frac{2}{k} \cdot \frac{1+v^2}{\omega^2} \cdot \frac{\bar{R}}{1 + \frac{1}{v^2}} \\ &= \frac{2\bar{R}}{k\omega^2} \cdot \frac{(1+v^2)v^2}{1+v^2} \\ &= \frac{2\bar{R}}{k\omega^2}v^2 \end{aligned} \quad (5.256)$$

よって、

$$\begin{aligned} v &= \frac{k\omega^2}{2\bar{R}} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\omega^2}{2\bar{R}} \\ &= \frac{\pi\omega^2}{\lambda\bar{R}} \end{aligned} \quad (5.257)$$

ただし、反射鏡の焦点距離は  $f = \bar{R}$  とする。ビームウエストでのビーム半径  $\omega_0$  を消去すると、ホーンの開口径  $D_h$  は、

$$\begin{aligned} D_h &= 2\Omega_0\omega_0\sqrt{1+v_h^2} \\ &= 2\Omega_0\omega\sqrt{\frac{1+v_h^2}{1+v^2}} \end{aligned} \quad (5.258)$$

また、ビームウエストから鏡面までの距離は  $z_h + d$  ゆえ、

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{k\omega_0^2}(z_h + d) \\ v_h &= \frac{2}{k\omega_0^2}z_h \end{aligned} \quad (5.259)$$

これより、

$$z_h + d = \frac{v}{v_h}z_h = \frac{\bar{R}}{1 + \frac{1}{v^2}} = \bar{R} \frac{v^2}{v^2 + 1} \quad (5.260)$$

ホーンの軸長（電気長） $L$  は， ホーン開口面での波面の曲率半径  $R_h$  に等しく， 鏡面での波面の曲率中心を鏡面の焦点と一致させて， 焦点距離  $f_r = \bar{R}$  より，

$$\begin{aligned} L = R_h &= z_h \left( 1 + \frac{1}{v_h^2} \right) \\ &= \frac{v_h}{v} \cdot \bar{R} \frac{v^2}{v^2 + 1} \cdot \frac{v_h^2 + 1}{v_h^2} \\ &= \frac{f_r v}{1 + v^2} \frac{1 + v_h^2}{v_h} \end{aligned} \quad (5.261)$$

また，

$$z_h = \frac{v_h}{v - v_h} d \quad (5.262)$$

より，

$$\begin{aligned} z_h + d &= \frac{v_h}{v - v_h} d + d \\ &= \frac{v}{v - v_h} d \\ &= \frac{\bar{R}}{1 + \frac{1}{v^2}} \\ v - v_h &= v d \frac{1 + \frac{1}{v^2}}{\bar{R}} \\ &= \frac{d}{\bar{R}} \left( v + \frac{1}{v} \right) \\ v_h &= v - \frac{d}{\bar{R}} \left( v + \frac{1}{v} \right) \\ &= v - \frac{d}{f_r} \left( v + \frac{1}{v} \right) \end{aligned} \quad (5.263)$$

ここで，

$$\begin{aligned} v &= \frac{k\omega^2}{2\bar{R}} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\omega^2}{2\bar{R}} \\ &= \frac{\pi\omega^2}{\lambda\bar{R}} = \frac{\pi\omega^2}{\lambda f_r} \end{aligned} \quad (5.264)$$

### 5.9.5 ホーンアンテナの位相中心

開口面から距離  $d$  離れた観測点におけるビームモードの波面の曲率半径  $\bar{R}$  は， ビームウエストから観測点までの距離  $z_h + d$  を用いて次のようになる．

$$\bar{R} = (z_h + d) \left( 1 + \frac{1}{v^2} \right) \quad (5.265)$$

ここで,

$$v = \frac{2}{k\omega_0^2}(z_h + d) \quad (5.266)$$

ホーンアンテナの位相中心は鏡面上の波面の曲率中心と一致させるため, ホーン開口面から位相中心 (つまり波面の曲率中心) までの距離  $L_c$  は,

$$\begin{aligned} L_c &= \bar{R} - d \\ &= (z_h + d) \left( 1 + \frac{1}{v^2} \right) - d \\ &= (z_h + d) \left( 1 + \frac{1}{\left\{ \frac{2}{k\omega_0^2}(z_h + d) \right\}^2} \right) - d \\ &= (z_h + d) \left\{ 1 + \frac{k^2\omega_0^4}{4(z_h + d)^2} \right\} - d \\ &= (z_h + d) \frac{4(z_h + d)^2 + k^2\omega_0^4}{4(z_h + d)^2} - d \\ &= \frac{4(z_h + d)^2 + k^2\omega_0^4 - 4(z_h + d)d}{4(z_h + d)} \end{aligned} \quad (5.267)$$

さらに変形するため,  $k^2\omega_0^4$  について計算する. まず,

$$\omega_0 = \frac{\omega_h}{\sqrt{1 + v_h^2}} \quad (5.268)$$

$$v_h = \frac{k\omega_h^2}{2R_h} \quad (5.269)$$

より,  $\omega_h$  を消去すると,

$$v_h = \frac{k\omega_0^2(1 + v_h^2)}{2R_h} \quad (5.270)$$

$$\begin{aligned} k\omega_0^2 &= \frac{2R_h}{1 + v_h^2} v_h = \frac{2R_h}{1 + \frac{1}{v_h^2}} \cdot \frac{1}{v_h} \\ &= \frac{2R_h}{v_h} \frac{z_h}{R_h} \\ &= \frac{2z_h}{v_h} \end{aligned} \quad (5.271)$$

$$z_h = \frac{R_h}{1 + \frac{1}{v_h^2}} \quad (5.272)$$

$$k^2\omega_0^4 = \frac{4z_h^2}{v_h^2} \quad (5.273)$$

ここで,

$$1 + \frac{1}{v_h^2} = \frac{R_h}{z_h} \quad (5.274)$$

$$v_h^2 = \frac{1}{\frac{R_h}{z_h} - 1} = \frac{z_h}{R_h - z_h} \quad (5.275)$$

これより,

$$k^2 \omega_0^4 = 4z_h^2 \frac{R_h - z_h}{z_h} = 4z_h(R_h - z_h) \quad (5.276)$$

これを用いると,

$$\begin{aligned} L_c &= \frac{4(z_h^2 + 2z_h d + d^2) + 4z_h(R_h - z_h) - 4(z_h d + d^2)}{4(z_h + d)} \\ &= \frac{z_h d + z_h R_h}{z_h + d} \\ &= z_h \frac{R_h + d}{z_h + d} \end{aligned} \quad (5.277)$$

特別な場合として,

- $d = 0$  (開口面) とおいて  $L_c$  を求めると, 開口面での波面の曲率半径  $L_c = R_h$  が得られる.
- $d = \infty$  (観測点が無限遠方) とおけば, 遠方放射パターンの位相中心  $L_c = z_h$  が得られる.
- $t = 0$ ,  $d = \infty$  とおけば, 円筒導波管開口による遠方放射パターンの位相中心が得られ,  $L_c = 0$  となって位相中心が開口面上にあることがわかる.

### 5.9.6 軸長が最小となる最適 1 次ホーン

1 次ホーンの軸長 (電気長)  $L$ , すなわちホーン開口面の波面の曲率半径  $R_h$  は, 式 (5.261) に示すように  $v_h$  の関数であり, 極値の条件は,

$$\frac{dR_h}{dv_h} = 0 \quad (5.278)$$

つまり,

$$\begin{aligned} \frac{dR_h}{dv_h} &= \frac{\bar{R}v}{1 + v^2} \cdot \frac{d}{dv_h} \left( \frac{1 + v_h^2}{v_h} \right) \\ &= \frac{\bar{R}v}{1 + v^2} \frac{2v_h^2 - (1 + v_h^2)}{v_h^2} \\ &= \frac{\bar{R}v}{1 + v^2} \frac{v_h^2 - 1}{v_h^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.279)$$

したがって、 $v_h^2 = 1$ . 開き角が正のホーンを考えれば、 $v_h = 1$ . このとき  $R_h$  は最小となる. これより、軸長最小の最適 1 次ホーンの開口径  $D_{h,min}$ , 軸長  $R_{h,min}$  は,

$$\begin{aligned} D_{h,min} &= D_h \Big|_{v_h=1} = 2\Omega_0\omega \sqrt{\frac{1+1}{1+v^2}} \\ &= 2\Omega_0\omega \sqrt{\frac{2}{1+v^2}} \end{aligned} \quad (5.280)$$

$$\begin{aligned} R_{h,min} &= R_h \Big|_{v_h=1} = \frac{\bar{R}v}{1+v^2} \frac{1+1}{1} \\ &= \frac{2\bar{R}v}{1+v^2} \end{aligned} \quad (5.281)$$

ホーン開口面における位相遅れの大きさを表すパラメータ  $t$  は,

$$\begin{aligned} t &= \frac{D_h^2}{8R_h\lambda} = \frac{(2\omega_h\Omega_0)^2}{8R_h\lambda} \\ &= \frac{\omega_h^2\Omega_0^2}{2R_h\lambda} \\ &= \frac{\Omega_0^2 v_h}{2\pi} \end{aligned} \quad (5.282)$$

これより,

$$v_h = \frac{2\pi t}{\Omega_0^2} \quad (5.283)$$

軸長が最小となる最適 1 次ホーンの  $t$  パラメータは、 $v_h = 1$  より,

$$\begin{aligned} t_{Rmin} &= t \Big|_{v_h=1} = \frac{\Omega_0^2}{2\pi} v_h \Big|_{v_h=1} \\ &= \frac{\Omega_0^2}{2\pi} \end{aligned} \quad (5.284)$$

ただし、 $\Omega_0$  はモードによって決まる定数であり、基本ビームモード（ガウス分布）の電力が最大となる条件で  $\Omega_0$  を求めると<sup>†</sup>,

- コルゲートホーン（corrugated horn）の場合、 $\Omega_0 = 1.554$
- TE<sub>11</sub> モードの円すいホーン（conical horn）の場合、 $\Omega_0 = 1.302$

このときの  $t$  パラメータ  $t_{Rmin}$  は,

$$t_{Rmin} = \begin{cases} 0.384 & (\text{コルゲートモード}) \\ 0.270 & (\text{TE}_{11} \text{モード}) \end{cases} \quad (5.285)$$

ビームウエストでのビーム半径，ホーン開口面からビームウエストまでの距離は，

$$\omega_0 \Big|_{v_h=1} = \frac{\omega_h}{\sqrt{1+v_h^2}} \Big|_{v_h=1} = \frac{\omega_h}{\sqrt{2}} \quad (5.286)$$

$$z_h \Big|_{v_h=1} = \frac{R_{h,min}}{1+\frac{1}{v_h^2}} \Big|_{v_h=1} = \frac{R_{h,min}}{2} \quad (5.287)$$

式 (5.262) より，ホーン開口面から鏡面までの距離は，

$$\begin{aligned} d \Big|_{v_h=1} &= \frac{v-v_h}{v_h} z_h \Big|_{v_h=1} \\ &= (v-1) z_h \Big|_{v_h=1} \\ &= (v-1) \frac{R_{h,min}}{2} \end{aligned} \quad (5.288)$$

ここで，

$$v = \frac{k\omega^2}{2\bar{R}} \quad (5.289)$$

ホーン開口面から位相中心までの距離は，

$$\begin{aligned} L_c \Big|_{v_h=1} &= z_h \frac{R_{h,min}+d}{z_h+d} \Big|_{v_h=1} \\ &= \frac{1+v}{v} \frac{R_{h,min}}{2} \end{aligned} \quad (5.290)$$

このとき，ホーン開口面でのビーム半径  $\omega_h$  は，

$$\omega_h = \frac{D_{h,min}}{2\Omega_0} \quad (5.291)$$

### 5.9.7 最適円錐ホーン（ホーン単体の軸長最小の条件）

ホーンアンテナ単体で最適円錐ホーンの条件を求めよう．

$$\begin{aligned} v_h &= \frac{\pi\omega_h^2}{\lambda R_h} \\ &= \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda R_h} (1+v_h^2) \end{aligned} \quad (5.292)$$

$$\omega_0^2 = \frac{\lambda R_h}{\pi} \frac{v_h}{1+v_h^2} \quad (5.293)$$



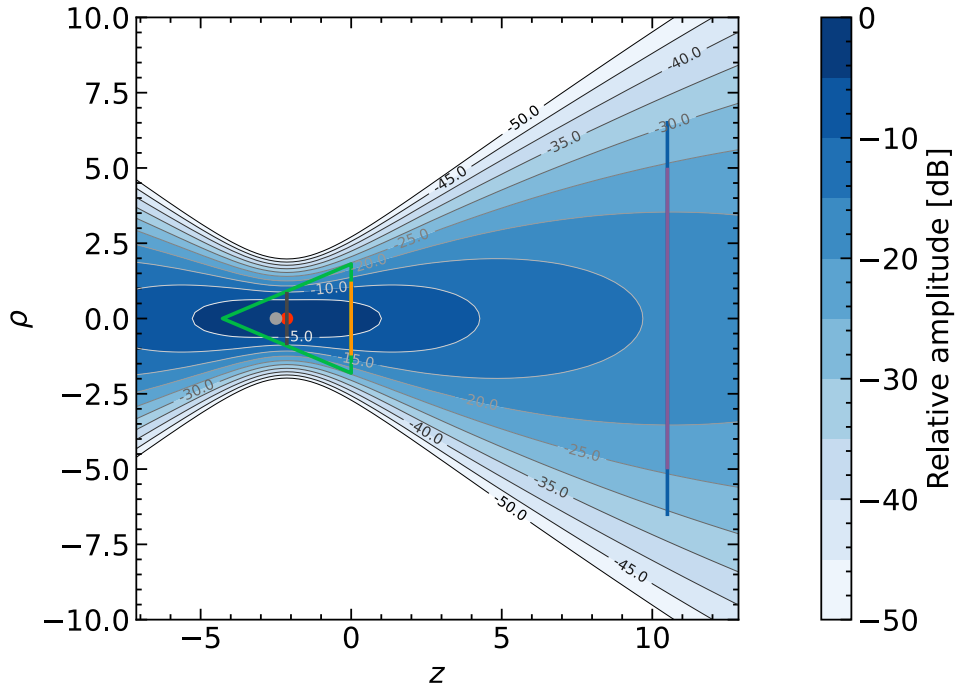


図 5.7. 軸長が最小となる最適 1 次ホーンの例および電力分布

これより,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda R_h}{\pi} \frac{v_h}{1 + v_h^2}} \quad (5.294)$$

軸長  $R_h$  が一定のとき, 最大利得を得る条件を求めればよい. これは, ビームウエストでのビーム半径  $\omega_0$  が最大となるときで,

$$\frac{d\omega_0}{dv_h} = 0 \quad (5.295)$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_0}{dv_h} &= \sqrt{\frac{\lambda R_h}{\pi}} \cdot \frac{d}{dv_h} \left( \frac{v_h}{1 + v_h^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \\ \therefore \left( \frac{1 + v_h^2}{v_h} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1 - v_h^2}{(1 + v_h^2)^2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.296)$$

これより,  $v_h = 1$  のとき, ビーム半径  $\omega_0$  が最大となる. これは軸長が最小となる最適 1 次ホーンと同じ条件である. いま, ホーンの開口径  $D_h$  が与えられれば, ホーン開口面でのビーム半径  $\omega_h$  は,

$$\omega_h = \frac{D_h}{2\Omega_0} \quad (5.297)$$

最適円錐ホーンの条件  $v_h = 1$  より，ホーン開口面での波面の曲率半径  $R_h$  は，

$$v_h = \frac{\pi\omega_h^2}{\lambda R_h} = 1 \quad (5.298)$$

$$\therefore R_h = \frac{\pi\omega_h^2}{\lambda} = L \quad (5.299)$$

なお，開口面法によって求めた最適円錐ホーンの  $t$  パラメータの値は，

$$t = \begin{cases} 0.49 & (\text{コルゲートモード}) \\ 0.39 & (\text{TE}_{11}\text{モード}) \end{cases} \quad (5.300)$$

両者の差異は，高次のビームモードによる影響などによるものである<sup>\*1</sup>。

---

<sup>\*1</sup> 蛭子井貴，片木孝至，”一次放射器としての最適円錐ホーン，”信学全大，746（1984）

## 5.10 ビームモードによる 1 次ホーン的设计例

### 5.10.1 1 次ホーンの軸長を与えた設計

#### 問題

鏡面上の曲率半径  $\bar{R}$ 、鏡面の開口径  $D$ 、エッジレベル  $L_e[\text{dB}]$ 、1 次ホーンの軸長  $L$  が与えられた場合、鏡面上のビーム半径  $\omega$ 、ホーンの開口面におけるビーム半径  $\omega_h$ 、ホーン開口径  $D_h$ 、ホーン開口面からビームウエストまでの長さ  $z_h$ 、ホーン開口面から位相中心までの長さ  $L_c$ 、ホーン開口面から鏡面までの距離  $d$  を求めよ。

■ **略解** 鏡面上のビーム半径  $\omega$ 、ビームウエストでのビーム半径  $\omega_0$  は、

$$\omega = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{8.69}{L_e}} \quad (5.301)$$

$$v = \frac{k\omega^2}{2\bar{R}} \quad (5.302)$$

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1+v^2}} \quad (5.303)$$

ホーン開口径  $D_h$ 、ホーンの開口面におけるビーム半径  $\omega_h$  は、

$$D_h = 2\omega_h\Omega_0 \quad (5.304)$$

$$\omega_h = \omega_0\sqrt{1+v_h^2} \quad (5.305)$$

$$v_h = \frac{k\omega_h^2}{2R_h} \quad (5.306)$$

$$R_h = L \quad (5.307)$$

これより、 $v_h$  を消去すると、

$$\begin{aligned} \omega_h^2 &= \omega_0^2(1+v_h^2) \\ &= \omega_0^2 \left\{ 1 + \left( \frac{k\omega_h^2}{2R_h} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.308)$$

これを解けば、

$$\omega_h^4 - 2\frac{2R_h^2}{k^2\omega_0^2}\omega_h^2 + \frac{4R_h^2}{k^2} = 0 \quad (5.309)$$

$$\therefore \omega_h^2 = \frac{2R_h^2}{k^2\omega_0^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{k^2\omega_0^4}{R_h^2}} \right) \quad (5.310)$$

ここで、 $\omega_h^2$  は実数ゆえ、 $R_h = L$  より、

$$1 - \frac{k^2 \omega_0^4}{L^2} \geq 0 \quad (5.311)$$

軸長  $L$  は正ゆえ、

$$L \geq k\omega_0^2 \quad (5.312)$$

軸長の最小値  $L_{min}$  は、

$$L_{min} = k\omega_0^2 \quad (5.313)$$

これは最適 1 次ホーンの軸長と一致する。これより軸長が長い場合には、同じ軸長の解が 2 つ存在し、式 (5.310) のプラス符号のときホーン開口径が小さく、逆にマイナス符号のときホーン開口径が大きくなる。

