

放射特性の解析・設計と指向性合成

出口 博之

同志社大学

2026年1月13日

目次

第1章 開口面法	1
1.1 開口面の境界線での不連続を考慮した積分表示	1
1.1.1 電荷の保存則（連続の式）	1
1.1.2 面電流分布の不連続	2
1.1.3 線電荷, 線磁荷の周回積分による電磁界	3
1.1.4 有限の開口面分布による電磁界の積分表示式	3
1.1.5 ベクトルの勾配	5
1.2 開口面法（開口面が曲面の場合）	7
1.3 開口面法（開口面が平面の場合）	9
1.4 フラウンホーファ領域放射電界	13
1.5 フレネル領域放射電界	14
1.6 導波管モードによる放射特性	15
1.6.1 単一モード	15
1.6.2 TE モード	21
1.6.3 TM モード	22
1.6.4 開口径が十分大きい場合	22
1.6.5 多モード（伝搬モード, 無損失）	23
1.7 円形開口面分布による放射特性	24
1.7.1 円形開口面分布	24
1.7.2 回転対称な円形開口面分布	25
1.7.3 円形一様開口面分布	26
1.7.4 放物線テーパ分布	27
第2章 方形導波管開口からの放射	31
2.1 方形導波管開口からの放射特性	31
2.1.1 方形開口からの放射	31

2.1.2	方形導波管モードによる放射特性	33
2.2	方形導波管の TE_{mn} モードによる遠方放射界	33
2.2.1	方形導波管の TE_{mn} モード関数	33
2.2.2	遠方放射電界	34
2.3	方形 TE モードによる放射特性の例	43
2.3.1	方形 TE_{0n} モード ($m = 0$) による遠方界	43
2.3.2	方形 TE_{01} モード ($m = 0, n = 1$) による遠方界	44
2.3.3	方形 TE_{m0} モード ($n = 0$) による遠方界	45
2.3.4	方形 TE_{10} モード ($m = 1, n = 0$) による遠方界	46
2.3.5	ピーク利得	47
2.4	方形 TE_{mn} モードによるフレネル領域の放射界	48
2.4.1	フレネル積分	48
2.5	方形 TM_{mn} モードによる放射	54
2.6	正方形導波管のモードとその放射パターンの例	57
2.6.1	正方形導波管 TE_{10} モード	57
2.6.2	正方形導波管 TE_{12} モード	58
2.6.3	正方形導波管 TM_{12} モード	59
2.6.4	正方形導波管 TE_{01} モード	60
2.6.5	正方形導波管 TE_{21} モード	61
2.6.6	正方形導波管 TM_{21} モード	62
2.7	2.7 多モード方形導波管開口からの放射	63
2.7.1	多モードを合成した開口面分布	63
2.7.2	開口面での反射が小さい場合	64
2.7.3	開口径が大きい場合	65
2.7.4	モードの合成による交差偏波成分の低減	65
第3章	円形導波管開口からの放射	69
3.1	円形導波管開口からの放射	69
3.1.1	TE モード	70
3.1.2	TM モード	71
3.1.3	TE/TM をまとめた表示式	71
3.2	円形導波管の TE_{1n} および TM_{1n} モードの特性	72
3.3	フラウンホーファ領域	73
3.4	フレネル領域	76
3.4.1	TM モード	80

3.5	開口径が十分大きい場合	81
3.5.1	TE モード	81
3.5.2	TM モード	82
3.6	多モード円形導波管開口からの放射	83
第 4 章	開口面アンテナの設計・解析	85
4.1	多重 2 次曲面鏡系の等価パラボラ表示	85
4.1.1	回転放物面鏡と開口面との関係	85
4.1.2	回転放物面鏡	85
4.1.3	だ円と双曲線の離心率	89
4.1.4	だ円と双曲線	89
4.1.5	楕円面, 凸面のとき	90
4.1.6	双曲面, 凹面, 発散系のとき	91
4.1.7	双曲面, 凹面, 集束系のとき	92
4.1.8	双曲面, 凸面, 発散系のとき	93
4.1.9	双曲面, 凸面, 集束系のとき	94
4.1.10	離心率	95
4.1.11	だ円および双曲線の関係式	95
4.1.12	回転 2 次曲面鏡系の入射光線と反射光線	96
4.1.13	多重反射鏡の表示式	103
4.2	平均放射パターン	107
4.2.1	位相誤差のある開口面分布による指向性関数	107
4.2.2	平均的な放射電力	107
4.2.3	鏡面ひずみによる利得低下量	109
4.3	軸対称複反射鏡アンテナの最適開口面分布	111
4.4	軸対称カセグレンアンテナの鏡面修整法	115
4.4.1	軸対称 2 枚修整鏡面系における光路長一定の条件	115
4.4.2	反射の法則	116
4.4.3	幾何光学におけるエネルギー保存の法則	118
第 5 章	指向性合成と波源分布の最適化	121
5.1	ウッドワード・ローソン法	121
5.2	波源分布のフーリエ級数展開	124
5.2.1	開口面分布と電界指向性との関係	124
5.2.2	変数分離された開口面分布	124