ビームウエストからホーン開口面までの長さ  $z_h$ 、ホーン開口面から位相中心までの長さ  $L_c$ 、ホーン開口面から鏡面までの距離  $d$  は、

$$z_h = \frac{R_h}{1 + \frac{1}{v_h^2}} \quad (5.314)$$

$$\begin{aligned} L_c &= \bar{R} - d = \bar{R} - (z - z_h) \\ &= \bar{R} - \left( \frac{\bar{R}}{1 + \frac{1}{v^2}} - \frac{R_h}{1 + \frac{1}{v_h^2}} \right) \\ &= \bar{R} \left( 1 - \frac{v^2}{v^2 + 1} \right) + \frac{v_h^2 R_h}{v_h^2 + 1} \\ &= \frac{\bar{R}}{1 + v^2} + \frac{R_h v_h^2}{1 + v_h^2} \end{aligned} \quad (5.315)$$

$$d = \bar{R} - L_c \quad (5.316)$$

特別な場合として、 $R_h \rightarrow \infty$  のとき（導波管開口）、 $\omega_h = \omega_0$ 、 $v_h = 0$  より、

$$\begin{aligned} L_c &= \frac{\bar{R}}{1 + v^2} \\ &= \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \bar{R} \end{aligned} \quad (5.317)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2(1 + v^2) \quad (5.318)$$

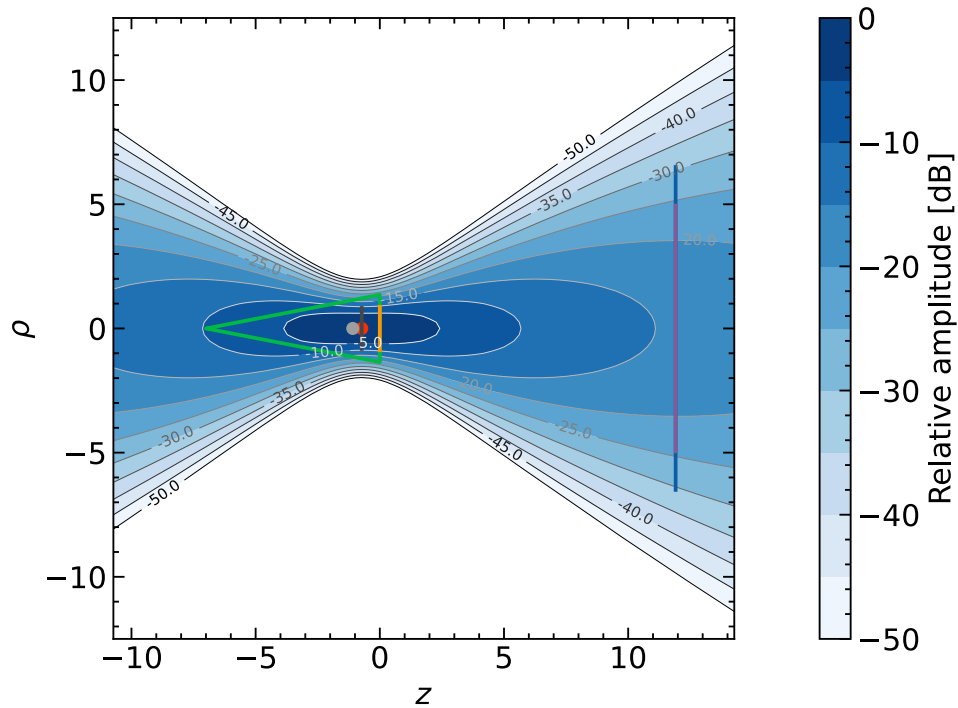


図 5.8. 1 次ホーン的设计例（軸長を与えた場合）

### 5.10.2 既存のホーンアンテナを 1 次放射器として用いる場合

#### 問題

ホーンアンテナの開口径  $D_h$ , 軸長  $L$ , 鏡面の開口径  $D$  が与えられている場合, 鏡面上の波面の曲率半径  $\bar{R}$ , ホーン開口面から鏡面までの距離  $d$ , ホーン開口面から位相中心までの距離  $L_c$ , 鏡面の焦点距離  $f_r$  を求めよ.

■ 略解 ホーン開口面での波面の曲率半径  $R_h$  およびビーム半径  $\omega_h$  は,

$$R_h = L \quad (5.319)$$

$$\omega_h = \frac{D_h}{2\Omega_0} \quad (5.320)$$

ビームウエストでのビーム半径  $\omega_0$ , ホーン開口面からビームウエストまでの距離  $z_h$  は,

$$\omega_0 = \frac{\omega_h}{\sqrt{1 + v_h^2}} \quad (5.321)$$

$$z_h = \frac{k\omega_0^2}{2} v_h \quad (5.322)$$

ここで,

$$v_h = \frac{k\omega_h^2}{2R_h} \quad (5.323)$$

鏡面上のビーム半径  $\omega$  は,

$$\omega = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{8.69}{L_e}} \quad (5.324)$$

ここで,

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1+v^2}} \quad (5.325)$$

$$\therefore v = \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \quad (5.326)$$

ホーン開口面から鏡面までの距離  $d$  は,

$$v = \frac{2}{k\omega_0^2}(z_h + d) \quad (5.327)$$

$$\therefore d = \frac{k\omega_0^2}{2}v - z_h \quad (5.328)$$

また, 鏡面上の波面の曲率半径  $\bar{R}$ , 鏡面の焦点距離  $f_r$  は,

$$v = \frac{k\omega^2}{2\bar{R}} \quad (5.329)$$

$$\therefore \bar{R} = \frac{k\omega^2}{2v} = f_r \quad (5.330)$$

ホーン開口面から位相中心までの距離  $L_c$  は,

$$L_c = \bar{R} - d \quad (5.331)$$

### 5.10.3 鏡面とホーンとの距離を与えた1次ホーン的设计

#### 問題

鏡面上の波面の曲率半径  $\bar{R}$ , 鏡面の開口径  $D$ , エッジレベル  $L_e$ [dB], ホーン開口面から鏡面までの距離  $d$  が与えられた場合, 鏡面上のビーム半径  $\omega$ , ビームウエストでのビーム半径  $\omega_0$ , ホーン開口面から位相中心までの長さ  $L_c$  およびビームウエストまでの長さ  $z_h$ , ホーン開口面におけるビーム半径  $\omega_h$ , ホーンの開口径  $D_h$  および軸長  $L$  を求めよ.

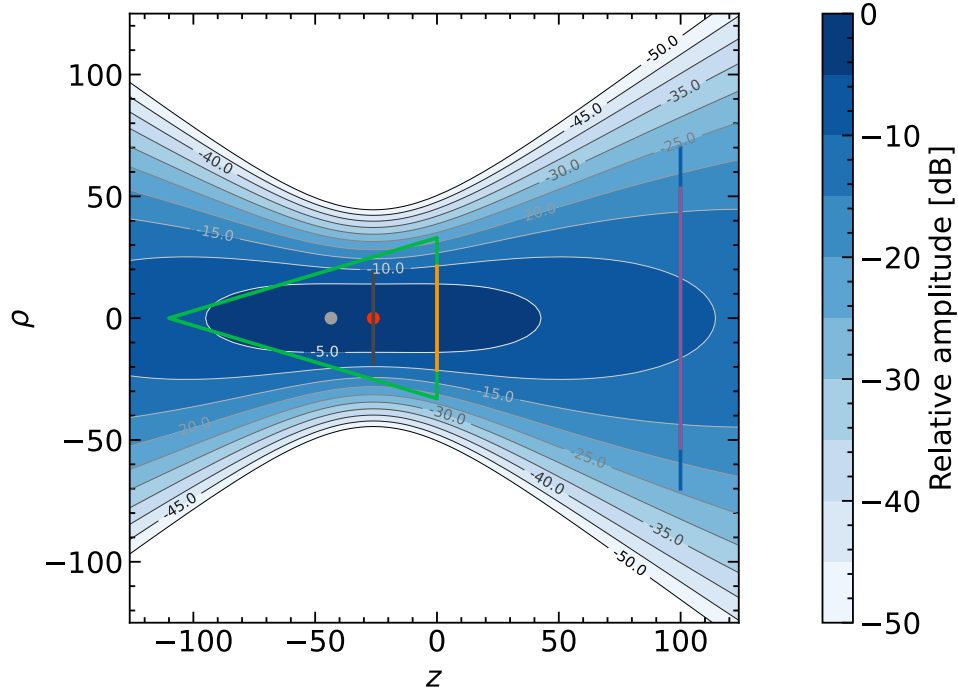


図 5.9. 13GHz で 1 次ホーンを設計した場合

■ **略解** 鏡面上およびビームウエストでのビーム半径  $\omega$ ,  $\omega_0$ , 位相中心までの長さ  $L_c$  は,

$$\omega = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{8.69}{L_e}} \quad (5.332)$$

$$v = \frac{k\omega^2}{2\bar{R}} \quad (5.333)$$

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1+v^2}} \quad (5.334)$$

$$L_c = \bar{R} - d \quad (5.335)$$

ホーン開口面からビームウエストまでの長さ  $z_h$  は,

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{k\omega_0^2}(z_h + d) \\ \therefore z_h &= \frac{k\omega_0^2}{2}v - d \end{aligned} \quad (5.336)$$

ホーンの開口面におけるビーム半径  $\omega_h$ , ホーン開口径  $D_h$  および軸長  $R_h$  は,

$$\omega_h = \omega_0 \sqrt{1+v_h^2} \quad (5.337)$$

$$D_h = 2\omega_h \Omega_0 \quad (5.338)$$

$$v_h = \frac{2}{k\omega_0^2}z_h \quad (5.339)$$

$$R_h = \frac{k\omega_h^2}{2v_h} = L \quad (5.340)$$

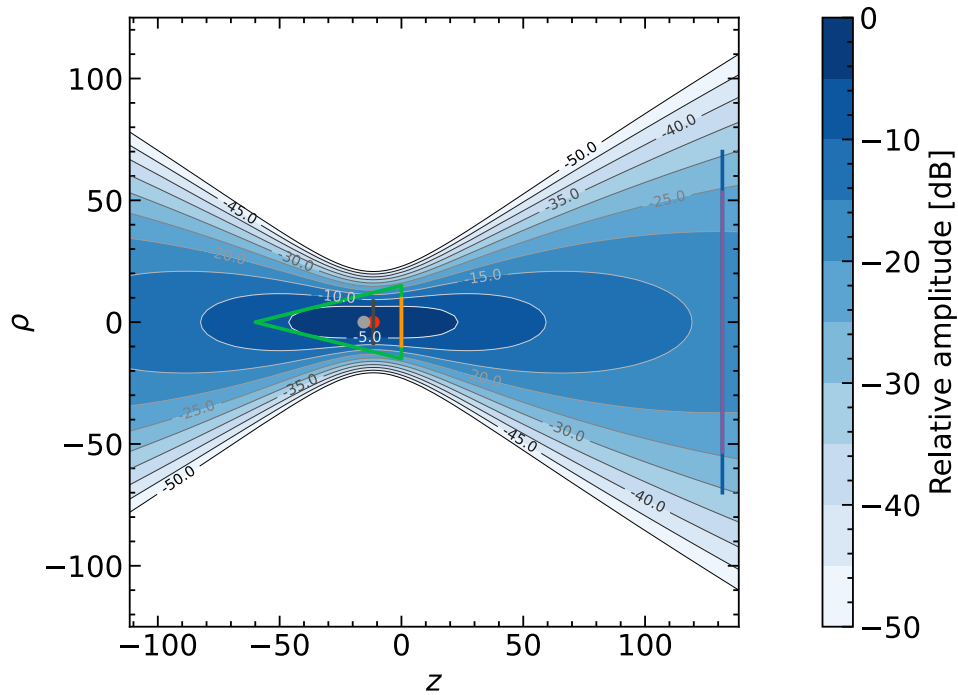


図 5.10. 30GHz で 1 次ホーンを設計した場合

#### 5.10.4 開き角を与えたホーン単体の設計

##### 問題

ビームウエストでのビーム半径  $\omega_0$ , 開き角半値を  $\theta$  として,  $\alpha = \tan \theta = \frac{D_h}{2L}$  が与えられた場合, ホーンの開口径  $D_h$ , ホーンの開口面におけるビーム半径  $\omega_h$ , ホーンの軸長  $L(= R_h)$  を求めよ.

■ **略解** ホーンの開口面におけるビーム半径  $\omega_h$  は,

$$\omega_h = \frac{D_h}{2\Omega_0} = \frac{2\alpha L}{2\Omega_0} = \frac{\alpha L}{\Omega_0} \quad (5.341)$$

一方, ビームウエストでのビーム半径  $\omega_0$  より,

$$\omega_h^2 = \omega_0^2(1 + v_h^2) \quad (5.342)$$



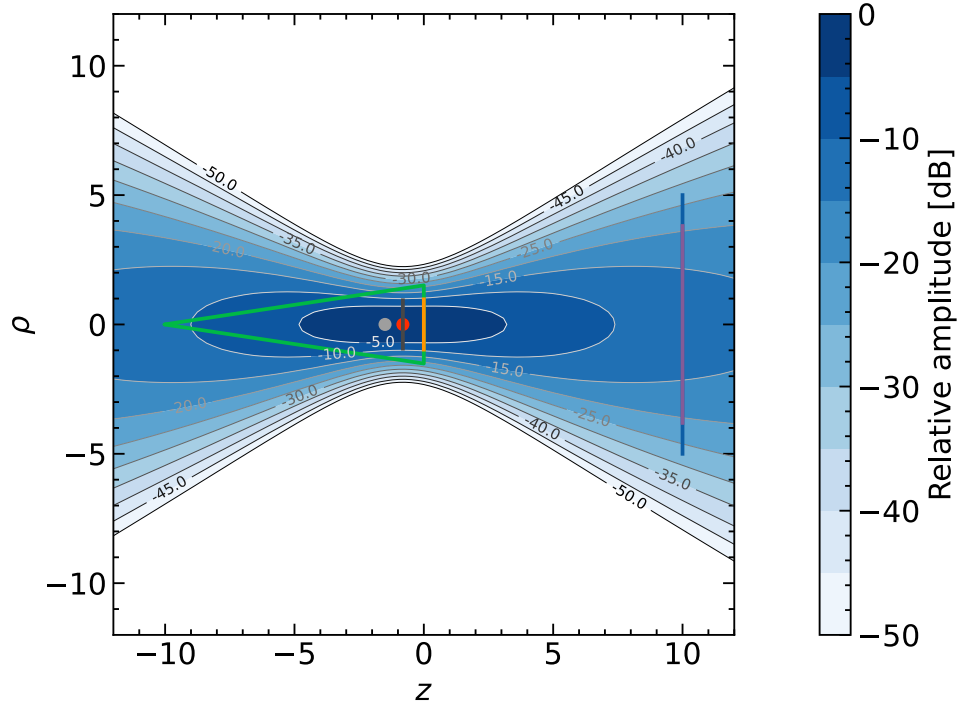


図 5.11. 距離  $d/D = 1$ , 波面の曲率半径  $\bar{R}/D = 1.15$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\alpha L}{\Omega_0}\right)^2 &= \omega_0^2 \left\{ 1 + \left(\frac{k\omega_h^2}{2L}\right)^2 \right\} \\
 &= \omega_0^2 + \omega_0^2 \left(\frac{k}{2L} \frac{\alpha^2 L^2}{\Omega_0^2}\right)^2
 \end{aligned} \tag{5.343}$$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \left(\frac{\alpha}{\Omega_0}\right)^2 - \omega_0^2 \left(\frac{k\alpha^2}{2\Omega_0^2}\right)^2 \right\} L^2 &= \left(\frac{\alpha}{\Omega_0}\right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\omega_0 k \alpha}{2\Omega_0}\right)^2 \right\} L^2 \\
 &= \omega_0^2
 \end{aligned} \tag{5.344}$$

これより,

$$L^2 = \left(\frac{\Omega_0 \omega_0}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0 k \alpha}{2\Omega_0}\right)^2} \tag{5.345}$$

よって, ホーンの軸長  $L(=R_h)$  は,

$$L = \frac{\Omega_0 \omega_0}{\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0 k \alpha}{2\Omega_0}\right)^2}} \tag{5.346}$$

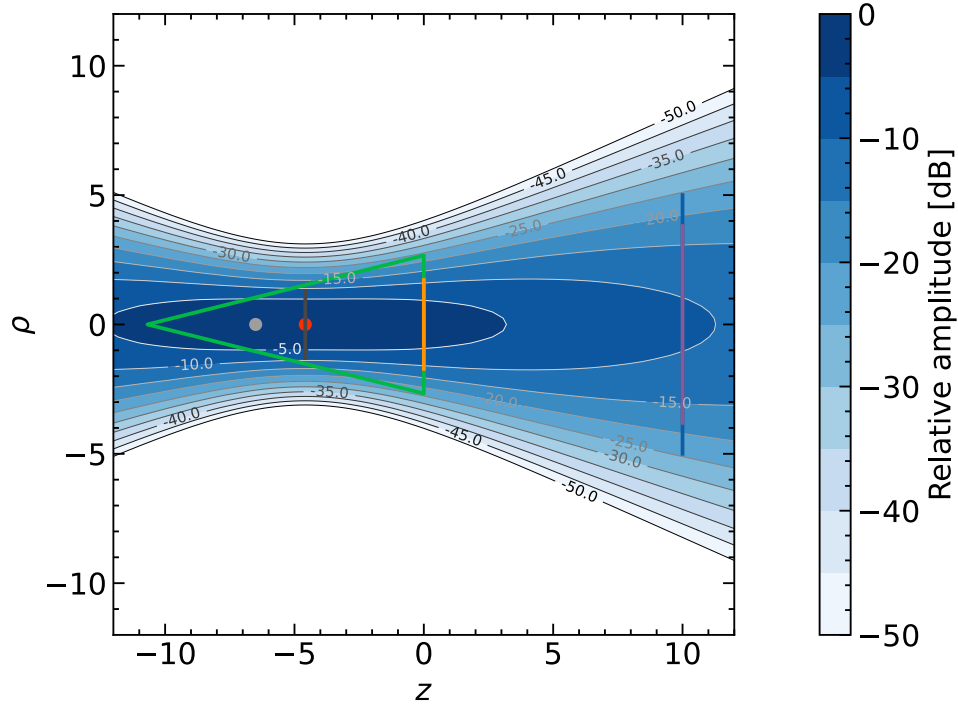


図 5.12. 距離  $d/D = 1$ , 波面の曲率半径  $\bar{R}/D = 1.65$

したがって、ホーン開口径  $D_h$ , ビーム半径  $\omega_h$  は,

$$D_h = 2\omega_h\Omega_0 \quad (5.347)$$

$$\omega_h = \frac{\alpha L}{\Omega_0} \quad (5.348)$$

このとき,

$$1 - \left( \frac{\omega_0 k \alpha}{2\Omega_0} \right)^2 = 0 \quad (5.349)$$

よって、開き角の上限は次式によって決まる.

$$\alpha < \frac{2\Omega_0}{\omega_0 k} \quad (5.350)$$

開き角半値  $\theta$  は任意に与えることはできない (物理的にこれ以上開き角が大きくなることはない). また、ホーンの軸長を最小にする条件

$$\frac{dL}{d\alpha} = 0 \quad (5.351)$$

より次式が得られる.

$$1 - 2c\alpha^2 = 0 \quad (5.352)$$

ここで,

$$c = \left( \frac{\omega_0 k}{2\Omega_0} \right)^2 \quad (5.353)$$

よって,

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2c}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\Omega_0}{\omega_0 k} = \frac{\sqrt{2}\Omega_0}{\omega_0 k} \quad (5.354)$$

このとき, 最小となる軸長  $L_{min}$  は,

$$L_{min} = \frac{\sqrt{2}\Omega_0\omega_0}{\alpha} = \omega_0^2 k = \frac{2\pi\omega_0^2}{\lambda} \quad (5.355)$$

これは, 最適ホーンであり,  $v_h = 1$  ゆえ,

$$\omega_0 = \frac{\omega_h}{\sqrt{1+v_h^2}} = \frac{\omega_h}{\sqrt{2}} \quad (5.356)$$

よって,

$$L_{min} = \frac{\pi\omega_h^2}{\lambda} \quad (5.357)$$

これは先に求めた結果と一致する.