5.2.3	座標系の正規化	125
5.2.4	1次元フーリエ変換対	126
5.2.5	波源分布のフーリエ級数展開	127
5.2.6	実数係数で展開された開口面分布	127
5.2.7	対称な波源分布	128
5.2.8	波源分布の逆フーリエ変換	129
5.2.9	開口能率	132
5.2.10	1次元波源分布に対する開口能率	133
5.3	レメツのアルゴリズムによる指向性合成	134
5.4	電界指向性のフーリエ級数展開	137
5.4.1	有限範囲で一様な電界指向性	137
5.4.2	電界指向性のフーリエ変換	138
5.4.3	1次元波源の共相励振	138
5.5	レメツのアルゴリズムによるビーム成形	140
5.6	2次計画法による指向性合成	143
5.6.1	2次計画法のための定式化	143
5.6.2	所定のサイドローブレベル以下で利得最大の指向性合成	145
5.7	2次計画法によるビーム成形	147
5.7.1	2次計画法のための定式化	147
5.7.2	所定のサイドローブレベル以下を実現する成形ビームの指向性合成	148
付録 A	付録	151
A.1	ソニンの第1積分	151
A.2	Laplaceの積分	153
A.3	三角関数の公式	155
A.3.1	三角関数の積和公式	155
A.3.2	三角関数の和積公式	156
A.4	離散フーリエ変換	157
A.5	直交曲線座標系	167
A.5.1	はじめに	167
A.5.2	直交曲線座標の定義	167
A.5.3	積分の積素	168
A.5.4	ベクトル演算子	170
A.5.5	具体的な座標系への応用	175

CHAPTER 1

開口面法

アンテナの開口面における電磁界分布から、そのアンテナが放射する電磁界を計算する手法について解説する。まず、電荷保存則と面電流の不連続性といった基本的な電磁気学の原理から出発し、線電荷や線磁荷を用いた電磁界の積分表現を導出する。次に、有限の開口面における電磁界の積分表示式を詳細に示し、ストークスの定理やベクトル演算子を用いて複雑な積分項を求めていく。そして、開口面が曲面や平面の場合の放射電界の近似式、特に観測点が十分遠方にあるフラウンホーファ領域と比較的近いフレネル領域での解析を取り上げ説明する。さらに、導波管モードによる放射特性の解析、特に单一モードや多モードの場合について、電界と磁界の関係、アンテナ利得の計算式を詳しく説明する。最後に、円形開口面分布を持つアンテナの放射特性を、一様分布や放物線テーパ分布の具体例を挙げて解説し、ベッセル関数を用いた指向性関数の導出とサイドローブレベルについて説明する。

1.1 開口面の境界線での不連続を考慮した積分表示

1.1.1 電荷の保存則（連続の式）

電流密度を \mathbf{J} 、電荷密度を ρ とすると、電荷の保存則は、

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -j\omega\rho \quad (1.1)$$

微小な領域において体積積分して、ガウスの発散定理より、

$$\begin{aligned} \iiint \nabla \cdot \mathbf{J} dV &= \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -j\omega \iiint \rho dV \end{aligned} \quad (1.2)$$

面 S 上の面電流密度を \mathbf{J}_s , 面電荷密度を ρ_s とすると,

$$\nabla_s \cdot \mathbf{J}_s = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -j\omega \rho_s \quad (1.3)$$

ただし, ∇_s は面 S 上の 2 次元微分演算子を示す. 微小な面上の領域において面積積分して, 2 次元のガウスの発散定理より,

$$\begin{aligned} \iint \nabla_s \cdot \mathbf{J}_s dS &= \oint \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n}_s d\ell \\ &= - \iint \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS = -j\omega \iint \rho_s dS \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.1.2 面電流分布の不連続

面 S 上において領域 1,2 が接している境界線上周辺に面積積分の積分範囲をとる. いま, 境界線に沿う微小長さを dl , 境界線に垂直な微小幅を h とおくと,

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s^{(2)} - \mathbf{J}_s^{(1)}) \cdot \mathbf{n}_1 dl &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma}{\partial t} h dl = -\frac{\partial \sigma_l}{\partial t} dl \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} j\omega \rho_s h dl = -j\omega \sigma dl \end{aligned} \quad (1.5)$$

ただし, \mathbf{n}_1 は面 S 上の領域 1 から 2 に向く法線ベクトル, σ は境界線上の線電荷密度を示し,

$$\sigma \equiv \lim_{h \rightarrow 0} h \rho_s \quad (1.6)$$

また, $\mathbf{J}_s^{(1)}$, $\mathbf{J}_s^{(2)}$ は, 領域 1,2 の境界線での等価的な面電流密度を各々示し, 面 S 上の磁界を \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 とおくと,

$$\mathbf{J}_s^{(i)} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.7)$$

境界線に沿う単位ベクトルを $\boldsymbol{\tau}$ とおき, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}_1$ とすると, 不連続な面電流分布に対する境界条件の式が得られる^{*1}.