### 5.10.5 1 次パターンの $t$ パラメータを与えた 1 次ホーンの設計

#### 問題

鏡面上の波面の曲率半径  $\bar{R}$ , 鏡面の開口径  $D$ , エッジレベル  $L_e$  [dB], 開口面の位相遅れおよびフレネル領域で生じる位相項によって定義した  $t$  パラメータ

$$t_d = \frac{D_h^2}{8\lambda} \left( \frac{1}{R_h} + \frac{1}{d} \right) \quad (5.358)$$

を与えて 1 次ホーンの形状, 鏡面からの距離を設計せよ.

■ **略解** まず, 鏡面上のビーム半径  $\omega$ , ビームウエストでのビーム半径  $\omega_0$  は,

$$\omega = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{8.69}{L_e}} \quad (5.359)$$

$$v = \frac{k\omega^2}{2\bar{R}} \quad (5.360)$$

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1+v^2}} \quad (5.361)$$

式 (5.358) を変形すると  $d$  は,

$$\begin{aligned}\frac{8\lambda}{D_h^2}t_d &= \frac{1}{R_h} + \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} &= \frac{8\lambda}{D_h^2}t_d - \frac{1}{R_h} = \frac{8\lambda t_d R_h - D_h^2}{D_h^2 R_h} \\ d &= \frac{D_h^2 R_h}{8\lambda t_d R_h - D_h^2}\end{aligned}\tag{5.362}$$

ここで,

$$D_h = 2\Omega_0\omega_h, \quad R_h = \frac{\pi\omega_h^2}{v_h\lambda}\tag{5.363}$$

これより,  $D_h$ ,  $R_h$  を消去すると,

$$\begin{aligned}d &= \frac{(2\Omega_0\omega_h)^2 \frac{\pi\omega_h^2}{v_h\lambda}}{8\lambda t_d \frac{\pi\omega_h^2}{v_h\lambda} - (2\Omega_0\omega_h)^2} \\ &= \frac{(\Omega_0\omega_h)^2 \frac{\pi}{v_h\lambda}}{2t_d \frac{\pi}{v_h} - \Omega_0^2} \\ &= \frac{\pi\omega_h^2}{\left(\frac{2\pi t_d}{\Omega_0^2} - v_h\right)\lambda}\end{aligned}\tag{5.364}$$

また,

$$\begin{aligned}\omega_h^2 &= \omega_0^2(1 + v_h^2) \\ &= \frac{\omega^2}{1 + v^2}(1 + v_h^2)\end{aligned}\tag{5.365}$$

より,  $\omega_h$  を消去して,

$$\begin{aligned}d &= \frac{\pi\omega^2}{\left(\frac{2\pi t_d}{\Omega_0^2} - v_h\right)\lambda} \cdot \frac{1 + v_h^2}{1 + v^2} \\ &= \frac{\bar{R}}{\frac{2\pi t_d}{\Omega_0^2} - v_h} \cdot \frac{\pi\omega^2}{\lambda\bar{R}} \cdot \frac{1 + v_h^2}{1 + v^2} \\ &= \frac{\bar{R}v}{\frac{2\pi t_d}{\Omega_0^2} - v_h} \cdot \frac{1 + v_h^2}{1 + v^2}\end{aligned}\tag{5.366}$$

いま,  $v'_h \equiv \frac{2\pi t_d}{\Omega_0^2}$  とおくと,

$$d = \frac{\bar{R}v}{v'_h - v_h} \cdot \frac{1 + v_h^2}{1 + v^2}\tag{5.367}$$

また,

$$v_h = v - \frac{d}{\bar{R}} \left( v + \frac{1}{v} \right) \quad (5.368)$$

$$\begin{aligned} d &= \frac{\bar{R}}{v + \frac{1}{v}} (v - v_h) \\ &= \frac{\bar{R}v}{v^2 + 1} (v - v_h) \end{aligned} \quad (5.369)$$

これより,  $d$  を消去すると,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{R}v}{v'_h - v_h} \cdot \frac{1 + v_h^2}{1 + v^2} &= \frac{\bar{R}v}{v^2 + 1} (v - v_h) \\ 1 + v_h^2 &= (v - v_h)(v'_h - v_h) = vv'_h - vv_h - v_hv'_h + v_h^2 \\ 1 &= vv'_h - vv_h - v_hv'_h \\ v_h(v + v'_h) &= vv'_h - 1 \\ v_h &= \frac{vv'_h - 1}{v + v'_h} \end{aligned} \quad (5.370)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \frac{1 + v_h^2}{1 + v^2} &= \frac{1 + \left( \frac{vv'_h - 1}{v + v'_h} \right)^2}{1 + v^2} \\ &= \frac{(v + v'_h)^2 + (vv'_h - 1)^2}{(v + v'_h)^2(1 + v^2)} \\ &= \frac{(1 + v^2)(1 + (v'_h)^2)}{(v + v'_h)^2(1 + v^2)} \\ &= \frac{1 + (v'_h)^2}{(v + v'_h)^2} \end{aligned} \quad (5.371)$$

より,

$$\omega_h = \omega_0 \sqrt{1 + v_h^2} = \omega \sqrt{\frac{1 + v_h^2}{1 + v^2}} = \omega \frac{\sqrt{1 + (v'_h)^2}}{v + v'_h} \quad (5.372)$$

また、式 (5.367) の  $v_h$  を消去して、 $d$  は次のようになる。

$$\begin{aligned}
d &= \frac{\bar{R}v}{v'_h - v_h} \cdot \frac{1 + v_h^2}{1 + v^2} \\
&= \frac{\bar{R}v}{v'_h - \frac{vv'_h - 1}{v + v'_h}} \cdot \frac{1 + \left(\frac{vv'_h - 1}{v + v'_h}\right)^2}{1 + v^2} \\
&= \frac{\bar{R}v}{(v'_h)^2 + 1} \cdot \frac{(1 + v^2)(1 + (v'_h)^2)}{(v + v'_h)(1 + v^2)} \\
&= \frac{\bar{R}v}{v + v'_h}
\end{aligned} \tag{5.373}$$

さらに、 $R_h$  は、

$$\begin{aligned}
R_h &= \frac{\pi\omega_h^2}{v_h\lambda} \\
&= \frac{v + v'_h}{vv'_h - 1} \cdot \frac{\pi\omega^2}{\lambda} \cdot \frac{1 + (v'_h)^2}{(v + v'_h)^2} \\
&= \frac{\bar{R}v}{vv'_h - 1} \cdot \frac{1 + (v'_h)^2}{v + v'_h}
\end{aligned} \tag{5.374}$$

ここで、

$$\omega = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{8.69}{L_e}} \tag{5.375}$$

$$v = \frac{k\omega^2}{2\bar{R}} \tag{5.376}$$

$$L_c = \bar{R} - d \tag{5.377}$$

ただし、 $D$  は鏡面の開口径、 $\bar{R}$  は波面の曲率半径（焦点距離  $f$ ）、 $L_e$  [dB] はエッジレベルを示す。

特別な場合、導波管開口では、 $R_h \rightarrow \infty$  とすると、 $v_h = 0$ ,

$$vv'_h - 1 = 0 \tag{5.378}$$

$$\therefore v = \frac{1}{v'_h} \tag{5.379}$$

# CHAPTER 6

## エルミート形式の電磁波極値問題

電磁波の極値問題を扱う上で不可欠なエルミート形式と、その応用について詳述する。エルミート形式は、エルミート行列やエルミート作用素によって定義され、電磁波工学における様々な物理量を実数として表現するための数学的枠組みとなる。例えば、線形回路網の消費電力やアンテナの放射電力はエルミート 2 次形式となる。さらに、アンテナ利得や  $S/N$  比はエルミート 2 次形式の比で表され、これら性能指数の最大化も対象となる問題である。また、不連続導波路に対するモード整合法においても、相対 2 乗平均誤差を最小化する解析を考えれば、ここで説明している理論が適用でき、その詳細についても示していく。

### 6.1 エルミート形式

---

#### 6.1.1 エルミート行列

複素数の  $N \times N$  行列  $[A]$

$$[A] \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

の要素が  $A_{mn} = A_{nm}^*$  (共役転置) のとき、 $[A] = [A]^*_T$  が成り立ち、 $[A]$  を**エルミート行列** (Hermitian matrix) という。ただし、添字  $T$  は転置行列、肩文字  $*$  は複素共役を示す。

### 6.1.2 エルミート形式

$\alpha$  を  $N$  要素からなる複素の列ベクトル（あるいは列マトリクスともいう）とし、 $\alpha_T^*$  を列ベクトル  $\alpha$  の複素共役（complex conjugate）の転置行列（transpose matrix）

$$\alpha \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}, \quad \alpha_T^* \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* & \cdots & \alpha_N^* \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

として次式を考える.

$$\begin{aligned} H &= \alpha_T^* [A] \alpha \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* & \cdots & \alpha_N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.3)$$

あるいは,

$$H = \alpha_T^* [A] \alpha = \sum_{m,n=1}^N \alpha_m^* A_{mn} \alpha_n \quad (6.4)$$

上式を要素毎の計算式で表し、 $A_{mn} = A_{nm}^*$  を代入して、さらに  $m, n$  を交換し、要素を入れ替えると、

$$\begin{aligned} H &= \sum_{m,n=1}^N \alpha_m^* A_{mn} \alpha_n = \sum_{m,n=1}^N \alpha_m^* A_{nm}^* \alpha_n \\ &= \sum_{n,m=1}^N \alpha_n^* A_{mn}^* \alpha_m = \sum_{m,n=1}^N \alpha_m A_{mn}^* \alpha_n^* \\ &= \alpha_T [A]^* \alpha^* = \left( \alpha_T^* [A] \alpha \right)^* \\ &= H^* \end{aligned} \quad (6.5)$$

ただし、 $H^*$  は  $H$  の複素共役である。このように  $H = H^*$  が成り立てば、 $H$  は全ての  $\alpha$  に対して実数であるといえる。このような  $H$  を**エルミート形式** (Hermitian form) という。エルミート行列の全ての固有値 (eigenvalues) は実数となる。なお、上式は  $\alpha_i$  に関する 2 次形式 (Quadratic form) になっており、このような  $H$  を**エルミート 2 次形式** (Hermitian quadratic form) という。



### 6.1.3 エルミート作用素

ドメイン  $L$  における全ての関数  $f$  に対して、内積 (inner product)

$$H = \langle f^*, Lf \rangle \quad (6.6)$$

が実数であるとき、 $H$  を**エルミート形式** (Hermitian form) という。このとき  $L$  は**エルミート作用素** (Hermitian operator) と呼ばれる。この場合もエルミート作用素の全ての固有値 (eigenvalues) は実数である。

いま、関数  $f$  を  $N$  個の項で展開して近似すると、

$$f \simeq \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n \quad (6.7)$$

これを、式 (6.6) に代入して、

$$\begin{aligned} H &\simeq \left\langle \left( \sum_{m=1}^N \alpha_m f_m \right)^*, L \left( \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n \right) \right\rangle \\ &= \sum_{m=1}^N \alpha_m^* \langle f_m^*, L \left( \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n \right) \rangle \end{aligned} \quad (6.8)$$

また、

$$H \simeq \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \alpha_m^* \alpha_n \langle f_m^*, L f_n \rangle \quad (6.9)$$

ここで、

$$l_{mn} \equiv \langle f_m^*, L f_n \rangle \quad (6.10)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} H &\simeq \sum_{m,n=1}^N \alpha_m^* \alpha_n l_{mn} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* & \cdots & \alpha_N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1N} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \cdots & l_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\alpha}_T^* [l] \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (6.11)$$

エルミート作用素 (Hermitian operator)  $L$  より、 $[l]$  はエルミート行列である。よって、いかなる関数のエルミート形式も行列のエルミート形式 (matrix Hermitian form) によって近似できる。

### 6.1.4 エルミート行列, エルミート形式のまとめ

関数  $f$  を, 有限個の関数  $f_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, N$ ) の線形結合 (係数  $\alpha_m$ )

$$f \simeq \sum_{m=0}^N \alpha_m f_m \quad (6.12)$$

で近似できるとき, 次の内積 (inner product) を考える.

$$\begin{aligned} H = \langle f^*, f \rangle &= \int f^* f \, dS \simeq \int \left( \sum_{m=0}^N \alpha_m f_m \right)^* \left( \sum_{n=0}^N \alpha_n f_n \right) dS \\ &= \int \left( \sum_{m=0}^N \alpha_m^* f_m^* \right) \left( \sum_{n=0}^N \alpha_n f_n \right) dS = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \alpha_m^* \alpha_n \int f_m^* f_n dS \\ &= \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \alpha_m^* \alpha_n \langle f_m^*, f_n \rangle \end{aligned} \quad (6.13)$$

ここで,

$$F_{mn} \equiv \langle f_m^*, f_n \rangle \left( = \int f_m^* f_n \, dS \right) \quad (6.14)$$

とおき, また,

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_T^* \equiv \begin{pmatrix} \alpha_0^* & \alpha_1^* & \cdots & \alpha_N^* \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

$$[F] \equiv \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & \cdots & F_{0N} \\ F_{10} & F_{11} & \cdots & F_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{N0} & F_{N1} & \cdots & F_{NN} \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

ただし,  $\boldsymbol{\alpha}_T^*$  は列ベクトル  $\boldsymbol{\alpha}$  の複素共役 (complex conjugate) の転置行列 (transpose matrix) を示す. これより,

$$\begin{aligned} H = \langle f^*, f \rangle &\simeq \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \alpha_m^* \alpha_n F_{mn} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_0^* & \alpha_1^* & \cdots & \alpha_N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & \cdots & F_{0N} \\ F_{10} & F_{11} & \cdots & F_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{N0} & F_{N1} & \cdots & F_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\alpha}_T^* [F] \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (6.18)$$

このとき,

$$\begin{aligned} F_{nm}^* &= \langle f_n^*, f_m \rangle^* = \langle f_n, f_m^* \rangle = \langle f_m^*, f_n \rangle \\ &= F_{mn} \end{aligned} \quad (6.19)$$

ここで,

$$\left( \int f_n^* f_m dS \right)^* = \int f_n f_m^* dS = \int f_m^* f_n dS \quad (6.20)$$

このように  $F_{mn} = F_{nm}^*$  が成り立つので,  $[F]$  は**エルミート行列** (Hermitian matrix) である. つまり,  $[F] = [F]_T^*$ . そして<sup>\*1</sup>,

$$H = \alpha_T^* [F] \alpha = \alpha_T^* [F]_T^* \alpha \quad (6.22)$$

さらに,

$$\begin{aligned} H &= \sum_{m,n=0}^N \alpha_m^* F_{nm}^* \alpha_n = \sum_{n,m=0}^N \alpha_n^* F_{mn}^* \alpha_m \\ &= \sum_{m,n=0}^N \alpha_m F_{mn}^* \alpha_n^* \\ &= \alpha_T [F]^* \alpha^* = \left( \alpha_T^* [F] \alpha \right)^* \\ &= H^* \end{aligned} \quad (6.23)$$

となり,  $H = H^*$  が成り立つので,  $H$  は, **エルミート形式** (Hermitian form) である. したがって,  $H$  は全ての  $[\alpha]$  に対して実数である<sup>\*2</sup>.

---

<sup>\*1</sup> 要素  $a_m$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) の列ベクトル  $\mathbf{a}$ , 要素  $b_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) の列ベクトル  $\mathbf{b}$ , 要素  $F_{mn}$  の行列  $[F]$  との間に次のような関係が成り立つ.

$$\mathbf{a}_T [F] \mathbf{b} = \sum_m \sum_n a_m F_{mn} b_n = \sum_m \sum_n b_n F_{mn} a_m = \mathbf{b}_T [F]_T \mathbf{a} \quad (6.21)$$

<sup>\*2</sup> 転置を伴う計算には次のような関係がある.

- 転置の転置:  $(A_T)_T = A$
- 和の転置:  $(A + B)_T = A_T + B_T$
- 積の転置は順番が逆転:  $(AB)_T = B_T A_T$ ,  $(ABC)_T = C_T B_T A_T$   
積の転置を用いれば,

$$(\mathbf{a}_T [F] \mathbf{b})_T = \mathbf{b}_T [F]_T \mathbf{a} \quad (6.24)$$

また, 上の計算結果はスカラーゆえ, 転置をとっても変わらないから,

$$(\mathbf{a}_T [F] \mathbf{b})_T = \mathbf{a}_T [F] \mathbf{b} \quad (6.25)$$

よって, 式 (6.21) が得られる.

$$\mathbf{a}_T [F] \mathbf{b} = \mathbf{b}_T [F]_T \mathbf{a} \quad (6.26)$$

## 6.2 エルミート形式の例：線形回路網の消費電力

エルミート形式を用いた回路やアンテナの極値問題について、文献<sup>\*3</sup>に示された内容を詳しく説明していく。

### 6.2.1 インピーダンス行列

$N$  端子対線形回路 (linear  $N$ -port network) で消費される電力は、端子電圧・電流を用いて表したエルミート形式 (Hermitian form) となる。いま、 $N$  端子対回路網のインピーダンス行列を  $[Z]$ 、端子電流を要素とする列ベクトルを  $\mathbf{I}$ 、端子電圧を要素とする列ベクトルを  $\mathbf{V}$  とすると、回路の複素電力 (complex power)  $\dot{P}$  は、次のようになる。

$$\dot{P} = \mathbf{I}_T^* \mathbf{V} = \mathbf{I}_T^* [Z] \mathbf{I} \quad (6.27)$$

ただし、添字  $T$  は転置 (transpose)、肩文字  $*$  は複素共役 (complex conjugate) を示す。複素電力  $\dot{P}$  の複素共役  $\dot{P}^*$  は (式 (6.21) より)、

$$\dot{P}^* = \left( \mathbf{I}_T^* [Z] \mathbf{I} \right)^* = \mathbf{I}_T [Z]^* \mathbf{I}^* = \mathbf{I}_T^* [Z]_T^* \mathbf{I} \quad (6.28)$$

これより、回路で消費される電力 (power dissipated in the network)  $P$  は、複素電力  $\dot{P}$  の実部より、

$$\begin{aligned} P &= \Re(\dot{P}) = \frac{1}{2}(\dot{P} + \dot{P}^*) \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{I}_T^* [Z] \mathbf{I} + \mathbf{I}_T^* [Z]_T^* \mathbf{I} \right) = \frac{1}{2} \mathbf{I}_T^* \left( [Z] + [Z]_T^* \right) \mathbf{I} \\ &= \mathbf{I}_T^* [Z_H] \mathbf{I} \end{aligned} \quad (6.29)$$

ここで、

$$[Z_H] \equiv \frac{1}{2} \left( [Z] + [Z]_T^* \right) \quad (6.30)$$

消費電力  $P$  の複素共役は (式 (6.21) より)、

$$P^* = \left( \mathbf{I}_T^* [Z_H] \mathbf{I} \right)^* = \mathbf{I}_T [Z_H]^* \mathbf{I}^* = \mathbf{I}_T^* [Z_H]_T^* \mathbf{I} \quad (6.31)$$

消費電力  $P$  は実数ゆえ、 $P = P^*$  である。これより、次式が成り立つ。

$$\mathbf{I}_T^* [Z_H] \mathbf{I} = \mathbf{I}_T^* [Z_H]_T^* \mathbf{I} \quad (6.32)$$

---

<sup>\*3</sup> Roger F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, (IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory), ch.10, Wiley-IEEE Press (1993).