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s^{(2)} - \mathbf{J}_s^{(1)}) \cdot \mathbf{n}_1 &= (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{n}_1 \\ &= (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \\ &= -\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \\ &= \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \\ &= -j\omega \sigma \end{aligned} \quad (1.8)$$

^{*1} Julius Adams Stratton, "Electromagnetic Theory," 8.16. Discontinuous Surface Distributions, p.468, McGraw-Hill, New York (1941), Wiley-IEEE Press (2007), Kindle Edition (2013)

1.1.3 線電荷, 線磁荷の周回積分による電磁界

境界線上の領域 1 の面上の磁界を \mathbf{H} とし ($\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$, $\mathbf{H}_2 = 0$),

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}_1 = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H} = -j\omega\sigma \quad (1.9)$$

$$\therefore \sigma = -\frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}}{j\omega} \quad (1.10)$$

領域 1 の周囲の線電荷密度 σ による電界 \mathbf{E}_C は, 等価波源の面積分を線積分として,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_C &= \frac{1}{4\pi} \oint_C \frac{\sigma}{\epsilon} \nabla \psi ds \\ &= -\frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \oint_C \nabla \psi (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}) ds \end{aligned} \quad (1.11)$$

領域 1 の電界を \mathbf{E} とし ($\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}$, $\mathbf{E}_2 = 0$), 双対性より, 境界線上の線磁荷密度 σ_m は,

$$\sigma_m = \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}}{j\omega} \quad (1.12)$$

この線磁荷による磁界 \mathbf{H}_C もまた, 等価波源の面積分を線積分として, あるいは双対性より,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_C &= \frac{1}{4\pi} \oint_C \frac{\sigma_m}{\mu} \nabla \psi ds \\ &= \frac{1}{4\pi j\omega\mu} \oint_C \nabla \psi (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}) ds \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.1.4 有限の開口面分布による電磁界の積分表示式

開口面分布の面積分の項に加えて, 開口面の内部と外部とで連続の式を満足するように開口面の周囲の線電荷・線磁荷の周回積分の項を加え, 開口面分布によって生じる電界 \mathbf{E}_p , 磁界 \mathbf{H}_p は^{*2},

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= -\frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \oint_C \nabla \psi (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}) ds \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_A \{ -j\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H})\psi + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla \psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\nabla \psi \} dS \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p &= \frac{1}{4\pi j\omega\mu} \oint_C \nabla \psi (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}) ds \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_A \{ j\omega\epsilon(\mathbf{n} \times \mathbf{E})\psi + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla \psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\nabla \psi \} dS \end{aligned} \quad (1.15)$$

^{*2} Samuel Silver, "Microwave Antenna Theory and Design," 5.11. The Aperture-field Method, McGraw Hill (1949), IEE, reprint (1984).

式 (1.11) の積分項について、直角座標系 (x_1, x_2, x_3) を考え、 x_i ($i = 1, 2, 3$) 方向の単位ベクトルを \mathbf{i}_i とすると、

$$\begin{aligned} \oint_C \nabla \psi (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}) ds &= \oint_C \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \mathbf{i}_i \right) (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}) ds \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \oint_C \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} ds \end{aligned} \quad (1.16)$$

ただし、 $\boldsymbol{\tau}$ は周回積分路に沿う方向の単位ベクトルを示す。上式の周回積分は、次のようにストークスの定理より、周回積分路 C に囲まれた面 A の面積分に変換できる。

$$\oint_C \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \iint_A \left\{ \nabla \times \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \mathbf{H} \right) \right\} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.17)$$

被積分関数は、

$$\begin{aligned} \left\{ \nabla \times \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \mathbf{H} \right) \right\} \cdot \mathbf{n} &= \left\{ \left(\nabla \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \times \mathbf{H} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} (\nabla \times \mathbf{H}) \right\} \cdot \mathbf{n} \\ &= \left\{ \left(\nabla \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \times \mathbf{H} \right\} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \\ &= (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \left(\nabla \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} (j\omega\epsilon \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \\ &= -(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \left(\nabla \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) + j\omega\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_i} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \end{aligned} \quad (1.18)$$

電流源 $\mathbf{J}_0 = 0$ 、導電率 $\sigma = 0$ として、

$$\nabla \times \mathbf{H} = (j\omega\epsilon + \sigma) \mathbf{E} + \mathbf{J}_0 = j\omega\epsilon \mathbf{E} \quad (1.19)$$

つまり、周回積分項は、

$$\begin{aligned} &\oint_C \nabla \psi (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}) ds \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \oint_C \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} ds \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \iint_A \left\{ \nabla \times \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \mathbf{H} \right) \right\} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \iint_A \left\{ j\omega\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_i} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \left(\nabla \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right\} dS \\ &= \iint_A \left[j\omega\epsilon (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \left\{ (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \left(\nabla \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right\} \right] dS \\ &= \iint_A \left\{ j\omega\epsilon (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla \psi - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla (\nabla \psi) \right\} dS \end{aligned} \quad (1.20)$$