よって,

$$[Z_H] = [Z_H]_T^* = \frac{1}{2}([Z] + [Z]_T^*)^* = \frac{1}{2}([Z]_T^* + [Z]) \quad (6.33)$$

これより,  $[Z_H]$  はエルミート行列である. したがって, 消費電力  $P$  はエルミート形式である. 受動 (passive) 回路のとき, 電力  $P$  は負にはならない.  $[Z_H]$  は半正値定符号行列 (positive semidefinite matrix) で, 回路に損失があれば正値定符号 (positive definite) である. なお, 相反回路 (reciprocal network) の場合,  $Z_{mn} = Z_{nm}$  より,  $[Z_H]$  の要素  $Z_{H,mn}$  は,

$$\begin{aligned} Z_{H,mn} &= \frac{1}{2}(Z_{mn} + Z_{nm}^*) = \frac{1}{2}(Z_{mn} + Z_{mn}^*) \\ &= \Re(Z_{mn}) = \Re(Z_{nm}) \end{aligned} \quad (6.34)$$

### 6.2.2 アドミタンス行列

端子電圧から消費電力  $P$  の複素電力を求めると

$$P^* = \left( \mathbf{V}_T^* [Y_H] \mathbf{V} \right)^* = \mathbf{V}_T [Y_H]^* \mathbf{V}^* = \mathbf{V}_T^* [Y_H]_T^* \mathbf{V} \quad (6.35)$$

同様にして, アドミタンス行列  $[Y]$  に対して,

$$[Y_H] = [Y_H]_T^* = \frac{1}{2}([Y] + [Y]_T^*)^* = \frac{1}{2}([Y]_T^* + [Y]) \quad (6.36)$$

ただし,  $[Y_H]$  は半正値定符号行列 (positive semidefinite matrix), 回路に損失があれば正値定符号である. したがって,  $N$  端子対線形回路で消費される電力は, 端子電圧・電流を用いて表した**エルミート形式**となる.

### 6.3 エルミート形式の例：放射電力

スカラー波動方程式 (scalar wave equation) を考えると、放射電力はエルミート形式 (Hermitian form) となる。これを説明するため、波源を  $\rho$  として、次のヘルムホルツ方程式 (Helmholtz equation) を満たす仮想的なスカラーフィールド (scalar field)  $\psi$  を考える。

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = \frac{4\pi}{jk}\rho \quad (6.37)$$

ただし、 $k(=2\pi/\lambda)$  は波数を示す。境界条件 (boundary condition) として、無限遠での放射条件 (radiation condition at infinity) を用いると、よく知られた次の積分が得られる。

$$\psi = \iiint \rho \frac{e^{-jkR}}{-jkR} d\tau \equiv L\rho \quad (6.38)$$

ただし、 $R$  は波源の点からフィールドの観測点までの距離、 $L$  は作用素を示す。波源によって放射された電力  $P$  は、次のようになることが知られている。

$$\begin{aligned} P &= \Re \left( \iiint \rho^* \psi d\tau \right) = \Re \langle \rho^*, \psi \rangle = \Re \langle \rho^*, L\rho \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\langle \rho^*, L\rho \rangle + \langle \rho, L^* \rho^* \rangle) \end{aligned} \quad (6.39)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \langle Lf, g \rangle &= \langle g, Lf \rangle \\ &= \iiint_{\tau} g(\tau) \left( \iiint_{\tau'} f(\tau') \frac{e^{-jkR}}{-jkR} d\tau' \right) d\tau \\ &= \iiint_{\tau'} f(\tau') \left( \iiint_{\tau} g(\tau) \frac{e^{-jkR}}{-jkR} d\tau \right) d\tau' \\ &= \langle f, Lg \rangle \end{aligned} \quad (6.40)$$

より、 $L$  は自己共役 (self-adjoint) である。作用素  $L$  について、 $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$  であれば、 $L$  は自己共役 (self-adjoint) であるという。同様にして、

$$\langle L^* f, g \rangle = \langle f, L^* g \rangle \quad (6.41)$$

が成り立ち、 $L^*$  も自己共役である。よって、

$$\langle L\rho, \rho^* \rangle = \langle \rho, L\rho^* \rangle \quad (6.42)$$

$$\langle L^* \rho, \rho^* \rangle = \langle \rho, L^* \rho^* \rangle \quad (6.43)$$

これより，放射電力（radiated power） $P$  は次のようにエルミート形式（Hermitian form）となる．

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} \left( \langle \rho^*, L\rho \rangle + \langle \rho^*, L^* \rho \rangle \right) = \frac{1}{2} \langle \rho^*, (L + L^*)\rho \rangle \\
 &= \langle \rho^*, (\Re L)\rho \rangle = \langle \rho, (\Re L)\rho^* \rangle = \left( \langle \rho^*, (\Re L)\rho \rangle \right)^* \\
 &= P^*
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

ただし， $(\Re L)$  は作用素（operator）であり，次式となる．

$$(\Re L)\rho = \frac{1}{2}(L + L^*)\rho = \iiint \rho \frac{\sin kR}{kR} d\tau \tag{6.45}$$

放射電力は正ゆえ， $(\Re L)$  は正值作用素（positive definite operator）である．

## 6.4 エルミート 2 次形式の比の極値条件

電磁波回路ならびにアンテナの性能指数の中には、例えば、アンテナ利得 (antenna gain), S/N 比 (signal-to-noise ratio), Q 値 (quality factor), 能率 (efficiency) 等, 次のようなエルミート 2 次形式 (quadratic forms) の比  $\varepsilon$  によって表される場合がある.

$$\varepsilon = \frac{\boldsymbol{\alpha}_T^*[A]\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}_T^*[B]\boldsymbol{\alpha}} \quad (6.46)$$

ただし,  $[A]$  および  $[B]$  は正方エルミート行列 (square Hermitian matrices),  $\boldsymbol{\alpha}$  は未知の列ベクトル (column matrix) を示す. ここでは, 上式の  $\varepsilon$  の最大値およびそのときの  $\boldsymbol{\alpha}$  を求める問題について考える. これは極値を求める問題であり, 通常の方法によれば, 変数を列ベクトル  $\boldsymbol{\alpha}$  の各々の要素  $\alpha_i$  として, 全ての  $i$  に対して次の条件を考えればよい.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i^*} = 0 \quad (6.47)$$

条件式として式 (6.47) の 2 式があるのは, 一般に  $\boldsymbol{\alpha}$  が複素数で,  $\varepsilon$  は各々の  $\alpha_i$  について 2 つのパラメータに対して最大化しなければならないからである. そこで,  $\alpha_i' \equiv \Re(\alpha_i)$  および  $\alpha_i'' \equiv \Im(\alpha_i)$  とおくと,

$$\alpha_i = \alpha_i' + j\alpha_i'', \quad \alpha_i^* = \alpha_i' - j\alpha_i'' \quad (6.48)$$

この場合, 極値を求める条件は,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i'} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i''} = 0 \quad (6.49)$$

となり, ここでは先に示した条件と等価であることを示していく. まず,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i'} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_i'} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i^*} \frac{\partial \alpha_i^*}{\partial \alpha_i'} \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i''} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_i''} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i^*} \frac{\partial \alpha_i^*}{\partial \alpha_i''} \quad (6.51)$$

式 (6.48) より,

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_i'} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i'} (\alpha_i' + j\alpha_i'') = 1 \quad (6.52)$$

$$\frac{\partial \alpha_i^*}{\partial \alpha_i'} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i'} (\alpha_i' - j\alpha_i'') = 1 \quad (6.53)$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_i''} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i''} (\alpha_i' + j\alpha_i'') = j \quad (6.54)$$

$$\frac{\partial \alpha_i^*}{\partial \alpha_i''} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i''} (\alpha_i' - j\alpha_i'') = -j \quad (6.55)$$



よって、式 (6.51) は次のようになり、両者の条件式は等価であることがわかる。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha'_i} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i^*} = 0 \quad (6.56)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha''_i} = j \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i^*} \right) = 0 \quad (6.57)$$

さて、式 (6.47) を適用するため、式 (6.46) を次のように変形する。

$$\varepsilon = \frac{\sum_{j,k} \alpha_j^* A_{jk} \alpha_k}{\sum_{j,k} \alpha_j^* B_{jk} \alpha_k} \equiv \frac{N}{D} \quad (6.58)$$

式 (6.47) の第 1 式に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{N}{D} \right) = \frac{1}{D^2} \left[ D \frac{\partial N}{\partial \alpha_i} - N \frac{\partial D}{\partial \alpha_i} \right] \\ &= \frac{1}{D^2} \left[ D \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \sum_{j,k} \alpha_j^* A_{jk} \alpha_k \right) - N \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \sum_{j,k} \alpha_j^* B_{jk} \alpha_k \right) \right] \\ &= \frac{1}{D^2} \left[ D \sum_j \alpha_j^* A_{ji} - N \sum_j \alpha_j^* B_{ji} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.59)$$

上式は全ての  $i$  について成り立ち、行列でまとめて表すと、

$$\frac{1}{D^2} \left( D[A] \boldsymbol{\alpha}_T^* - N[B] \boldsymbol{\alpha}_T^* \right) = 0 \quad (6.60)$$

同様にして、式 (6.47) の第 2 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_i^*} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i^*} \left( \frac{N}{D} \right) = \frac{1}{D^2} \left[ D \frac{\partial N}{\partial \alpha_i^*} - N \frac{\partial D}{\partial \alpha_i^*} \right] \\ &= \frac{1}{D^2} \left[ D \frac{\partial}{\partial \alpha_i^*} \left( \sum_{j,k} \alpha_j^* A_{jk} \alpha_k \right) - N \frac{\partial}{\partial \alpha_i^*} \left( \sum_{j,k} \alpha_j^* B_{jk} \alpha_k \right) \right] \\ &= \frac{1}{D^2} \left[ D \sum_k A_{ik} \alpha_k - N \sum_k B_{ik} \alpha_k \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.61)$$

行列表示して、

$$\frac{1}{D^2} \left( D[A] \boldsymbol{\alpha} - N[B] \boldsymbol{\alpha} \right) = 0 \quad (6.62)$$

これより、 $D \neq 0$  において ( $\varepsilon$  が最大値をとらない場合を除く)、

$$\begin{aligned} D[A] \boldsymbol{\alpha} - N[B] \boldsymbol{\alpha} &= 0 \\ [A] \boldsymbol{\alpha} &= \frac{N}{D} [B] \boldsymbol{\alpha} = \varepsilon [B] \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (6.63)$$

また、式 (6.60) は、

$$\begin{aligned} D[A]\boldsymbol{\alpha}^* - N[B]\boldsymbol{\alpha}^* &= 0 \\ \boldsymbol{\alpha}_T^*[A] &= \frac{N}{D}\boldsymbol{\alpha}_T^*[B] = \varepsilon\boldsymbol{\alpha}_T^*[B] \end{aligned} \quad (6.64)$$

共役転置をとると、

$$[A]_T^*\boldsymbol{\alpha} = \varepsilon^*[B]_T^*\boldsymbol{\alpha} \quad (6.65)$$

$[A]$ ,  $[B]$  はエルミート行列ゆえ、

$$[A] = [A]_T^*, \quad [B] = [B]_T^* \quad (6.66)$$

また、 $\varepsilon$  はエルミート形式ゆえ、 $\varepsilon = \varepsilon^*$  が成り立つ。したがって、極値条件として、

$$[A]\boldsymbol{\alpha} = \varepsilon[B]\boldsymbol{\alpha} \quad (6.67)$$

が得られ、もう一つの条件式と一致する。そこで、例えば、一方の条件式

$$\frac{\partial \rho}{\partial \alpha_i^*} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (6.68)$$

を考えればよい。このとき、 $\varepsilon$  は固有値 (eigenvalue) とみなせ、 $\varepsilon$  の定義式は固有値方程式 (eigenvalue equation) となっている。それゆえ、 $\varepsilon$  の最大値は固有値の最大値を求めることでもある<sup>\*4</sup>。

---

<sup>\*4</sup> Felix R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol.1, AMS Chelsea Publishing (1990).

## 6.5 多端子対回路網の電力比の最大化

$N$  個の信号発生器（電流源）、および内部インピーダンス  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  を接続した  $N$  端子対回路網を考える。信号発生器で消費される電力  $P_{gen}$  と負荷に消費される電力  $P_{load}$  との比を最大化するためには、信号源の電流  $I_1, I_2, \dots, I_N$  を調整する必要がある。両者の比  $\varepsilon$  は、

$$\varepsilon = \frac{P_{load}}{P_{gen}} = \frac{\mathbf{I}_T^* [\Re Z_{load}] \mathbf{I}}{\mathbf{I}_T^* [\Re Z_{gen}] \mathbf{I}} \quad (6.69)$$

ここで、 $\mathbf{I}$  は端子電流  $I_i$  を要素とする列ベクトル、 $[Z_{load}]$  は負荷回路のインピーダンス行列、 $[Z_{gen}]$  は信号源のインピーダンス行列を示す。 $[Z_{gen}]$  は次のように対角行列（diagonal matrix）

$$[Z_{gen}] = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Z_N \end{pmatrix} \quad (6.70)$$

となるが、 $[Z_{gen}]$  が任意の行列でも適用できる。したがって、 $\varepsilon$  の最大値は、すでに述べたように次の方程式の最大の固有値によって与えられる。

$$[\Re Z_{load}] \mathbf{I} = \varepsilon [\Re Z_{gen}] \mathbf{I} \quad (6.71)$$

最大値  $\varepsilon$  のときの電流  $\mathbf{I}$  は、対応する固有ベクトルによって与えられる。

## 6.6 アンテナ利得

### 6.6.1 インピーダンス行列

$N$  個の入力端子対を有する任意のアンテナアレーを考え、このアレーから十分離れた遠方界領域、つまり平面波領域にテストアンテナをおく。ここでは、テストアンテナには一つの入力端子対があって、単一偏波を受信あるいは送信するものとする。アレーアンテナとテストアンテナで  $(N+1)$  端子対回路ゆえ、この回路の端子の特性は、 $(N+1)$  次の正方行列によって表すことができ、インピーダンス行列より、

$$\begin{pmatrix} V_t \\ \mathbf{V}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{tt} & \mathbf{Z}_t^{ta} \\ \mathbf{Z}^{at} & [\mathbf{Z}_{aa}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_t \\ \mathbf{I}^a \end{pmatrix} \quad (6.72)$$

ただし、 $V_t$ 、 $I_t$  はテストアンテナの端子電圧および電流を示し、 $\mathbf{V}^a$ 、 $\mathbf{I}^a$  はアレーの端子での電圧および電流を要素とする次のような列ベクトルである。

$$\mathbf{V}^a = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}^a = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \quad (6.73)$$

また、 $Z_{tt}$  はテストアンテナの入力インピーダンスを示し、 $[\mathbf{Z}_{aa}]$  はアレーアンテナのインピーダンス行列で次のようにおく。

$$[\mathbf{Z}_{aa}] = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{pmatrix} \quad (6.74)$$

そして  $[Z_{ta}]$ 、 $[Z_{at}]$  はテストアンテナとアレーの端子間の相互インピーダンス (mutual impedance) を示し、行ベクトルによって次のようにおく。

$$\mathbf{Z}^{ta} = \begin{pmatrix} Z_{t1} \\ Z_{t2} \\ \vdots \\ Z_{tN} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_T^{at} = \begin{pmatrix} Z_{1t} & Z_{2t} & \cdots & Z_{Nt} \end{pmatrix} \quad (6.75)$$

アンテナおよび媒質が相反性を有するとき、 $[\mathbf{Z}_{aa}] = [\mathbf{Z}_{aa}]^T$ 、 $[Z_{ta}] = [Z_{at}]^T$  (転置行列がもとの行列と等しい) が成り立つ。

### 6.6.2 アドミタンス行列

一方,  $(N + 1)$  端子対回路におけるアドミタンス行列を用いれば,

$$\begin{pmatrix} I_t \\ \mathbf{I}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{tt} & \mathbf{Y}_T^{ta} \\ \mathbf{Y}^{at} & [Y_{aa}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_t \\ \mathbf{V}^a \end{pmatrix} \quad (6.76)$$

なお, 上式のアドミタンス行列のパラメータは, インピーダンス行列と双対的なものである.

### 6.6.3 放射強度

いま, アレーの端子に電流源  $I_1, I_2, \dots, I_N$  を接続して励振させ, テストアンテナの端子を開放にした場合を考える. 入力電力  $P_{in}$  は, 先に示したように, 次式で与えられる.

$$P_{in} = \frac{1}{2} \mathbf{I}_T^{a*} \left( [Z_{aa}] + [Z_{aa}]_T^* \right) \mathbf{I}^a \quad (6.77)$$

両アンテナの偏波面を一致させると, テストアンテナの端子電圧の大きさは, テストアンテナへ入射する放射強度に比例した値となる. いま, 式 (6.72) より,  $I_t = 0$  (開放) とおくと, テストアンテナの端子電圧  $V_t$  は,

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^a = \begin{pmatrix} Z_{t1} & Z_{t2} & \cdots & Z_{tN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n=1}^N Z_{tn} I_n = \sum_{n=1}^N I_n Z_{tn} \\ &= \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & \cdots & I_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{t1} \\ Z_{t2} \\ \vdots \\ Z_{tN} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{I}_T^a \mathbf{Z}^{ta} \end{aligned} \quad (6.78)$$

よって,

$$\begin{aligned} |V_t|^2 &= |\mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^a|^2 = (\mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^a)^* (\mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^a) \\ &= \mathbf{Z}_T^{ta*} \mathbf{I}^{a*} \mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^a = \mathbf{I}_T^{a*} \mathbf{Z}^{ta*} \mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^a \end{aligned} \quad (6.79)$$

これより, テストアンテナの方向での**放射強度** (radiation intensity)  $P_r$  は,

$$P_r = \frac{1}{8\pi} K_1 |V_t|^2 = \frac{1}{8\pi} K_1 \mathbf{I}_T^{a*} \mathbf{Z}^{ta*} \mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^a \quad (6.80)$$

ただし,  $K_1$  はテストアンテナの受信開口面によって決まる係数を示す.

### 6.6.4 電力利得

アンテナの電力利得 (power gain)  $G$  は、供試アンテナと無指向性アンテナに同じ電力を入力したときの両者の放射強度の比によって定義され、次のようになる。

$$G = \frac{4\pi \times (\text{radiation intensity})}{(\text{power input to the antenna})} \quad (6.81)$$

式 (6.81) に式 (6.77) および式 (6.80) を代入すると、次のようにエルミート形式の比となる。

$$\begin{aligned} G &= \frac{4\pi P_r}{P_{in}} = \frac{4\pi \cdot \frac{1}{8\pi} K_1 \mathbf{I}_T^{a*} \mathbf{Z}^{ta*} \mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^a}{\frac{1}{2} \mathbf{I}_T^{a*} ([Z_{aa}] + [Z_{aa}]_T^*) \mathbf{I}^a} \\ &= K_1 \frac{\mathbf{I}_T^{a*} \mathbf{Z}^{ta*} \mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^a}{\mathbf{I}_T^{a*} ([Z_{aa}] + [Z_{aa}]_T^*) \mathbf{I}^a} \end{aligned} \quad (6.82)$$

電圧源  $V_1, V_2, \dots, V_N$  をアレーの端子に接続して励振し、テストアンテナの端子を短絡したときの問題は、上と相対的な関係である。式 (6.77) および式 (6.80) に対して相対的な式を考えると、

$$P_{in} = \frac{1}{2} \mathbf{V}_T^{a*} ([Y_{aa}] + [Y_{aa}]_T^*) \mathbf{V}^a \quad (6.83)$$

および

$$P_r = \frac{1}{8\pi} K_2 |I_t|^2 = \frac{1}{8\pi} K_2 \mathbf{V}_T^{a*} \mathbf{Y}^{ta*} \mathbf{Y}_T^{ta} \mathbf{V}^a \quad (6.84)$$

よって、双対的なパラメータを用いて表したアンテナ利得の式は次のようになる。

$$G = \frac{4\pi P_r}{P_{in}} = K_2 \frac{\mathbf{V}_T^{a*} \mathbf{Y}^{ta*} \mathbf{Y}_T^{ta} \mathbf{V}^a}{\mathbf{V}_T^{a*} ([Y_{aa}] + [Y_{aa}]_T^*) \mathbf{V}^a} \quad (6.85)$$

式 (6.82) および式 (6.85) は、問題に応じて使い分けるとよい。例えば、ダイポールアンテナ (dipole antenna) では電流を励振して考えるのに対して、開口面アンテナ (aperture antenna) では電圧を励振して考えると分かり易い。

## 6.7 極値条件と最大利得

### 6.7.1 特別な場合（ケース A）

行列  $[A]$  を列ベクトル  $\mathbf{x}$  によって  $[A] = \mathbf{x}\mathbf{x}_T^*$  で表せる場合を考える.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_T^* = \begin{pmatrix} A_1^* & A_2^* & \cdots \end{pmatrix} \quad (6.86)$$

ただし,  $\mathbf{x}$  は列ベクトル,  $\mathbf{x}_T^*$  は列ベクトル  $\mathbf{x}$  の複素共役の転置を示す. 行列  $[A]$  の要素には,  $A_{mn} = A_{nm}^*$  の関係があるので,  $[A]$  はエルミート行列 (Hermitian matrix) である. このとき, エルミート 2 次形式の比  $\varepsilon$  は, 次のようになる.

$$\varepsilon = \frac{\alpha_T^*[A]\alpha}{\alpha_T^*[B]\alpha} = \frac{\alpha_T^*\mathbf{x}\mathbf{x}_T^*\alpha}{\alpha_T^*[B]\alpha} \quad (6.87)$$

すでに導出した最大化の条件  $[A]\alpha = \varepsilon[B]\alpha$  より,

$$\mathbf{x}\mathbf{x}_T^*\alpha = \varepsilon[B]\alpha = \frac{\alpha_T^*\mathbf{x}\mathbf{x}_T^*\alpha}{\alpha_T^*[B]\alpha}[B]\alpha \quad (6.88)$$

ただし,  $\mathbf{x}_T^*\alpha$  はスカラー関数であり,  $X \equiv \mathbf{x}_T^*\alpha$  とおくと, 複素共役は,

$$X^* = \mathbf{x}_T\alpha^* = \alpha_T^*\mathbf{x} \quad (6.89)$$

これより, 式 (6.88) は次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}X &= \frac{X^*X}{\alpha_T^*[B]\alpha}[B]\alpha \\ \left( \mathbf{x} - \frac{X^*}{\alpha_T^*[B]\alpha}[B]\alpha \right) X &= 0 \end{aligned} \quad (6.90)$$

よって,

$$X = 0, \quad \mathbf{x} - \frac{X^*}{\alpha_T^*[B]\alpha}[B]\alpha = 0 \quad (6.91)$$

$X = 0$  のとき,  $\varepsilon = 0$ .  $i$  番目の固有値 (eigenvalue) を  $\hat{\varepsilon}_i$ , 固有ベクトル (eigenvector) を  $\alpha^{(i)}$  とすると,

$$\hat{\varepsilon}_i = 0, \quad \mathbf{x}_T^*\alpha^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (6.92)$$

一方,  $X = \mathbf{x}_T^*\alpha \neq 0$  のとき,

$$\mathbf{x} - \frac{1}{C}[B]\alpha = 0 \quad (6.93)$$

ここで、 $C$  はスカラ関数 (scalar function) で次式で定義される (上式は分母, 分子ともにスカラ)。

$$\frac{1}{C} \equiv \frac{X^*}{\alpha_T^*[B]\alpha} = \frac{\alpha_T^*x}{\alpha_T^*[B]\alpha} \quad (6.94)$$

このとき,

$$\frac{1}{C}\alpha = [B]^{-1}x \quad (6.95)$$

これより,  $\varepsilon$  の極値は,

$$\varepsilon = \frac{\alpha_T^*xx_T^*\alpha}{\alpha_T^*[B]\alpha} = \frac{x_T^*\alpha}{C} = x_T^*[B]^{-1}x \equiv \hat{\varepsilon} \quad (6.96)$$

ただし,  $\hat{\varepsilon}$  はゼロでない一つの固有値 (one nonzero eigenvalue) である.  $\hat{\varepsilon}$  に対応する固有ベクトルを  $\hat{\alpha}$  とすると,

$$xx_T^*\hat{\alpha} = \hat{\varepsilon}[B]\hat{\alpha} \quad (6.97)$$

固有ベクトル  $\alpha_T^{(i)*}$  を上式両辺の左側から乗じて,

$$\alpha_T^{(i)*}xx_T^*\hat{\alpha} = \alpha_T^{(i)*}\hat{\varepsilon}[B]\hat{\alpha} \quad (6.98)$$

$x_T^*\alpha^{(i)} = 0$  ゆえ  $\alpha_T^{(i)*}x = 0$ , および  $\hat{\varepsilon} \neq 0$  より,

$$\alpha_T^{(i)*}[B]\hat{\alpha} = 0 \quad (6.99)$$

上式は, 固有ベクトル  $\alpha^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) と  $\hat{\alpha}$  の直交性 (orthogonal relation) を示す重み付きスカラ積となっている. いま,

$$\hat{\alpha} \equiv C\alpha' \quad (6.100)$$

として ( $C \neq 0$ ),  $\hat{\alpha}$  のかわりに,

$$\alpha' = [B]^{-1}x \quad (6.101)$$

を用いて表すと,

$$\hat{\varepsilon} = \frac{x_T^*C\alpha'}{C} = x_T^*\alpha' (= x_T^*[B]^{-1}x) \quad (6.102)$$

また,

$$\varepsilon = \frac{C^*\alpha_T'^*xx_T^*C\alpha'}{C^*\alpha_T'^*[B]C\alpha'} = \frac{\alpha_T'^*xx_T^*\alpha'}{\alpha_T'^*[B]\alpha'} \quad (6.103)$$



### 6.7.2 アレーの最大利得

アレーアンテナの利得を最大にする条件は、次のような固有値方程式となる。

$$\mathbf{Z}^{ta*} \mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^a = \frac{G}{K_1} ([Z_{aa}] + [Z_{aa}]_T^*) \mathbf{I}^a \quad (6.104)$$

ただし、 $G/K_1$  は固有値 (eigenvalue) である。上式は、正方行列  $\mathbf{Z}^{ta*} \mathbf{Z}_T^{ta}$  で表される式 (6.88) のケースに相当する。さらに  $[Z_{ta}^*]_T [Z_{ta}]$  は一項のみのダイアードとなり、固有値は一つを除いて全てゼロとなる。インピーダンス行列の性質より、 $([Z_{aa}] + [Z_{aa}]_T^*)$  は正定値 (positive definite)、 $\mathbf{Z}^{ta*} \mathbf{Z}_T^{ta}$  は半正定値 (positive semidefinite) である。よって、全ての固有値は正かゼロである。ただし、固有値の一つは式 (6.96) によって与えられゼロではない。また、式 (6.92) から  $\mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^a = 0$  ゆえ、固有値は一つを除いて全てゼロとなる。したがって、式 (6.104) のゼロでないただ一つの固有値、および対応する固有ベクトル  $[I_a]$  を求める問題と考えればよい。

いま、式 (6.104) のゼロでない固有値に対応する固有ベクトルを  $\mathbf{I}^{(N)}$  とおくと、

$$\mathbf{Z}^{ta*} \mathbf{Z}_t^{ta} \mathbf{I}^{(N)} = \frac{G}{K_1} ([Z_{aa}] + [Z_{aa}]_T^*) \mathbf{I}^{(N)} \quad (6.105)$$

式 (6.95) より、固有ベクトル  $\mathbf{I}^{(N)}$  は、

$$\mathbf{I}^{(N)} = C ([Z_{aa}] + [Z_{aa}]_T^*)^{-1} \mathbf{Z}^{ta*} \quad (6.106)$$

式 (6.96) より、最大利得 (maximum gain)  $G_{max}$  は、

$$G_{max} = K_1 \mathbf{Z}_t^{ta} ([Z_{aa}] + [Z_{aa}]_T^*)^{-1} \mathbf{Z}^{ta*} \quad (6.107)$$

これは、 $\mathbf{Z}^{ta*} \mathbf{Z}_t^{ta}$  となる特別な場合で、ゼロ固有値 ( $G/K_1 = 0$ ) に対応する線形独立な固有ベクトルを  $\mathbf{I}^{(1)}, \mathbf{I}^{(2)}, \dots, \mathbf{I}^{(N-1)}$  とすると、例えば次のようになる。

$$\mathbf{I}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/Z_{t1} \\ -1/Z_{t2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/Z_{t1} \\ 0 \\ -1/Z_{t3} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.108)$$

...

$$\mathbf{I}^{(N-1)} = \begin{pmatrix} 1/Z_{t1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1/Z_{tN} \end{pmatrix} \quad (6.109)$$

ただし、 $Z_{ti}$  は  $\mathbf{Z}_{ta}$  の  $i$  番目の要素であり、 $\mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^{(i)} = 0$  を満足する。そして、式 (6.104) の両辺に左側から  $\mathbf{I}_T^{(i)*}$  を乗じて、

$$\mathbf{I}_T^{(i)*} \mathbf{Z}^{ta*} \mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^{(N)} = \frac{G}{K_1} \mathbf{I}_t^{(i)*} ([Z_{aa}] + [Z_{aa}]_T^*) \mathbf{I}^{(N)} \quad (6.110)$$

さて、 $\mathbf{Z}_T^{ta} \mathbf{I}^{(i)} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ) より、

$$\mathbf{I}_T^{(i)*} \mathbf{Z}^{ta*} = 0 \quad (6.111)$$

よって、

$$\mathbf{I}_T^{(i)*} ([Z_{aa}] + [Z_{aa}]_T^*) \mathbf{I}^{(N)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \quad (6.112)$$

そこで、重み付きスカラ積を次のように定義する。

$$\langle \mathbf{I}^{(i)}, \mathbf{I}^{(j)} \rangle \equiv \mathbf{I}_t^{(i)*} ([Z_{aa}] + [Z_{aa}]_T^*) \mathbf{I}^{(j)} \quad (6.113)$$

式 (6.112) の直交性は次のようになる。

$$\langle \mathbf{I}^{(i)}, \mathbf{I}^{(N)} \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \quad (6.114)$$

それゆえ、式 (6.104) で右辺がゼロとなる式の解を考えればよい。いま、 $\mathbf{I}^{(N)}$  は式 (6.112) による全ての  $\mathbf{I}^{(i)}$  と直交しなければならない (Schmidt の直交化によって  $[\mathbf{I}]_N$  を構成することができる)。ただし、式 (6.109) より、 $\mathbf{I}^{(i)}$  はテストアンテナに対してフィールドを発生しないようなアレーの励振であるから、アレーの最大利得 (maximum gain) を得るときの励振  $\mathbf{I}^{(N)}$  はゼロ利得 (zero gain) となる電流と全て直交関係があることを意味している。

電圧源による励振の場合、双対的な式を考えれば、式 (6.104) に対する極値問題の解法は次の固有値方程式から行え、

$$\mathbf{Y}^{ta*} \mathbf{Y}_T^{ta} \mathbf{V}^a = \frac{G}{K_2} ([Y_{aa}] + [Y_{aa}]_T^*) \mathbf{V}^a \quad (6.115)$$

これより、最大利得を得る励振  $\mathbf{V}^a$  を決定できる。最大利得はもちろん電流励振 (current excitation) でも電圧励振 (voltage excitation) でも同じであるが、固有ベクトル  $\mathbf{I}^{(N)}$ 、 $\mathbf{V}^{(N)}$  は異なる。電圧励振の場合の最大利得を得る  $\mathbf{V}^{(N)}$  は、

$$\mathbf{V}^{(N)} = C ([Y_{aa}] + [Y_{aa}]_T^*)^{-1} \mathbf{Y}^{ta*} \quad (6.116)$$

上式は、式 (6.106) と双対である。最終的に最大利得  $G_{max}$  は次のようになる。

$$G_{max} = K_2 \mathbf{Y}_T^{ta} ([Y_{aa}] + [Y_{aa}]_T^*)^{-1} \mathbf{Y}^{ta*} \quad (6.117)$$

## 6.8 特別な場合の極値条件（ケース B）

---

正方行列（square matrix） $[B]$  を列ベクトル（column matrix） $\mathbf{y}$  によって  $[B] = \mathbf{y}\mathbf{y}_T^*$  で表せる場合,

$$[A]\boldsymbol{\alpha} = \varepsilon \mathbf{y}\mathbf{y}_T^* \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_T^*[A]\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}_T^* \mathbf{y}\mathbf{y}_T^* \boldsymbol{\alpha}} \mathbf{y}\mathbf{y}_T^* \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_T^*[A]\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}_T^* \mathbf{y}} \mathbf{y} \quad (6.118)$$

上式右辺の分母・分子の  $\mathbf{y}_T^* \boldsymbol{\alpha}$  はスカラゆえ消去している。いま,

$$C_B \equiv \frac{\boldsymbol{\alpha}_T^*[A]\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}_T^* \mathbf{y}} \quad (6.119)$$

とおくと（上式は分母，分子ともにスカラ），

$$[A]\boldsymbol{\alpha} = C_B \mathbf{y} \quad (6.120)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = C_B [A]^{-1} \mathbf{y} \quad (6.121)$$

これより， $\varepsilon$  の極値は，

$$\varepsilon = \frac{\boldsymbol{\alpha}_T^*[A]\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}_T^* \mathbf{y}\mathbf{y}_T^* \boldsymbol{\alpha}} = \frac{C_B}{\mathbf{y}_T^* \boldsymbol{\alpha}} = \frac{C_B}{\mathbf{y}_T^* C_B [A]^{-1} \mathbf{y}} = \frac{1}{\mathbf{y}_T^* [A]^{-1} \mathbf{y}} \equiv \varepsilon_B \quad (6.122)$$

あるいは，

$$\frac{1}{\varepsilon_B} = \mathbf{y}_T^* [A]^{-1} \mathbf{y} \quad (6.123)$$

## 6.9 点波源アレーの最大利得

### 6.9.1 エルミート形式の放射電力

スカラー波動方程式 (scalar wave equation) を考えると, 放射電力はエルミート形式 (Hermitian form) となる. これを説明するため, 波源を  $\rho$  として, 次のヘルムホルツ方程式 (Helmholtz equation) を満たす仮想的なスカラーフィールド (scalar field)  $\psi$  を考える.

$$(\nabla^2 + k^2) \psi = \frac{4\pi}{jk} \rho \quad (6.124)$$

ただし,  $k(=2\pi/\lambda)$  は波数を示す. 境界条件 (boundary condition) として, 無限遠での放射条件 (radiation condition at infinity) を用いると, よく知られた次の積分が得られる.

$$\psi = \iiint \rho \frac{e^{-jkR}}{-jkR} d\tau \equiv L\rho \quad (6.125)$$

ただし,  $R$  は波源の点からフィールドの観測点までの距離,  $L$  は作用素を示す. 波源によって放射された電力  $P$  は, 次のようになることが知られている.

$$\begin{aligned} P &= \Re \left( \iiint \rho^* \psi d\tau \right) = \Re \langle \rho^*, \psi \rangle = \Re \langle \rho^*, L\rho \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\langle \rho^*, L\rho \rangle + \langle \rho, L^* \rho^* \rangle) \end{aligned} \quad (6.126)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \langle Lf, g \rangle &= \langle g, Lf \rangle \\ &= \iiint_{\tau} g(\tau) \left( \iiint_{\tau'} f(\tau') \frac{e^{-jkR}}{-jkR} d\tau' \right) d\tau \\ &= \iiint_{\tau'} f(\tau') \left( \iiint_{\tau} g(\tau) \frac{e^{-jkR}}{-jkR} d\tau \right) d\tau' \\ &= \langle f, Lg \rangle \end{aligned} \quad (6.127)$$

より,  $L$  は自己共役 (self-adjoint) である. 作用素  $L$  について,  $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$  であれば,  $L$  は自己共役 (self-adjoint) であるという. 同様にして,

$$\langle L^* f, g \rangle = \langle f, L^* g \rangle \quad (6.128)$$

が成り立ち,  $L^*$  も自己共役である. よって,

$$\langle L\rho, \rho^* \rangle = \langle \rho, L\rho^* \rangle \quad (6.129)$$

$$\langle L^* \rho, \rho^* \rangle = \langle \rho, L^* \rho^* \rangle \quad (6.130)$$

これより、放射電力 (radiated power)  $P$  は次のようにエルミート形式 (Hermitian form) となる.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \left( \langle \rho^*, L\rho \rangle + \langle \rho^*, L^* \rho \rangle \right) = \frac{1}{2} \langle \rho^*, (L + L^*) \rho \rangle \\ &= \langle \rho^*, (\Re L) \rho \rangle = \langle \rho, (\Re L) \rho^* \rangle = \left( \langle \rho^*, (\Re L) \rho \rangle \right)^* \\ &= P^* \end{aligned} \quad (6.131)$$

ただし,  $(\Re L)$  は作用素 (operator) であり, 次式となる.

$$(\Re L) \rho = \frac{1}{2} (L + L^*) \rho = \iiint \rho \frac{\sin kR}{kR} d\tau \quad (6.132)$$

放射電力は正ゆえ,  $(\Re L)$  は正值作用素 (positive definite operator) である.

### 6.9.2 アレーアンテナの遠方界

スカラ・ヘルムホルツ方程式 (scalar Helmholtz equation) を満足するスカラフィールド (scalar field)  $\psi$  として, 点波源からなる  $N$  素子アレーを考える.  $I_1, I_2, \dots, I_N$  を点波源の複素励振 (complex excitation) の係数,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  をアレー素子の位置ベクトルとする. アレーによるフィールドを求める点 (観測点) の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_0$  とすると, この点でのアレーによるフィールドは,  $I_n$  を係数として式 (6.125) を重ね合わせれば求めることができる.