ここで,

$$\nabla\psi = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \quad (1.21)$$

1.1.5 ベクトルの勾配

ベクトル関数 \mathbf{F} の勾配 $\nabla\mathbf{F}$ は,

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{F} &= \nabla \left(\sum_{j=1}^3 F_j \mathbf{i}_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 \nabla F_j \right) \mathbf{i}_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial F_j}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial F_j}{\partial x_3} \mathbf{i}_3 \right) \mathbf{i}_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \mathbf{i}_i \right) \mathbf{i}_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \end{aligned} \quad (1.22)$$

となり, ダイアディック関数で表される. これより,

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^3 F_j \mathbf{i}_j = \nabla\psi = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \mathbf{i}_j \quad (1.23)$$

とおくと, スカラ関数 ψ の勾配の勾配 $\nabla(\nabla\psi)$ は,

$$\nabla(\nabla\psi) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \quad (1.24)$$

いま,

$$\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (1.25)$$

$$\psi'_j = \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \quad (1.26)$$

とおいて、周回積分の第2項の被積分関数を計算していくと、

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j \left\{ (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \left(\nabla \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \right\} &= \sum_{j=1}^3 (\mathbf{J} \cdot \nabla \psi'_j) \mathbf{i}_j \\
&= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 J_i \frac{\partial \psi'_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{i}_j \\
&= \sum_{i=1}^3 J_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 \psi'_j \mathbf{i}_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 J_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \mathbf{i}_j \right) \\
&= \mathbf{J} \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \right) \\
&= \mathbf{J} \cdot \nabla(\nabla \psi) \\
&= (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla(\nabla \psi)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

よって、 \mathbf{E}_C は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_C &= -\frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \oint_C \nabla \psi (\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}) ds \\
&= \frac{1}{4\pi} \iint_A \left\{ -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla \psi + \frac{1}{j\omega\epsilon} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla(\nabla \psi) \right\} dS
\end{aligned} \tag{1.28}$$

一方、面積分で求められる電界 \mathbf{E}_S は、

$$\mathbf{E}_S = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left\{ -j\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H})\psi + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla \psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla \psi \right\} dS \tag{1.29}$$

領域 1 の面 A の開口面分布によって生じる電界 \mathbf{E}_p は、両者の和より、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_p &= \mathbf{E}_S + \mathbf{E}_C \\
&= \frac{1}{4\pi} \iint_A \left\{ -j\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H})\psi \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{j\omega\epsilon} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla(\nabla \psi) + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla \psi \right\} dS
\end{aligned} \tag{1.30}$$

同様にして、磁界 \mathbf{H}_p は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_p &= \mathbf{E}_S + \mathbf{E}_C \\
&= \frac{1}{4\pi} \iint_A \left\{ j\omega\epsilon(\mathbf{n} \times \mathbf{E})\psi \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{j\omega\mu} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \nabla(\nabla \psi) + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla \psi \right\} dS
\end{aligned} \tag{1.31}$$

このような積分表示式を **開口面法** (aperture-field method) という。

1.2 開口面法（開口面が曲面の場合）

開口面の電磁界を \mathbf{E}_a , \mathbf{H}_a , 観測点 P での電磁界を \mathbf{E}_p , \mathbf{H}_p とすると, $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ より, **開口面法** (aperture-field method) の基本式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p = \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \iint_A \left\{ k^2(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)\psi \right. \\ \left. + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) \cdot \nabla(\nabla\psi) + j\omega\epsilon(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) \times \nabla\psi \right\} dS \end{aligned} \quad (1.32)$$

同様にして, 磁界 \mathbf{H}_p は (導出省略),

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p = -\frac{1}{4\pi j\omega\mu} \iint_A \left\{ k^2(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a)\psi \right. \\ \left. + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) \cdot \nabla(\nabla\psi) - j\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) \times \nabla\psi \right\} dS \end{aligned} \quad (1.33)$$

開口面のある点から観測点 P までの距離および単位ベクトルを r , \mathbf{a}_r とすると, 開口面の座標に関わる微分演算子 ∇ の勾配は,

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= \nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \\ &= (-\mathbf{a}_r) \left(-jk - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \\ &= jk \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \psi \mathbf{a}_r \end{aligned} \quad (1.34)$$

さらに,

$$\nabla(\nabla\psi) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \quad (1.35)$$

放射波 ($1/r$ に比例する項) を求めることにすると, $kr \gg 1$ とみなして次のように近似できる。

$$\nabla\psi \simeq jk\psi \mathbf{a}_r \quad (1.36)$$

$$\nabla(\nabla\psi) \simeq (jk)^2 \psi \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r \quad (1.37)$$

これより, 放射電界 \mathbf{E}_p は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p \simeq \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \iint_A \left\{ k^2(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) \right. \\ \left. + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) \cdot (-k^2) \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r + j\omega\epsilon(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) \times jk \mathbf{a}_r \right\} \psi dS \end{aligned} \quad (1.38)$$