いま, 波源  $\rho$  は点波源ゆえ, インパルス波源 (impulsive sources) の和として扱えばよいので, 次のようにクロネッカのデルタ記号  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$  を用いて計算すると,

$$\begin{aligned} \psi &= L\rho = L \left\{ \sum_{n=1}^N I_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \right\} \\ &= \iiint \left\{ \sum_{n=1}^N I_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \right\} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}}{-jk|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} d\tau \\ &= \sum_{n=1}^N I_n \iiint \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}}{-jk|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} d\tau \\ &= \sum_{n=1}^N I_n \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n|}}{-jk|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n|} \end{aligned} \quad (6.133)$$

実部は,

$$\Re(\psi) = \sum_{n=1}^N I_n \frac{\sin k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n|}{k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n|} \quad (6.134)$$

観測点  $\mathbf{r}_0$  が十分遠方の場合（全ての  $r_n$  より十分大きい）,

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n| &= \sqrt{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n)(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n)} = \sqrt{r_0^2 - 2\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_n + r_n^2} \\ &= r_0 \left( 1 - 2\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_n}{r_0^2} + \frac{r_n^2}{r_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq r_0 \left( 1 - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_n}{r_0^2} \right) \end{aligned} \quad (6.135)$$

位置ベクトル  $\mathbf{r}_0$  と  $\mathbf{r}_n$  とのなす角を  $\zeta_n$  とおき,

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_n = r_0 r_n \cos \zeta_n \quad (6.136)$$

これより,

$$|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n| \simeq r_0 \left( 1 - \frac{r_0 r_n \cos \zeta_n}{r_0^2} \right) = r_0 - r_n \cos \zeta_n (\simeq r_0) \quad (6.137)$$

よって,

$$e^{-jk|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n|} \simeq e^{-jkr_0} e^{jkr_n \cos \zeta_n} \quad (6.138)$$

したがって、遠方界表示 (far-field expression) は次のようになる.

$$\psi = \sum_{n=1}^N I_n \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n|}}{-jk|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n|} \simeq \frac{e^{-jkr_0}}{-jkr_0} \sum_{n=1}^N I_n e^{jkr_n \cos \zeta_n} \quad (6.139)$$

放射電力  $P$  は式 (6.131) によって与えられ、点波源の場合、次のようになる.

$$\begin{aligned} P &= \left\langle \sum_{m=1}^N I_m^* \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m), \sum_{n=1}^N I_n \frac{\sin k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}{k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \right\rangle \\ &= \iiint \sum_{m=1}^N I_m^* \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \sum_{n=1}^N I_n \frac{\sin k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}{k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} d\tau \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N I_m^* I_n \frac{\sin k|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|}{k|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|} \end{aligned} \quad (6.140)$$

ここで,

$$B_{mn} \equiv \frac{\sin k|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|}{k|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|} \quad (6.141)$$

とおくと,  $B_{mn} = B_{nm}^*$  ゆえ,  $[B]$  はエルミート行列 (Hermitian matrix) である. また,  $P$

は,

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N I_m^* I_n B_{mn} \\
&= \begin{pmatrix} I_1^* & I_2^* & \cdots & I_N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdots & B_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{I}_T^*[B]\mathbf{I} = \mathbf{I}_T^*[B]^*_T\mathbf{I} = \mathbf{I}_T[B]^*\mathbf{I}^* = \left(\mathbf{I}_T^*[B]\mathbf{I}\right)^* \\
&= P^*
\end{aligned} \tag{6.142}$$

よって,  $P$  はエルミート 2 次形式 (Hermitian quadratic form) である.

### 6.9.3 放射強度

単位立体角当たりの電力密度 (power density per unit solid angle) を放射強度 (radiation intensity) という. スカラ関数  $\psi$  より放射強度  $P_r$  は,

$$P_r = \frac{1}{4\pi} \left| kr_0 \psi \right|^2 \tag{6.143}$$

式 (6.139) より,

$$\begin{aligned}
P_r &= \frac{1}{4\pi} \left| kr_0 \frac{e^{-jkr_0}}{-jkr_0} \sum_{n=1}^N I_n e^{jkr_n \cos \zeta_n} \right|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi} \left| \sum_{n=1}^N I_n e^{jkr_n \cos \zeta_n} \right|^2
\end{aligned} \tag{6.144}$$

行列表示に変形して,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^N I_n e^{jkr_n \cos \zeta_n} \\
&= \begin{pmatrix} e^{jkr_1 \cos \zeta_1} & e^{jkr_2 \cos \zeta_2} & \cdots & e^{jkr_N \cos \zeta_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\chi}_T^* \mathbf{I}
\end{aligned} \tag{6.145}$$

ここで,

$$\boldsymbol{\chi}_T^* \equiv \begin{pmatrix} e^{jkr_1 \cos \zeta_1} & e^{jkr_2 \cos \zeta_2} & \cdots & e^{jkr_N \cos \zeta_N} \end{pmatrix} \tag{6.146}$$

これより,

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{4\pi} \left| \boldsymbol{\chi}_T^* \mathbf{I} \right|^2 = \frac{1}{4\pi} \left( \boldsymbol{\chi}_T^* \mathbf{I} \right)^* \left( \boldsymbol{\chi}_T^* \mathbf{I} \right) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{I}_T^* \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\chi}_T^* \mathbf{I} \\ &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{I}_T^* [A] \mathbf{I} \end{aligned} \quad (6.147)$$

ここで,

$$[A] \equiv \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\chi}_T^* \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix} \quad (6.148)$$

正行列 (square matrix)  $[A]$  の行列要素  $A_{mn}$  は,

$$A_{mn} = e^{jk(r_n \cos \zeta_n - r_m \cos \zeta_m)} \quad (6.149)$$

したがって, 放射強度  $P_r$  は,

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \mathbf{I}_m^* \mathbf{I}_n A_{mn} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \mathbf{I}_m^* \mathbf{I}_n e^{jk(r_n \cos \zeta_n - r_m \cos \zeta_m)} \end{aligned} \quad (6.150)$$

#### 6.9.4 アンテナ利得

アンテナ利得 (antenna gain)  $G$  は,

$$G = \frac{4\pi P_r}{P} = \frac{\mathbf{I}_T^* [A] \mathbf{I}}{\mathbf{I}_T^* [B] \mathbf{I}} \quad (6.151)$$

極値条件より, 最大利得は次式の固有値の最大値  $G$  となる.

$$[A] \mathbf{I} = G [B] \mathbf{I} \quad (6.152)$$

先に示したように,  $[A] = \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\chi}_T^*$  のケースより,

$$\boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\chi}_T^* \mathbf{I} = G [B] \mathbf{I} \quad (6.153)$$

この固有値もまたゼロではなく, 最大利得  $G_{max}$  は,

$$G_{max} = \frac{\mathbf{I}_T^{(m)*} \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\chi}_T^* \mathbf{I}^{(m)}}{\mathbf{I}_T^{(m)*} [B] \mathbf{I}^{(m)}} \quad (6.154)$$



ここで,

$$C = \frac{\mathbf{I}_T^{(m)*} \boldsymbol{\chi}}{\mathbf{I}_T^{(m)*} [B] \mathbf{I}^{(m)}} \quad (6.155)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_T^{(m)*} [B] \mathbf{I}^{(m)} &= \frac{\mathbf{I}_T^{(m)*} \boldsymbol{\chi}}{C} \\ [B] \mathbf{I}^{(m)} &= \frac{\boldsymbol{\chi}}{C} \\ \mathbf{I}^{(m)} &= [B]^{-1} \frac{\boldsymbol{\chi}}{C} \end{aligned} \quad (6.156)$$

これより,  $G_{max}$  は,

$$G_{max} = C \boldsymbol{\chi}_T^* \mathbf{I}^{(m)} = C \boldsymbol{\chi}_T^* [B]^{-1} \frac{\boldsymbol{\chi}}{C} = \boldsymbol{\chi}_T^* [B]^{-1} \boldsymbol{\chi} \quad (6.157)$$

行列形式で表すと,

$$\begin{aligned} G_{max} &= \begin{pmatrix} e^{jkr_1 \cos \zeta_1} & e^{jkr_2 \cos \zeta_2} & \dots & e^{jkr_N \cos \zeta_N} \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \dots & B_{NN} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{-jkr_1 \cos \zeta_1} \\ e^{-jkr_2 \cos \zeta_2} \\ \vdots \\ e^{-jkr_N \cos \zeta_N} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.158)$$

このような最大利得について, これまで, ブロードサイド・リニアアレー, エンドファイアアレー, 円形アレーについて適用されている.

## 6.10 最小 2 乗法によるモード整合法

### 6.10.1 不連続部のある導波路

異なる 2 つの一樣導波路が接続された不連続部を考え、導波路軸方向を  $z$  軸、不連続部を  $z = 0$  にとる。  $z \leq 0$  の導波路 #1 および  $z \geq 0$  の導波路 #2 の位置ベクトル  $\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z + \boldsymbol{\rho}$  ( $\mathbf{a}_z$  は  $z$  方向の単位ベクトル) における横断面内の電界  $\mathbf{E}_t^{(1)}$ ,  $\mathbf{E}_t^{(2)}$ , および磁界  $\mathbf{H}_t^{(1)}$ ,  $\mathbf{H}_t^{(2)}$  は、不連続部における入射ルート電力波を  $a_{i,n}$ , 反射ルート電力波を  $b_{i,n}$  とすると ( $i = 1, 2$  は導波路 #1, #2 に対応,  $n$  はモードの次数),

$$\mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, z) = \sum_n \left( a_n^{(1)} e^{-\gamma_n^{(1)} z} + b_n^{(1)} e^{\gamma_n^{(1)} z} \right) \bar{\mathbf{e}}_n^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.159)$$

$$\mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, z) = \sum_n \left( b_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} z} + a_n^{(2)} e^{\gamma_n^{(2)} z} \right) \bar{\mathbf{e}}_n^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.160)$$

また、横断面内磁界  $\mathbf{H}_t^{(1)}$ ,  $\mathbf{H}_t^{(2)}$  は、

$$\mathbf{H}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, z) = \sum_n \left( a_n^{(1)} e^{-\gamma_n^{(1)} z} - b_n^{(1)} e^{\gamma_n^{(1)} z} \right) \bar{\mathbf{h}}_n^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.161)$$

$$\mathbf{H}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, z) = \sum_n \left( b_n^{(2)} e^{-\gamma_n^{(2)} z} - a_n^{(2)} e^{\gamma_n^{(2)} z} \right) \bar{\mathbf{h}}_n^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.162)$$

ここで、

$$\bar{\mathbf{e}}_n^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{Z_n^{(i)}} \mathbf{e}_n^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.163)$$

$$\bar{\mathbf{h}}_n^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{Y_n^{(i)}} \mathbf{h}_n^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = Y_n^{(i)} \mathbf{a}_z \times \bar{\mathbf{e}}_n^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.164)$$

ただし、 $\bar{\mathbf{e}}_n^{(i)}$ ,  $\bar{\mathbf{h}}_n^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) は導波路 #1, #2 における電界および磁界のモード関数 (電力で規格化) を示し、複素の 2 次元ベクトルである。また、 $Z_n^{(i)}$ ,  $Y_n^{(i)}$  は  $n$  次モードの波動インピーダンスおよび波動アドミタンスを示す。このとき、 $|a_n^{(i)}|^2$ ,  $|b_n^{(i)}|^2$  は伝搬モードの場合は電力波であるが、遮断モードの場合は電力波を意味しない、いわゆる共役整合を基にした一般化散乱行列とは異なるもので、全モードの縦続接続を行うための散乱行列である。

### 6.10.2 不連続部の境界条件

不連続部が開口面  $S_0$ , および (完全) 導体面  $S_1$  (導波路 #1 側),  $S_2$  (導波路 #2 側) からなる場合、境界条件は次のようになる。

$$\mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0) \quad (\text{開口面 } S_0) \quad (6.165)$$

$$\mathbf{H}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \mathbf{H}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0) \quad (\text{開口面 } S_0) \quad (6.166)$$

$$\mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = 0 \quad (\text{導体面 } S_1) \quad (6.167)$$

$$\mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = 0 \quad (\text{導体面 } S_2) \quad (6.168)$$

ここで,

$$\mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_n \left( a_n^{(1)} + b_n^{(1)} \right) \bar{\mathbf{e}}_n^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.169)$$

$$\mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_n \left( b_n^{(2)} + a_n^{(2)} \right) \bar{\mathbf{e}}_n^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.170)$$

$$\mathbf{H}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_n \left( a_n^{(1)} - b_n^{(1)} \right) \bar{\mathbf{h}}_n^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.171)$$

$$\mathbf{H}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_n \left( b_n^{(2)} - a_n^{(2)} \right) \bar{\mathbf{h}}_n^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.172)$$

これより, 散乱行列  $[S]$  は,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S_{12} \\ S_{22} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (6.173)$$

ここで,

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_1^{(i)} \\ a_2^{(i)} \\ \vdots \\ a_n^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} b_1^{(i)} \\ b_2^{(i)} \\ \vdots \\ b_n^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2) \quad (6.174)$$

散乱行列は,

$$[S_{ii'}] = \begin{pmatrix} S_{ii',11} & S_{ii',12} & \cdots & S_{ii',1n} & \cdots \\ S_{ii',21} & S_{ii',22} & \cdots & S_{ii',2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ S_{ii',m1} & S_{ii',m2} & \cdots & S_{ii',mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.175)$$

### 6.10.3 単一モード入射の場合

導波路 #1 ( $z \leq 0$ ) より一つの  $k$  次モードだけが不連続部に入射波する場合 ( $a_k^{(1)} \neq 0$ ) を考えると, それ以外に入射波がないことから  $a_{n \neq k}^{(1)} = 0$ ,  $a_n^{(2)} = 0$  とおき,

$$\mathbf{E}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_n \left( a_n^{(1)} \delta_{nk} + b_n^{(1)} \right) \bar{\mathbf{e}}_n^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.176)$$

$$\mathbf{E}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_n b_n^{(2)} \bar{\mathbf{e}}_n^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.177)$$

$$\mathbf{H}_t^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_n \left( a_n^{(1)} \delta_{nk} - b_n^{(1)} \right) \bar{\mathbf{h}}_n^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.178)$$

$$\mathbf{H}_t^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_n b_n^{(2)} \bar{\mathbf{h}}_n^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.179)$$

散乱パラメータは,

$$S_{11,mk} = \frac{b_m^{(1)}}{a_k^{(1)}} \bigg|_{a_{n \neq k}^{(1)}=0, a_n^{(2)}=0} \quad (6.180)$$

$$S_{21,mk} = \frac{b_m^{(2)}}{a_k^{(1)}} \bigg|_{a_{n \neq k}^{(1)}=0, a_n^{(2)}=0} \quad (6.181)$$

これより, 境界条件の式は散乱行列要素を用いて次のように表すことができる.

$$\sum_m (\delta_{mk} + S_{11,mk}) \bar{e}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_m S_{21,mk} \bar{e}_m^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (\text{on } S_0) \quad (6.182)$$

$$\sum_m (\delta_{mk} - S_{11,mk}) \bar{h}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_m S_{21,mk} \bar{h}_m^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (\text{on } S_0) \quad (6.183)$$

$$\sum_m (\delta_{mk} + S_{11,mk}) \bar{e}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) = 0 \quad (\text{on } S_1) \quad (6.184)$$

$$\sum_m S_{21,mk} \bar{e}_m^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) = 0 \quad (\text{on } S_2) \quad (6.185)$$

同様にして,  $S_{12,mk}$ ,  $S_{22,mk}$  に関する式も得られ, ここでは, 導波路 #1, #2 におけるモードの展開項数を  $N_1$ ,  $N_2$  と有限で打ち切った次のような分布を考え, このときの反射係数を  $R_{mk} \equiv S_{11,mk}$ , 透過係数を  $T_{mk} \equiv S_{21,mk}$  とおくと,  $z = 0$  の境界面での横断面内電磁界は,

$$\mathbf{E}_t^{(1)'}(\boldsymbol{\rho}) \equiv \sum_m^{N_1} (\delta_{mk} + R_{mk}) \bar{e}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.186)$$

$$\mathbf{E}_t^{(2)'}(\boldsymbol{\rho}) \equiv \sum_m^{N_2} T_{mk} \bar{e}_m^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.187)$$

$$\mathbf{H}_t^{(1)'}(\boldsymbol{\rho}) \equiv \sum_m^{N_1} (\delta_{mk} - R_{mk}) \bar{h}_m^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.188)$$

$$\mathbf{H}_t^{(2)'}(\boldsymbol{\rho}) \equiv \sum_m^{N_2} T_{mk} \bar{h}_m^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.189)$$

#### 6.10.4 導波路 #1 からの入射したときの相対 2 乗平均誤差

境界面 ( $z = 0$ ) における相対 2 乗平均誤差  $F$  を次のように定義する.

$$F = \frac{1}{2} \left( \frac{C_E}{c_e} + \frac{C_H}{c_h} \right) \quad (6.190)$$

ここで,

$$C_E = \int_{S_0} \left| \mathbf{E}_t^{(1)'} - \mathbf{E}_t^{(2)'} \right|^2 dS + \int_{S_1} \left| \mathbf{E}_t^{(1)'} \right|^2 dS + \int_{S_2} \left| \mathbf{E}_t^{(2)'} \right|^2 dS \quad (6.191)$$

$$C_H = \int_{S_0} \left| \mathbf{H}_t^{(1)'} - \mathbf{H}_t^{(2)'} \right|^2 dS \quad (6.192)$$

また,

$$c_e = \int_{S_0+S_1} \left| \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)} \right|^2 dS \quad (6.193)$$

$$c_h = \int_{S_0} \left| \bar{\mathbf{h}}_k^{(1)} \right|^2 dS \quad (6.194)$$

相対 2 乗平均誤差  $F$  の  $C_E$  の第 1 項を  $C_{E1}$  とおき, 整理すると次のようになる.

$$\begin{aligned} C_{E1} &= \int_{S_0} \left| \mathbf{E}_t^{(1)'} - \mathbf{E}_t^{(2)'} \right|^2 dS \\ &= \int_{S_0} \left| \sum_m^{N_1} (\delta_{mk} + R_{mk}) \bar{\mathbf{e}}_m^{(1)} - \sum_m^{N_2} T_{mk} \bar{\mathbf{e}}_m^{(2)} \right|^2 dS \\ &= \int_{S_0} \left\{ \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)} + \sum_m^{N_1} R_{mk} \bar{\mathbf{e}}_m^{(1)} + \sum_m^{N_2} T_{mk} (-\bar{\mathbf{e}}_m^{(2)}) \right\}^* \\ &\quad \cdot \left\{ \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)} + \sum_n^{N_1} R_{nk} \bar{\mathbf{e}}_n^{(1)} + \sum_n^{N_2} T_{nk} (-\bar{\mathbf{e}}_n^{(2)}) \right\} dS \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (R_k)_T^* & (T_k)_T^* \end{pmatrix} \int_{S_0} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)*} \\ (\bar{\mathbf{e}}^{(1)})_T^* \\ -(\bar{\mathbf{e}}^{(2)})_T^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)} & (\bar{\mathbf{e}}^{(1)}) & -(\bar{\mathbf{e}}^{(2)}) \end{pmatrix} dS \begin{pmatrix} 1 \\ (R_k) \\ (T_k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.195)$$

ここで,

$$(\bar{\mathbf{e}}^{(i)}) = (\bar{\mathbf{e}}_1^{(i)} \quad \bar{\mathbf{e}}_2^{(i)} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{e}}_{N_i}^{(i)}) \quad (i = 1, 2) \quad (6.196)$$

また,

$$(R_k) = \begin{pmatrix} R_{1k} \\ R_{2k} \\ \vdots \\ R_{N_1 k} \end{pmatrix}, \quad (T_k) = \begin{pmatrix} T_{1k} \\ T_{2k} \\ \vdots \\ T_{N_2 k} \end{pmatrix} \quad (6.197)$$

ただし,  $(\bar{\mathbf{e}}^{(i)})_T^*$ ,  $(R_k)_T^*$ ,  $(T_k)_T^*$  は各々  $(\bar{\mathbf{e}}^{(i)})$ ,  $(R_k)$ ,  $(T_k)$  の共役転置行列を示す. このとき, モード関数のスカラー積の項については,

$$\left( \begin{array}{c|ccccccc} \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)} & \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(1)} & \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(1)} & \cdots & -\bar{\mathbf{e}}_k^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(2)} & -\bar{\mathbf{e}}_k^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(2)} & \cdots \\ \hline \bar{\mathbf{e}}_1^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)} & \bar{\mathbf{e}}_1^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(1)} & \bar{\mathbf{e}}_1^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(1)} & \cdots & -\bar{\mathbf{e}}_1^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(2)} & -\bar{\mathbf{e}}_1^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(2)} & \cdots \\ \bar{\mathbf{e}}_2^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)} & \bar{\mathbf{e}}_2^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(1)} & \bar{\mathbf{e}}_2^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(1)} & \cdots & -\bar{\mathbf{e}}_2^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(2)} & -\bar{\mathbf{e}}_2^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ -\bar{\mathbf{e}}_1^{(2)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)} & -\bar{\mathbf{e}}_1^{(2)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(1)} & -\bar{\mathbf{e}}_1^{(2)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(1)} & \cdots & \bar{\mathbf{e}}_1^{(2)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(2)} & \bar{\mathbf{e}}_1^{(2)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(2)} & \cdots \\ -\bar{\mathbf{e}}_2^{(2)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)} & -\bar{\mathbf{e}}_2^{(2)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(1)} & -\bar{\mathbf{e}}_2^{(2)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(1)} & \cdots & \bar{\mathbf{e}}_2^{(2)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(2)} & \bar{\mathbf{e}}_2^{(2)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right)$$

いま, 積分項

$$\int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_m^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_n^{(i')} dS \quad (i, i' = 1, 2) \quad (6.198)$$

について行列表示すると,

$$C_{E1} = \begin{pmatrix} 1 & (R_k)_T^* & (T_k)_T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{e0} \Big|_{S_0} & (p_{11}^e) \Big|_{S_0} & -(p_{12}^e) \Big|_{S_0} \\ (p_{11}^e)_T^* \Big|_{S_0} & \left[ P_{11}^E \right]_{S_0} & -\left[ P_{12}^E \right]_{S_0} \\ -(p_{12}^e)_T^* \Big|_{S_0} & -\left[ P_{12}^E \right]_{T|S_0}^* & \left[ P_{22}^E \right]_{S_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (R_k) \\ (T_k) \end{pmatrix} \quad (6.199)$$

ここで  $(i, i' = 1, 2)$ ,

$$p_{e0} \Big|_{S_0} = \int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)} dS = p_{e0}^* \Big|_{S_0} \quad (6.200)$$

また,

$$(p_{1i'}^e)_{S_0} = \left( \int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(i')} dS \quad \int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(i')} dS \quad \cdots \quad \int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_k^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{N_{i'}}^{(i')} dS \right) \quad (6.201)$$

$$\left[ P_{ii'}^E \right]_{S_0} = \begin{pmatrix} \int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_1^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(i')} dS & \int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_1^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(i')} dS & \cdots & \int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_1^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{N_{i'}}^{(i')} dS \\ \int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_2^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(i')} dS & \int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_2^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(i')} dS & \cdots & \int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_2^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{N_{i'}}^{(i')} dS \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_{N_i}^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1^{(i')} dS & \int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_{N_i}^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^{(i')} dS & \cdots & \int_{S_0} \bar{\mathbf{e}}_{N_i}^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{N_{i'}}^{(i')} dS \end{pmatrix} \quad (6.202)$$

ただし,

$$\left[ P_{11}^E \right]_T^* \Big|_{S_0} = \left[ P_{11}^E \right]_{S_0} \quad (6.203)$$

$$\left[ P_{22}^E \right]_T^* \Big|_{S_0} = \left[ P_{22}^E \right]_{S_0} \quad (6.204)$$

$C_E$  の第 2 項  $C_{E2}$  および第 3 項  $C_{E3}$  も同様にして整理すると,

$$\begin{aligned} C_{E2} &= \int_{S_1} \left| \mathbf{E}_t^{(1)} \right|^2 dS \\ &= \int_{S_1} \left| \sum_m^{N_1} (\delta_{mk} + R_{mk}) \bar{\mathbf{e}}_m^{(1)} \right|^2 dS \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (R_k)_T^* & (T_k)_T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{e0} \Big|_{S_1} & (p_{11}^e)_{S_1} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (p_{11}^e)_T^* \Big|_{S_1} & \left[ P_{11}^E \right]_{S_1} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (R_k) \\ (T_k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.205)$$

$$\begin{aligned} C_{E3} &= \int_{S_2} \left| \mathbf{E}_t^{(2)} \right|^2 dS \\ &= \int_{S_2} \left| \sum_m^{N_2} T_{mk} \bar{\mathbf{e}}_m^{(2)} \right|^2 dS \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (R_k)_T^* & (T_k)_T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ P_{22}^E \end{bmatrix}_{S_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (R_k) \\ (T_k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.206)$$

したがって,  $C_E = C_{E1} + C_{E2} + C_{E3}$  は,

$$C_E = \begin{pmatrix} 1 & (R_k)_T^* & (T_k)_T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{e0}|_{S_0+S_1} & (p_{11}^e)_{S_0+S_1} & -(p_{12}^e)_{S_0} \\ (p_{11}^e)_T^*|_{S_0+S_1} & [P_{11}^E]_{S_0+S_1} & -[P_{12}^E]_{S_0} \\ -(p_{12}^e)_T^*|_{S_0} & -[P_{12}^E]_{T|S_0}^* & [P_{22}^E]_{S_0+S_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (R_k) \\ (T_k) \end{pmatrix} \quad (6.207)$$

ここで,

$$p_{e0}|_{S_0+S_1} = \int_{S_0+S_1} |\bar{\mathbf{e}}_k^{(1)}|^2 dS = c_e = c_e^* \quad (6.208)$$

また,

$$[P_{11}^E]_{T|S_0+S_1}^* = [P_{11}^E]_{S_0+S_1} \quad (6.209)$$

$$[P_{22}^E]_{T|S_0+S_2}^* = [P_{22}^E]_{S_0+S_2} \quad (6.210)$$

ただし, 積分範囲  $(S_0 + S_1)$  は導波路 #1 の断面全体,  $(S_0 + S_2)$  は導波路 #2 の断面全体である. そして,  $C_H$  も反射係数の符号の違いに注意して同様に求めると,

$$\begin{aligned} C_H &= \int_{S_0} |\mathbf{H}_t^{(1)'} - \mathbf{H}_t^{(2)'}|^2 dS \\ &= \int_{S_0} \left| \sum_m^{N_1} (\delta_{mk} - R_{mk}) \bar{\mathbf{h}}_m^{(1)} - \sum_m^{N_2} T_{mk} \bar{\mathbf{h}}_m^{(2)} \right|^2 dS \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -(R_k)_T^* & (T_k)_T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{h0}|_{S_0} & (p_{11}^h)_{S_0} & -(p_{12}^h)_{S_0} \\ (p_{11}^h)_T^*|_{S_0} & [P_{11}^H]_{S_0} & -[P_{12}^H]_{S_0} \\ -(p_{12}^h)_T^*|_{S_0} & -[P_{12}^H]_{T|S_0}^* & [P_{22}^H]_{S_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -(R_k) \\ (T_k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (R_k)_T^* & (T_k)_T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{h0}|_{S_0} & -(p_{11}^h)_{S_0} & -(p_{12}^h)_{S_0} \\ -(p_{11}^h)_T^*|_{S_0} & [P_{11}^H]_{S_0} & [P_{12}^H]_{S_0} \\ -(p_{12}^h)_T^*|_{S_0} & [P_{12}^H]_{T|S_0}^* & [P_{22}^H]_{S_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (R_k) \\ (T_k) \end{pmatrix} \quad (6.211) \end{aligned}$$

ここで  $(i, i' = 1, 2)$ ,

$$p_{h0}|_{S_0} \equiv \int_{S_0} |\bar{\mathbf{h}}_k^{(1)}|^2 dS = c_h = c_h^* \quad (6.212)$$



また,

$$(p_{1i'}^h)_{S_0} = \left( \int_{S_0} \bar{\mathbf{h}}_k^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{h}}_1^{(i')} dS \quad \int_{S_0} \bar{\mathbf{h}}_k^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{h}}_2^{(i')} dS \quad \cdots \quad \int_{S_0} \bar{\mathbf{h}}_k^{(1)*} \cdot \bar{\mathbf{h}}_{N_{i'}}^{(i')} dS \right) \quad (6.213)$$

$$[P_{ii'}^H]_{S_0} = \begin{pmatrix} \int_{S_0} \bar{\mathbf{h}}_1^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{h}}_1^{(i')} dS & \int_{S_0} \bar{\mathbf{h}}_1^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{h}}_2^{(i')} dS & \cdots & \int_{S_0} \bar{\mathbf{h}}_1^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{h}}_{N_{i'}}^{(i')} dS \\ \int_{S_0} \bar{\mathbf{h}}_2^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{h}}_1^{(i')} dS & \int_{S_0} \bar{\mathbf{h}}_2^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{h}}_2^{(i')} dS & \cdots & \int_{S_0} \bar{\mathbf{h}}_2^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{h}}_{N_{i'}}^{(i')} dS \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{S_0} \bar{\mathbf{h}}_{N_i}^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{h}}_1^{(i')} dS & \int_{S_0} \bar{\mathbf{h}}_{N_i}^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{h}}_2^{(i')} dS & \cdots & \int_{S_0} \bar{\mathbf{h}}_{N_i}^{(i)*} \cdot \bar{\mathbf{h}}_{N_{i'}}^{(i')} dS \end{pmatrix} \quad (6.214)$$

ただし,

$$[P_{11}^H]_T^*|_{S_0} = [P_{11}^H]_{S_0} \quad (6.215)$$

$$[P_{22}^H]_T^*|_{S_0} = [P_{22}^H]_{S_0} \quad (6.216)$$

さらに,

$$(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} (R_k) \\ (T_k) \end{pmatrix} \quad (6.217)$$

$$(\alpha)_T^* \equiv \begin{pmatrix} (R_k)_T^* & (T_k)_T^* \end{pmatrix} \quad (6.218)$$

$$(p_e^k) \equiv \left( (p_{11}^e)_{S_0+S_1} \quad - (p_{12}^e)_{S_0} \right) \quad (6.219)$$

$$(p_h^k) \equiv \left( (p_{11}^h)_{S_0} \quad (p_{12}^h)_{S_0} \right) \quad (6.220)$$

$$[P_E^k] \equiv \begin{pmatrix} [P_{11}^E]_{S_0+S_1}^* & -[P_{12}^E]_{S_0} \\ -[P_{12}^E]_{T|S_0}^* & [P_{22}^E]_{S_0+S_2} \end{pmatrix} = [P_E^k]_T^* \quad (6.221)$$

$$[P_H^k] \equiv \begin{pmatrix} [P_{11}^H]_{S_0} & [P_{12}^H]_{S_0} \\ [P_{12}^H]_{T|S_0}^* & [P_{22}^H]_{S_0} \end{pmatrix} = [P_H^k]_T^* \quad (6.222)$$

とおくと,

$$C_E = \begin{pmatrix} 1 & (\alpha)_T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_e & (p_e^k) \\ (p_e^k)_T^* & [P_E^k] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (\alpha) \end{pmatrix} \quad (6.223)$$

$$C_H = \begin{pmatrix} 1 & (\alpha)_T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_h & -(p_h^k) \\ -(p_h^k)_T^* & [P_H^k] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (\alpha) \end{pmatrix} \quad (6.224)$$

よって,

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2} \left( \frac{C_E}{c_e} + \frac{C_H}{c_h} \right) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & (\alpha)_T^* \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{c_e} \begin{pmatrix} c_e & (p_e^k) \\ (p_e^k)_T^* & [P_E^k] \end{pmatrix} + \frac{1}{c_h} \begin{pmatrix} c_h & -(p_h)_k \\ -(p_h)_T^* & [P_H^k] \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ (\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.225}$$

ここで,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{c_e}{c_e} + \frac{c_h}{c_h} \right) = 1 \tag{6.226}$$

また,

$$(u^k) \equiv \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{c_e} (p_e^k) + \frac{1}{c_h} (p_h^k) \right\} \tag{6.227}$$

$$[U^k] \equiv \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{c_e} [P_E^k] + \frac{1}{c_h} [P_H^k] \right\} = [U^k]_T^* \tag{6.228}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
F &= \begin{pmatrix} 1 & (\alpha)_T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -(u^k) \\ -(u^k)_T^* & [U^k] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (\alpha) \end{pmatrix} \\
&= 1 - (u^k)(\alpha) - (\alpha)_T^* (u^k)_T^* + (\alpha)_T^* [U^k](\alpha) \\
&= 1 - (u^k)(\alpha) - (u^k)^*(\alpha)^* + (\alpha)_T [U^k](\alpha)^*
\end{aligned} \tag{6.229}$$

さらに,  $F = F^*$  より,

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ 1 - (u^k)(\alpha) - (u^k)^*(\alpha)^* + (\alpha)_T [U^k](\alpha)^* \right\}^* \\
&= 1 - (u^*)_k (\alpha^*) - (u)_k (\alpha) + (\alpha)_T^* [U^k]^* (\alpha)
\end{aligned} \tag{6.230}$$

なお, 行列  $[P_E^k]$ ,  $[P_H^k]$  の第  $m$  行  $n$  列要素を各々  $P_{E,mn}^k$ ,  $P_{H,mn}^k$  とすると, 行列  $[U^k]$  の第  $m$  行  $n$  列要素  $U_{mn}^k$  は,  $c_e = P_{E,kk}$ ,  $c_h = P_{H,kk}$  より,

$$U_{mn}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{P_{E,mn}^k}{P_{E,kk}} + \frac{P_{H,mn}^k}{P_{H,kk}} \right) = U_{nm}^{k*} \tag{6.231}$$

$$u_n^k = \frac{1}{2} \left( -\frac{P_{E,kn}^k}{P_{E,kk}} + \frac{P_{H,kn}^k}{P_{H,kk}} \right) \tag{6.232}$$

また,  $(u^k)$  の共役転置ベクトル  $(u^k)_T^*$  の第  $n$  列要素  $u_n^{k*}$  は,  $[P_E^k] = [P_E^k]_T^*$ ,  $[P_H^k] = [P_H^k]_T^*$  より,

$$\begin{aligned} u_n^{k*} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{P_{E,kn}^*}{P_{E,kk}^*} + \frac{P_{H,kn}^*}{P_{H,kk}^*} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{P_{E,nk}}{P_{E,kk}} + \frac{P_{H,nk}}{P_{H,kk}} \right) \end{aligned} \quad (6.233)$$

### 6.10.5 エルミート 2 次形式

入射波について  $\alpha_0 = 1$  として,

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ R_k \\ T_k \end{pmatrix} \quad (6.234)$$

$$\mathbf{x}_T^* \equiv \begin{pmatrix} \alpha_0^* & (R_k)_T^* & (T_k)_T^* \end{pmatrix} \quad (6.235)$$

を新たに定義し,

$$[Q_E^k] \equiv \begin{pmatrix} c_e & (p_e^k) \\ (p_e^k)_T^* & [P_E^k] \end{pmatrix} = [Q_E^k]_T^* \quad (6.236)$$

$$[Q_H^k] \equiv \begin{pmatrix} c_h & -(p_h^k) \\ -(p_h^k)_T^* & [P_H^k] \end{pmatrix} = [Q_H^k]_T^* \quad (6.237)$$

また,

$$[V^k] \equiv \begin{pmatrix} 1 & -(u^k) \\ -(u^k)_T^* & [U^k] \end{pmatrix} = [V^k]_T^* \quad (6.238)$$

とおくと,

$$C_E = \mathbf{x}_T^* [Q_E^k] \mathbf{x} \quad (6.239)$$

複素共役は,

$$\begin{aligned} C_E^* &= \left\{ \mathbf{x}_T^* [Q_E^k] \mathbf{x} \right\}^* = \mathbf{x}_T [Q_E^k]_T^* \mathbf{x}^* = \mathbf{x}_T^* [Q_E^k]_T^* \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}_T^* [Q_E^k] \mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.240)$$

よって,

$$C_E^* = C_E \quad (6.241)$$

同様にして,

$$C_H^* = \left\{ \mathbf{x}_T^* \left[ Q_H^k \right] \mathbf{x} \right\}^* = \mathbf{x}_T^* \left[ Q_H^k \right] \mathbf{x} = C_H \quad (6.242)$$

いま,

$$\left[ W \right] \equiv \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}_T & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \left[ W \right]_T^* \quad (6.243)$$

を定義すると,  $F$  は次のようになる.

$$F = \frac{\mathbf{x}_T^* \left[ V^k \right] \mathbf{x}}{\mathbf{x}_T^* \left[ W \right] \mathbf{x}} \quad (6.244)$$

ただし,  $\left[ V \right]_k$ ,  $\left[ W \right]$  はエルミート行列である. したがって,

$$F^* = \left\{ \frac{\mathbf{x}_T^* \left[ V^k \right] \mathbf{x}}{\mathbf{x}_T^* \left[ W \right] \mathbf{x}} \right\}^* = \frac{\mathbf{x}_T \left[ V^k \right]^* \mathbf{x}^*}{\mathbf{x}_T \left[ W \right] \mathbf{x}^*} = \frac{\mathbf{x}_T^* \left[ V^k \right] \mathbf{x}}{\mathbf{x}_T^* \left[ W \right] \mathbf{x}} = F \quad (6.245)$$

このように相対 2 乗平均誤差  $F$  は, エルミート 2 次形式の比で表される.