ベクトル公式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (1.39)$$

を用いれば、

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_r \times (\mathbf{a}_r \times \mathbf{J}) &= (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{J})\mathbf{a}_r - (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r)\mathbf{J} = (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{J})\mathbf{a}_r - \mathbf{J} \\ \mathbf{J} &= (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{J})\mathbf{a}_r - \mathbf{a}_r \times (\mathbf{a}_r \times \mathbf{J})\end{aligned}\quad (1.40)$$

および $\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_a$ より、

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a &= \{\mathbf{a}_r \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)\}\mathbf{a}_r - \mathbf{a}_r \times \{\mathbf{a}_r \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)\} \\ \therefore \mathbf{n} \times \mathbf{H}_a - \{(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) \cdot \mathbf{a}_r\}\mathbf{a}_r &= -\mathbf{a}_r \times \{\mathbf{a}_r \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)\}\end{aligned}\quad (1.41)$$

したがって、

$$\mathbf{E}_p = \frac{jk}{4\pi} \iint_A \left[\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{a}_r \times \{\mathbf{a}_r \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)\} - \mathbf{a}_r \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) \right] \psi dS \quad (1.42)$$

座標原点から観測点までの距離を R とし、 $kR \gg 1$ のとき、次のように近似できる ($R \simeq r$)。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_p &= \frac{-jk}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_A \left(\mathbf{a}_r \times \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \{\mathbf{a}_r \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)\} \right] \right) \\ &\quad \cdot \frac{R}{r} e^{-jk(r-R)} dS\end{aligned}\quad (1.43)$$

同様にして、磁界 \mathbf{H} は、

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_p &= \frac{-jk}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_A \left(\mathbf{a}_r \times \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \{\mathbf{a}_r \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a)\} \right] \right) \\ &\quad \cdot \frac{R}{r} e^{-jk(r-R)} dS\end{aligned}\quad (1.44)$$

さらに、 $\mathbf{a}_R \simeq \mathbf{a}_r$ のとき、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_p &= \frac{jk}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \mathbf{a}_R \times \iint_A \left[\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \{\mathbf{a}_R \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)\} + (\mathbf{E}_a \times \mathbf{n}) \right] \\ &\quad \cdot e^{-jk(r-R)} dS\end{aligned}\quad (1.45)$$

開口面の電界 \mathbf{E}_a 、磁界 \mathbf{H}_a から、等価的な 2 次波源

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{H}_a \quad (1.46)$$

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{E}_a \times \mathbf{n} \quad (1.47)$$

を定義すれば、開口面法の式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_p &= \frac{jk}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \mathbf{a}_R \times \iint_A \left(\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{a}_R \times \mathbf{J} + \mathbf{M} \right) e^{-jk(r-R)} dS \\ &= jkG_0 \mathbf{a}_R \times \iint_A \left(\mathbf{a}_R \times Z_0 \mathbf{J} + \mathbf{M} \right) e^{-jk(r-R)} dS\end{aligned}\quad (1.48)$$

任意電磁流分布による放射電磁界の積分表示式と同様の結果となる。ここで、

$$G_0 = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (1.49)$$

1.3 開口面法（開口面が平面の場合）

電界 \mathbf{E}_a と磁界 \mathbf{H}_a の関係が、

$$\mathbf{H}_a = \alpha(\mathbf{s} \times \mathbf{E}_a) \quad (1.50)$$

とおける場合（後述するホーン）、電界 \mathbf{E}_p の式に見られる \mathbf{H}_a の項は、

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\mathbf{n} \times \alpha(\mathbf{s} \times \mathbf{E}_a) \\ &= \alpha\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left\{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a)\mathbf{s} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})\mathbf{E}_a\right\} \end{aligned} \quad (1.51)$$

これより、電界 \mathbf{E}_p は 2 次波源の磁界 \mathbf{H}_a を消去して次のようになる。

$$\mathbf{E}_p = \frac{-jk}{4\pi R}e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \iint_{S_i} \left[\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a - \mathbf{a}_R \times \alpha\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left\{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a)\mathbf{s} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})\mathbf{E}_a\right\} \right] e^{j\psi} d\Omega \quad (1.52)$$

あるいは、一様媒質の空間中で 2 次波源 \mathbf{E}_a 、 \mathbf{H}_a が、局所的な平面波とみなせるとき、

$$\mathbf{H}_a = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(\mathbf{s} \times \mathbf{E}_a) \quad (1.53)$$

この場合には、次のように \mathbf{E}_a を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) &= \mathbf{n} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{E}_a) \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a)\mathbf{s} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})\mathbf{E}_a \end{aligned} \quad (1.54)$$

これより、電界 \mathbf{E}_p は 2 次波源の磁界 \mathbf{H}_a を消去して次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= \frac{-jk}{4\pi R}e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \iint_{S_i} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a - \mathbf{a}_R \times \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a)\mathbf{s} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})\mathbf{E}_a\}] e^{j\psi_1} dS \\ &= \frac{-jk}{4\pi R}e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \iint_{S_i} [\{\mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})\mathbf{a}_R\} \times \mathbf{E}_a - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a)\mathbf{a}_R \times \mathbf{s}] e^{j\psi_1} dS \end{aligned}$$

ただし、 k は自由空間波数、 R は原点から観測点までの距離、 \mathbf{a}_R は観測方向の単位ベクトル、 \mathbf{E} は開口面 S_i 上の電界、 \mathbf{n} は開口面上の法線ベクトル、 \mathbf{s} は電磁界に直交する単位ベクトル、 $\psi_1 = -r + R$ (r は開口面から観測点までの距離) である。

積分領域である曲面を波面上にとれば、 $\mathbf{s} = \mathbf{n}$ 、 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a = 0$ が成り立ち、このとき、放射電界 \mathbf{E}_p は次のようになる。

$$\mathbf{E}_p = \frac{-jk}{4\pi R}e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \iint_A \{(\mathbf{n} + \mathbf{a}_R) \times \mathbf{E}_a\} e^{j\psi_1} dS \quad (1.55)$$

ただし、 A は開口面 (aperture) を示し、 \mathbf{E}_a を通常、**開口面分布** (aperture-field distribution) という。

さらに, 波面が平面の場合 (\mathbf{n} は積分変数に依らない), 放射電界 \mathbf{E}_p は次のようになる.

$$\mathbf{E}_p = \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \{(\mathbf{n} + \mathbf{a}_R) \times \mathbf{N}\} \quad (1.56)$$

ただし,

$$\mathbf{N} = \iint_A \mathbf{E}_a e^{j\psi_1} dS \quad (1.57)$$

直角座標系 (x, y, z) において, $\mathbf{n} = \mathbf{a}_z$ のとき, 放射電界 \mathbf{E}_p は次のようになる.

$$\mathbf{E}_p = \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \{(\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_R) \times \mathbf{N}\} \quad (1.58)$$

ただし,

$$\mathbf{N} = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_x + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_y = \iint_A \mathbf{E}_a e^{j\psi_1} dS \quad (1.59)$$

ただし, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_z = 0$. ここで, \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , \mathbf{a}_z は, x , y , z に沿う単位ベクトルを各々示す. 図に示す球座標系 (R, Θ, Φ) において, Θ , Φ に沿う単位ベクトル \mathbf{a}_Θ , \mathbf{a}_Φ は,

$$\mathbf{a}_\Theta = \cos \Theta (\cos \Phi \mathbf{a}_x + \sin \Phi \mathbf{a}_y) - \sin \Theta \mathbf{a}_z \quad (1.60)$$

$$\mathbf{a}_\Phi = -\sin \Phi \mathbf{a}_x + \cos \Phi \mathbf{a}_y \quad (1.61)$$

新たに

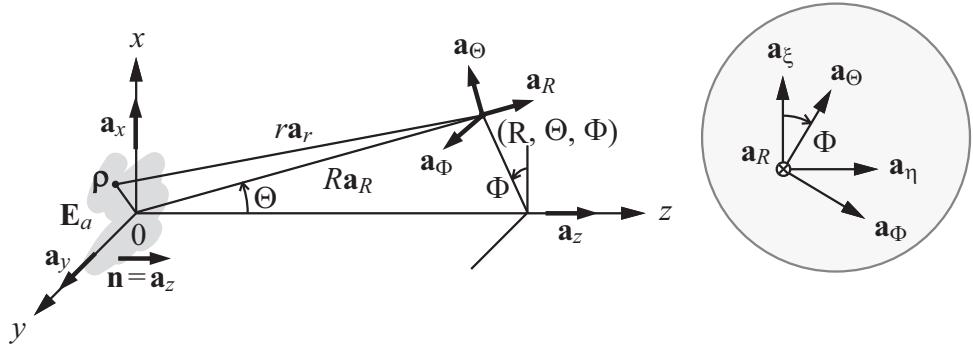


図 1.1. 開口面法に関わる座標系の定義

$$\mathbf{a}_\xi \equiv \cos \Phi \mathbf{a}_\Theta - \sin \Phi \mathbf{a}_\Phi \quad (1.62)$$

$$\mathbf{a}_\eta \equiv \sin \Phi \mathbf{a}_\Theta + \cos \Phi \mathbf{a}_\Phi \quad (1.63)$$

を定義する. これより, 次のように変形する (問題参照).

$$\mathbf{a}_R \times \{(\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_R) \times \mathbf{N}\} = -(1 + \cos \Theta) \{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_\xi + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_\eta\} \quad (1.64)$$

開口面分布 $\mathbf{E}_a (\equiv E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y)$ による放射電界 \mathbf{E}_p は次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_p &= \frac{jk}{4\pi R} e^{-jkR} (1 + \cos \Theta) \{ (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_\xi + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_\eta \} \\ &= j \frac{1 + \cos \Theta}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} (N_x \mathbf{a}_\xi + N_y \mathbf{a}_\eta) \\ &\equiv E_\xi \mathbf{a}_\xi + E_\eta \mathbf{a}_\eta\end{aligned}\quad (1.65)$$