## 6.11 相対 2 乗平均誤差の最小値

各モードの反射係数および透過係数は、相対 2 乗平均誤差  $F$  をこれらの係数のいずれに対しても最小となるように決定すればよいから、全ての  $l$  に対して

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_l^*} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, N) \quad (6.246)$$

より,

$$u_l^{k*} = (U_{l-}^k) \left( \alpha \right) \quad (l = 1, 2, \dots, N) \quad (6.247)$$

全ての  $l$  について列に並べて行列を構成すると、次のようになる.

$$(u^k)_T^* = [U^k] \left( \alpha \right) = [U^k] \begin{pmatrix} R_k \\ T_k \end{pmatrix} \quad (6.248)$$

ここで,

$$[U^k] = [U^k]_T^* \quad (6.249)$$

このようにして得られた解を  $(\alpha^k)$  とすると、相対 2 乗平均誤差  $F$  は次のようになる.

$$\begin{aligned} F &= 1 - (u^k) \left( \alpha^k \right) - (u^k)^* \left( \alpha^k \right)^* + (\alpha^k)_T^* [U^k] \left( \alpha^k \right) \\ &= 1 - (u^k) \left( \alpha^k \right) - (u^k)^* \left( \alpha^k \right)^* + (\alpha^k)_T^* (u^k)_T^* \\ &= 1 - (u^k) \left( \alpha^k \right) \end{aligned} \quad (6.250)$$



# CHAPTER A

## 付録

### A.1 調和関数の不定積分

---

境界条件の異なる 2 つの固有関数  $f_m$  (固有値  $k_m$ ),  $g_n$  (固有値  $\hat{k}_n$ )

$$f_m'' + k_m^2 f_m = 0, \quad g_n'' + \hat{k}_n^2 g_n = 0 \quad (\text{A.1})$$

について,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (f_m g_n' - f_m' g_n) &= f_m' g_n' + f_m g_n'' - f_m'' g_n - f_m' g_n' \\ &= f_m g_n'' - f_m'' g_n \\ &= f_m (-\hat{k}_n^2 g_n) - (-k_m^2 f_m) g_n \\ &= (k_m^2 - \hat{k}_n^2) f_m g_n \end{aligned}$$

不定積分すると, 次式が得られる (積分定数省略).

$$f_m g_n' - f_m' g_n = (k_m^2 - \hat{k}_n^2) \int f_m g_n dx \quad (\text{A.2})$$

よって,  $k_m \neq \hat{k}_n$  のとき, 調和関数に関する不定積分は次のようになる.

$$\int f_m g_n dx = \frac{f_m g_n' - f_m' g_n}{k_m^2 - \hat{k}_n^2} \quad (\text{A.3})$$

#### A.1.1 正弦・正弦関数 ( $\sin$ , $\sin$ ) の不定積分

まず,  $f$ ,  $g$  をともに正弦関数

$$f = \sin(k_x x + \xi), \quad g = \sin(\hat{k}_x x + \hat{\xi}) \quad (\text{A.4})$$

とする。これらを  $x$  で微分すると,

$$f' = k_x \cos(k_x x + \xi), \quad g' = \hat{k}_x \cos(\hat{k}_x x + \hat{\xi}) \quad (\text{A.5})$$

先に求めた不定積分の公式 (A.3) より,

$$\begin{aligned} & \int f g dx \\ &= \int \sin(k_x x + \xi) \cdot \sin(\hat{k}_x x + \hat{\xi}) dx \\ &= \frac{\sin(k_x x + \xi) \cdot \hat{k}_x \cos(\hat{k}_x x + \hat{\xi}) - k_x \cos(k_x x + \xi) \cdot \sin(\hat{k}_x x + \hat{\xi})}{k_x^2 - \hat{k}_x^2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

三角関数の積和公式

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \quad (\text{A.7})$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \quad (\text{A.8})$$

より,

$$\begin{aligned} & \int f g dx \\ &= \hat{k}_x \frac{\sin \left\{ (k_x + \hat{k}_x)x + (\xi + \hat{\xi}) \right\} + \sin \left\{ (k_x - \hat{k}_x)x + (\xi - \hat{\xi}) \right\}}{2(k_x^2 - \hat{k}_x^2)} \\ & \quad - k_x \frac{\sin \left\{ (k_x + \hat{k}_x)x + (\xi + \hat{\xi}) \right\} - \sin \left\{ (k_x - \hat{k}_x)x + (\xi - \hat{\xi}) \right\}}{2(k_x^2 - \hat{k}_x^2)} \\ &= -\frac{\sin \left\{ (k_x + \hat{k}_x)x + (\xi + \hat{\xi}) \right\}}{2(k_x + \hat{k}_x)} + \frac{\sin \left\{ (k_x - \hat{k}_x)x + (\xi - \hat{\xi}) \right\}}{2(k_x - \hat{k}_x)} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

ここで, 加法定理より,

$$\begin{aligned} & \sin \left\{ (k_x - \hat{k}_x)x + (\xi - \hat{\xi}) \right\} \\ &= \sin \left\{ (k_x - \hat{k}_x)x \right\} \cos(\xi - \hat{\xi}) + \cos \left\{ (k_x - \hat{k}_x)x \right\} \sin(\xi - \hat{\xi}) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$\hat{k}_x \rightarrow k_x$  のとき,

$$\lim_{\hat{k}_x \rightarrow k_x} \frac{\sin \left\{ (k_x - \hat{k}_x)x \right\} \cos(\xi - \hat{\xi})}{2(k_x - \hat{k}_x)} = \frac{x}{2} \cos(\xi - \hat{\xi}) \quad (\text{A.11})$$

$k_x = \hat{k}_x$  のとき,

$$\int f g dx = -\frac{\sin \left\{ 2k_x x + (\xi + \hat{\xi}) \right\}}{4k_x} + \frac{x \cos(\xi - \hat{\xi})}{2} \quad (\text{A.12})$$



また，加法定理より，

$$\sin \{2k_x x + (\xi + \hat{\xi})\} = \sin(2k_x x) \cos(\xi + \hat{\xi}) + \cos(2k_x x) \sin(\xi + \hat{\xi}) \quad (\text{A.13})$$

$k_x \rightarrow 0$  のとき，

$$\lim_{k_x \rightarrow 0} \frac{\sin(2k_x x) \cos(\xi + \hat{\xi})}{4k_x} = \frac{x}{2} \cos(\xi + \hat{\xi}) \quad (\text{A.14})$$

$k_x = 0$  のとき，三角関数の和積公式

$$-\cos A + \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (\text{A.15})$$

より，

$$\begin{aligned} \int f g dx &= -\frac{x \cos(\xi + \hat{\xi})}{2} + \frac{x \cos(\xi - \hat{\xi})}{2} \\ &= x \sin \xi \sin \hat{\xi} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

あるいは， $k_x = \hat{k}_x = 0$  のとき， $f = \sin \xi$ ， $g = \sin \hat{\xi}$  より，

$$\begin{aligned} \int f g dx &= \sin \xi \sin \hat{\xi} \int dx \\ &= x \sin \xi \sin \hat{\xi} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

また， $k_x = \hat{k}_x \neq 0$  のとき， $f = \sin(k_x x + \xi)$ ， $g = \sin(k_x x + \hat{\xi})$ . 三角関数の積和公式

$$2 \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \quad (\text{A.18})$$

より，

$$\begin{aligned} f g &= \sin(k_x x + \xi) \cdot \sin(k_x x + \hat{\xi}) \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\cos \{2k_x x + (\xi + \hat{\xi})\} + \cos(\xi - \hat{\xi}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

よって，

$$\begin{aligned} \int f g dx &= \frac{1}{2} \int \left[ -\cos \{2k_x x + (\xi + \hat{\xi})\} + \cos(\xi - \hat{\xi}) \right] dx \\ &= -\frac{\sin \{2k_x x + (\xi + \hat{\xi})\}}{4k_x} + \frac{x \cos(\xi - \hat{\xi})}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

正弦・正弦関数の積分をまとめると， $k_x \neq \hat{k}_x$  のとき，

$$\begin{aligned} &\int \sin(k_x x + \xi) \cdot \sin(\hat{k}_x x + \hat{\xi}) dx \\ &= -\frac{\sin \{(k_x + \hat{k}_x)x + (\xi + \hat{\xi})\}}{2(k_x + \hat{k}_x)} + \frac{\sin \{(k_x - \hat{k}_x)x + (\xi - \hat{\xi})\}}{2(k_x - \hat{k}_x)} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

また,  $k_x = \hat{k}_x \neq 0$  のとき,

$$\begin{aligned} & \int \sin(k_x x + \xi) \cdot \sin(k_x x + \hat{\xi}) dx \\ &= -\frac{\sin\{2k_x x + (\xi + \hat{\xi})\}}{4k_x} + \frac{x \cos(\xi - \hat{\xi})}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

さらに,  $k_x = \hat{k}_x = 0$  のとき,

$$\int \sin \xi \sin \hat{\xi} dx = x \sin \xi \sin \hat{\xi} \quad (\text{A.23})$$

### A.1.2 余弦・余弦関数 ( $\cos$ , $\cos$ ) の不定積分

次に,  $f$ ,  $g$  をともに余弦関数

$$f = \cos(k_x x + \xi), \quad g = \cos(\hat{k}_x x + \hat{\xi}) \quad (\text{A.24})$$

とする. ここで,  $\xi \equiv \zeta + \pi/2$ ,  $\hat{\xi} \equiv \hat{\zeta} + \pi/2$  とおくと,

$$f = \cos(k_x x + \zeta + \pi/2) = \sin(k_x x + \zeta) \quad (\text{A.25})$$

$$g = \cos(\hat{k}_x x + \hat{\zeta} + \pi/2) = \sin(\hat{k}_x x + \hat{\zeta}) \quad (\text{A.26})$$

ここで,  $\zeta = \xi - \pi/2$ ,  $\hat{\zeta} = \hat{\xi} - \pi/2$  より,

$$\zeta + \hat{\zeta} = \xi + \hat{\xi} - \pi \quad (\text{A.27})$$

$$\zeta - \hat{\zeta} = \xi - \hat{\xi} \quad (\text{A.28})$$

よって,

$$\begin{aligned} & \int f g dx \\ &= \int \cos(k_x x + \xi) \cdot \cos(\hat{k}_x x + \hat{\xi}) dx \\ &= \int \sin(k_x x + \zeta) \cdot \sin(\hat{k}_x x + \hat{\zeta}) dx \\ &= -\frac{\sin\{(k_x + \hat{k}_x)x + (\zeta + \hat{\zeta})\}}{2(k_x + \hat{k}_x)} + \frac{\sin\{(k_x - \hat{k}_x)x + (\zeta - \hat{\zeta})\}}{2(k_x - \hat{k}_x)} \\ &= \frac{\sin\{(k_x + \hat{k}_x)x + (\xi + \hat{\xi})\}}{2(k_x + \hat{k}_x)} + \frac{\sin\{(k_x - \hat{k}_x)x + (\xi - \hat{\xi})\}}{2(k_x - \hat{k}_x)} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

また,  $k_x = \hat{k}_x \neq 0$  のとき,

$$\begin{aligned}
\int fg dx &= \int \cos(k_x x + \xi) \cdot \cos(k_x x + \hat{\xi}) dx \\
&= \int \sin(k_x x + \zeta) \cdot \sin(k_x x + \hat{\zeta}) dx \\
&= -\frac{\sin\{2k_x x + (\zeta + \hat{\zeta})\}}{4k_x} + \frac{x \cos(\zeta - \hat{\zeta})}{2} \\
&= \frac{\sin\{2k_x x + (\xi + \hat{\xi})\}}{4k_x} + \frac{x \cos(\xi - \hat{\xi})}{2}
\end{aligned} \tag{A.30}$$

さらに,  $k_x = \hat{k}_x = 0$  のとき,

$$\begin{aligned}
\int fg dx &= \int \cos \xi \cos \hat{\xi} dx \\
&= x \cos \xi \cos \hat{\xi}
\end{aligned} \tag{A.31}$$

### A.1.3 不定積分のまとめ

正弦・正弦関数を上側, 余弦・余弦関数を下側に記して積分をまとめると,  $k_x \neq \hat{k}_x$  のとき,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin}{\cos}(k_x x + \xi) \cdot \frac{\sin}{\cos}(\hat{k}_x x + \hat{\xi}) dx \\
&= \mp \frac{\sin\{(k_x + \hat{k}_x)x + (\xi + \hat{\xi})\}}{2(k_x + \hat{k}_x)} + \frac{\sin\{(k_x - \hat{k}_x)x + (\xi - \hat{\xi})\}}{2(k_x - \hat{k}_x)}
\end{aligned} \tag{A.32}$$

また,  $k_x = \hat{k}_x \neq 0$  のとき,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin}{\cos}(k_x x + \xi) \cdot \frac{\sin}{\cos}(k_x x + \hat{\xi}) dx \\
&= \mp \frac{\sin\{2k_x x + (\xi + \hat{\xi})\}}{4k_x} + \frac{x \cos(\xi - \hat{\xi})}{2}
\end{aligned} \tag{A.33}$$

さらに,  $k_x = \hat{k}_x = 0$  のとき,

$$\int \frac{\sin}{\cos} \xi \cdot \frac{\sin}{\cos} \hat{\xi} dx = x \frac{\sin}{\cos} \xi \cdot \frac{\sin}{\cos} \hat{\xi} \tag{A.34}$$

被積分関数の定数項を若干，変形した形について， $k_x \neq \hat{k}_x$  のとき，

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sin\{k_x(x+x_1)\}}{\cos\{k_x(x+x_1)\}} \cdot \frac{\sin\{\hat{k}_x(x+x_2)\}}{\cos\{\hat{k}_x(x+x_2)\}} dx \\
&= \mp \frac{\sin\{k_x(x+x_1) + \hat{k}_x(x+x_2)\}}{2(k_x + \hat{k}_x)} \\
&\quad + \frac{\sin\{k_x(x+x_1) - \hat{k}_x(x+x_2)\}}{2(k_x - \hat{k}_x)}
\end{aligned} \tag{A.35}$$

また， $k_x = \hat{k}_x \neq 0$  のとき，

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sin\{k_x(x+x_1)\}}{\cos\{k_x(x+x_1)\}} \cdot \frac{\sin\{k_x(x+x_2)\}}{\cos\{k_x(x+x_2)\}} dx \\
&= \mp \frac{\sin\{k_x(2x+x_1+x_2)\}}{4k_x} + \frac{x \cos\{k_x(x_1-x_2)\}}{2}
\end{aligned} \tag{A.36}$$

さらに， $k_x = \hat{k}_x = 0$  のとき，

$$\int \frac{\sin\{k_x(x+x_1)\}}{\cos\{k_x(x+x_1)\}} \cdot \frac{\sin\{k_x(x+x_2)\}}{\cos\{k_x(x+x_2)\}} dx = \frac{0}{x} \tag{A.37}$$

## A.2 調和関数の定積分

$k_{xm} \neq \hat{k}_{xm'}$  のとき,

$$\begin{aligned}\hat{X}_{mm'}^{\{\sin\}_{\cos}} &= \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{\sin\{k_{xm}(x+x_1)\}}{\cos\{k_{xm}(x+x_1)\}} \cdot \frac{\sin\{\hat{k}_{xm'}(x+x_2)\}}{\cos\{\hat{k}_{xm'}(x+x_2)\}} dx \\ &= \left[ \mp \frac{\sin\{k_{xm}(x+x_1) + \hat{k}_{xm'}(x+x_2)\}}{2(k_{xm} + \hat{k}_{xm'})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin\{k_{xm}(x+x_1) - \hat{k}_{xm'}(x+x_2)\}}{2(k_{xm} - \hat{k}_{xm'})} \right]_{x_{min}}^{x_{max}}\end{aligned}\quad (\text{A.38})$$

また,  $k_{xm} = \hat{k}_{xm'} \neq 0$  のとき,

$$\begin{aligned}\hat{X}_{mm'}^{\{\sin\}_{\cos}} &= \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{\sin\{k_{xm}(x+x_1)\}}{\cos\{k_{xm}(x+x_1)\}} \cdot \frac{\sin\{k_{xm}(x+x_2)\}}{\cos\{k_{xm}(x+x_2)\}} dx \\ &= \left[ \mp \frac{\sin\{k_{xm}(2x+x_1+x_2)\}}{4k_{xm}} + \frac{x \cos\{k_{xm}(x_1-x_2)\}}{2} \right]_{x_{min}}^{x_{max}}\end{aligned}\quad (\text{A.39})$$

$k_{xm} = \hat{k}_{xm'} = 0$  のとき, 上側は被積分項がゼロ, 下側は,

$$\left[ x \right]_{x_{min}}^{x_{max}} = x_{max} - x_{min} \quad (\text{A.40})$$

同様にして,  $k_{yn} \neq \hat{k}_{yn'}$  のとき,

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{nn'}^{\{\sin\}_{\cos}} &= \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{\sin\{k_{yn}(y+y_1)\}}{\cos\{k_{yn}(y+y_1)\}} \cdot \frac{\sin\{\hat{k}_{yn'}(y+y_2)\}}{\cos\{\hat{k}_{yn'}(y+y_2)\}} dy \\ &= \left[ \mp \frac{\sin\{k_{yn}(y+y_1) + \hat{k}_{yn'}(y+y_2)\}}{2(k_{yn} + \hat{k}_{yn'})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin\{k_{yn}(y+y_1) - \hat{k}_{yn'}(y+y_2)\}}{2(k_{yn} - \hat{k}_{yn'})} \right]_{y_{min}}^{y_{max}}\end{aligned}\quad (\text{A.41})$$

また,  $k_{yn} = \hat{k}_{yn'} \neq 0$  のとき,

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{nn'}^{\{\sin\}_{\cos}} &= \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{\sin\{k_{yn}(y+y_1)\}}{\cos\{k_{yn}(y+y_1)\}} \cdot \frac{\sin\{k_{yn}(y+y_2)\}}{\cos\{k_{yn}(y+y_2)\}} dy \\ &= \left[ \mp \frac{\sin\{k_{yn}(2y+y_1+y_2)\}}{4k_{yn}} + \frac{y \cos\{k_{yn}(y_1-y_2)\}}{2} \right]_{y_{min}}^{y_{max}}\end{aligned}\quad (\text{A.42})$$

$k_{yn} = \hat{k}_{yn'} = 0$  のとき, 上側は被積分項がゼロ, 下側は,

$$\left[ y \right]_{y_{min}}^{y_{max}} = y_{max} - y_{min} \quad (\text{A.43})$$

### A.3 ラゲルの多項式

---

ラゲルの多項式 (the Laguerre polynomials)  $y = L_{n,l}(x)$  は, 次のラゲルの微分方程式を満足する.

$$xy'' + (l+1-x)y' + ny = 0 \quad (\text{A.44})$$

ロドリゲス表示 (Rodrigues's Formula) で示すと次のようになる.

$$L_{n,l}(x) = \frac{e^x x^{-l}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+l}) \quad (\text{A.45})$$

これより,

$$L_{n,l}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n+l}{n-i} \frac{(-x)^i}{i!} \quad (l > -1) \quad (\text{A.46})$$

ここで,

$$\begin{aligned} \binom{n+l}{n-i} &= {}_{n+l}C_{n-i} = \frac{(n+l)!}{(n-i)! \{(n+l) - (n-i)\}!} \\ &= \frac{(n+l)!}{(n-i)!(l+i)!} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

なお,  ${}_nC_k$  は,

$$\begin{aligned} {}_nC_k &= \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

ラゲルの多項式の低次の式を考えると,  $n=0$  のとき,

$$L_{0,l}(x) = 1 \quad (\text{A.49})$$

より,

$$L_{0,0}(x) = L_{0,1}(x) = L_{0,2}(x) = \cdots = 1 \quad (\text{A.50})$$

$n=1$  のとき,

$$L_{1,l}(x) = (1+l) - x \quad (\text{A.51})$$

より,

$$L_{1,0}(x) = 1 - x \quad (\text{A.52})$$

$$L_{1,1}(x) = 2 - x \quad (\text{A.53})$$

$$L_{1,2}(x) = 3 - x \quad (\text{A.54})$$

$n = 2$  のとき,

$$L_{2,l}(x) = \frac{(2+l)(1+l)}{2} - (2+l)x + \frac{x^2}{2} \quad (\text{A.55})$$

より,

$$L_{2,0}(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2} \quad (\text{A.56})$$

$$L_{2,1}(x) = 3 - 3x + \frac{x^2}{2} \quad (\text{A.57})$$

$$L_{2,2}(x) = 6 - 4x + \frac{x^2}{2} \quad (\text{A.58})$$

関数  $L_{n,l}(x)$  は,  $[0, \infty]$  において重み係数  $e^{-x}x^l$  を用いれば次のような直交性をもつ.

$$\int_0^\infty e^{-x}x^l L_{n,l}(x) L_{n',l}(x) dx = \frac{(n+l)!}{n!} \delta_{n,n'} \quad (\text{A.59})$$

密度関数  $e^{-x}x^l$  より直交関数系は,

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{l}{2}}L_{n,l}(x) \quad (\text{A.60})$$

さらに, 式 (A.59) の直交性より正規直交系は,

$$\sqrt{\frac{n!}{(n+l)!}} e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{l}{2}}L_{n,l}(x) \quad (\text{A.61})$$

$x \equiv X^2 \equiv (\gamma/\gamma_0)^2$  とおいて変数変換すると,  $dx = 2XdX$  より,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-X^2}(X^2)^l L_{n,l}(X^2) L_{n',l}(X^2) 2XdX \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}} \left(\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right)^{l+\frac{1}{2}} L_{n,l}\left(\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right) L_{n',l}\left(\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right) d\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right) \\ &= \frac{(n+l)!}{2n!} \delta_{n,n'} \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$