ここで、

$$N_x = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_x = \iint_A (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{a}_x) e^{j\psi_1} dS = \iint_A E_x e^{j\psi_1} dS \quad (1.66)$$

$$N_y = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_y = \iint_A (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{a}_y) e^{j\psi_1} dS = \iint_A E_y e^{j\psi_1} dS \quad (1.67)$$

ただし、 $\psi_1 \equiv -k(r - R)$ 。これより、電界ベクトル \mathbf{E}_p の直交成分 E_ξ , E_η は、

$$E_{(\xi)}(R, \Theta, \Phi) = j \frac{1 + \cos \Theta}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_A E_{(x)}(x, y) e^{-jk(r-R)} dS \quad (1.68)$$

したがって、開口面電界分布 \mathbf{E}_a が x 成分のみ ($\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{a}_y = 0$) の場合、放射電界 \mathbf{E}_p は \mathbf{a}_ξ 方向成分のみ ($\mathbf{E}_p \cdot \mathbf{a}_\eta = 0$) で表され、逆に開口面電界分布 \mathbf{E}_a が y 成分のみ ($\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{a}_x = 0$) の場合、放射電界 \mathbf{E}_p は \mathbf{a}_η 方向成分のみ ($\mathbf{E}_p \cdot \mathbf{a}_\xi = 0$) で表される。このようにして各々の成分は独立な式で扱うことができ、直線偏波の場合、ベクトルの成分（スカラ）だけで解析すればよい。開口面（平面）における励振偏波成分と放射電界における主偏波および交差偏波成分との対応関係をまとめると次のようになる。

表 1.1 開口面法に基づく偏波の対応関係

	\mathbf{a}_x (垂直)	\mathbf{a}_y (水平)
主偏波	\mathbf{a}_ξ 成分	\mathbf{a}_η 成分
交差偏波	\mathbf{a}_η 成分	\mathbf{a}_ξ 成分

問題

式 (1.64) を導出せよ。

■ **略解** 球座標系 (R, Θ, Φ) の単位ベクトル \mathbf{a}_R , \mathbf{a}_Θ , \mathbf{a}_Φ は、

$$\mathbf{a}_R = \sin \Theta (\cos \Phi \mathbf{a}_x + \sin \Phi \mathbf{a}_y) + \cos \Theta \mathbf{a}_z \quad (1.69)$$

$$\mathbf{a}_\Theta = \cos \Theta (\cos \Phi \mathbf{a}_x + \sin \Phi \mathbf{a}_y) - \sin \Theta \mathbf{a}_z \quad (1.70)$$

$$\mathbf{a}_\Phi = -\sin \Phi \mathbf{a}_x + \cos \Phi \mathbf{a}_y \quad (1.71)$$

ここで,

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{a}_\Theta \times \mathbf{a}_\Phi \quad (1.72)$$

$$\mathbf{a}_\Theta = \mathbf{a}_\Phi \times \mathbf{a}_R \quad (1.73)$$

$$\mathbf{a}_\Phi = \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_\Theta \quad (1.74)$$

逆の関係は,

$$\mathbf{a}_x = \cos \Phi \left(\sin \Theta \mathbf{a}_R + \cos \Theta \mathbf{a}_\Theta \right) - \sin \Phi \mathbf{a}_\Phi \quad (1.75)$$

$$\mathbf{a}_y = \sin \Phi \left(\sin \Theta \mathbf{a}_R + \cos \Theta \mathbf{a}_\Theta \right) + \cos \Phi \mathbf{a}_\Phi \quad (1.76)$$

$$\mathbf{a}_z = \cos \Theta \mathbf{a}_R - \sin \Theta \mathbf{a}_\Theta \quad (1.77)$$

これより,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_x &= \mathbf{a}_R \times \left\{ \cos \Phi \left(\sin \Theta \mathbf{a}_R + \cos \Theta \mathbf{a}_\Theta \right) - \sin \Phi \mathbf{a}_\Phi \right\} \\ &= \cos \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Phi + \sin \Phi \mathbf{a}_\Theta \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_R \times \left\{ \sin \Phi \left(\sin \Theta \mathbf{a}_R + \cos \Theta \mathbf{a}_\Theta \right) + \cos \Phi \mathbf{a}_\Phi \right\} \\ &= \sin \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Phi - \cos \Phi \mathbf{a}_\Theta \end{aligned} \quad (1.79)$$

式 (1.64) の左辺は,

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_R \times \left\{ (\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_R) \times \mathbf{N} \right\} \\ &= \mathbf{a}_R \times \left\{ (\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_R) \times (N_x \mathbf{a}_x + N_y \mathbf{a}_y) \right\} \\ &= \mathbf{a}_R \times \left\{ N_x (\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_x) + N_y (-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_y) \right\} \\ &= N_x \left\{ \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_R \times (\cos \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Phi + \sin \Phi \mathbf{a}_\Theta) \right\} \\ &\quad + N_y \left\{ -\mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_R \times (\sin \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Phi - \cos \Phi \mathbf{a}_\Theta) \right\} \\ &= N_x \left\{ (\sin \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Phi - \cos \Phi \mathbf{a}_\Theta) + (-\cos \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Theta + \sin \Phi \mathbf{a}_\Phi) \right\} \\ &\quad + N_y \left\{ -(\cos \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Phi + \sin \Phi \mathbf{a}_\Theta) + (-\sin \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Theta - \cos \Phi \mathbf{a}_\Phi) \right\} \\ &= N_x \left\{ -\cos \Phi (1 + \cos \Theta) \mathbf{a}_\Theta + \sin \Phi (\cos \Theta + 1) \mathbf{a}_\Phi \right\} \\ &\quad + N_y \left\{ -\sin \Phi (1 + \cos \Theta) \mathbf{a}_\Theta - \cos \Phi (\cos \Theta + 1) \mathbf{a}_\Phi \right\} \\ &= -(1 + \cos \Theta) \left\{ N_x (\cos \Phi \mathbf{a}_\Theta - \sin \Phi \mathbf{a}_\Phi) + N_y (\sin \Phi \mathbf{a}_\Theta + \cos \Phi \mathbf{a}_\Phi) \right\} \end{aligned}$$

単位ベクトル

$$\mathbf{a}_\xi = \cos \Phi \mathbf{a}_\Theta - \sin \Phi \mathbf{a}_\Phi \quad (1.80)$$

$$\mathbf{a}_\eta = \sin \Phi \mathbf{a}_\Theta + \cos \Phi \mathbf{a}_\Phi \quad (1.81)$$

を用いると,

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{a}_\xi \times \mathbf{a}_\eta \quad (1.82)$$

$$\mathbf{a}_\xi = \mathbf{a}_\eta \times \mathbf{a}_R \quad (1.83)$$

$$\mathbf{a}_\eta = \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_\xi \quad (1.84)$$

したがって, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_R \times \{(\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_R) \times \mathbf{N}\} &= -(1 + \cos \Theta) (N_x \mathbf{a}_\xi + N_y \mathbf{a}_\eta) \\ &= -(1 + \cos \Theta) \{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_\xi + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_\eta\} \end{aligned} \quad (1.85)$$

1.4 フラウンホーファ領域放射電界

電界ベクトル \mathbf{E}_p の直交するスカラ成分 E_ξ, E_η は,

$$E_{(\xi)}(R, \Theta, \Phi) = j \frac{1 + \cos \Theta}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_A E_{(x)}(x, y) e^{-jk(r-R)} dS \quad (1.86)$$

観測点が十分遠方の場合, 次のように近似する.

$$r - R \simeq -\rho (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{a}_\rho) \quad (1.87)$$

ここで,

$$\mathbf{a}_R = \sin \Theta (\cos \Phi \mathbf{a}_x + \sin \Phi \mathbf{a}_y) + \cos \Theta \mathbf{a}_z \quad (1.88)$$

$$\mathbf{a}_\rho = \cos \varphi \mathbf{a}_x + \sin \varphi \mathbf{a}_y \quad (1.89)$$

ただし, \mathbf{a}_R は観測点を表す極座標系 (R, Θ, Φ) の R 方向に沿う単位ベクトル, \mathbf{a}_ρ は開口面を表す円筒座標系 (ρ, φ, z) の ρ 方向に沿う単位ベクトル, $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ は直角座標系 (x, y, z) の直交単位ベクトルを示す. 波数ベクトル \mathbf{k} より, 横断面内波数ベクトル \mathbf{k}_t を

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= k \mathbf{a}_R \\ &= k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y + k_z \mathbf{a}_z \\ &= \mathbf{k}_t + k_z \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (1.90)$$

で定義すると,

$$\begin{aligned} k \rho (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{a}_\rho) &= (k \mathbf{a}_R) \cdot (\rho \mathbf{a}_\rho) \\ &= \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} = \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho} \\ &= k_x x + k_y y \end{aligned} \quad (1.91)$$

放射電界 E_p と開口面分布 E_a との関係は、逆フーリエ変換によって次のように表される。

$$E_p = j \frac{1 + \cos \Theta}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} g(k_x, k_y) \quad (1.92)$$

$$g(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} dx dy \quad (1.93)$$

$$u(x, y) = \begin{cases} E_a(x, y) & (\text{inside A}) \\ 0 & (\text{outside A}) \end{cases} \quad (1.94)$$

ただし、 \mathbf{k}_t は横断面内波数ベクトルを示し、次のように定義される。

$$\mathbf{k}_t = k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y \quad (1.95)$$

ここで、

$$k_x = k \sin \Theta \cos \Phi \quad (1.96)$$

$$k_y = k \sin \Theta \sin \Phi \quad (1.97)$$

さらに、フーリエ変換より、

$$u(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g(k_x, k_y) e^{-jk_t \cdot \mathbf{r}} dk_x dk_y \quad (1.98)$$

が成り立ち、放射特性を表す $g(k_x, k_y)$ がわかれれば、逆に開口面分布を表す $u(x, y)$ が得られることになる。このような連続フーリエ変換対は、離散フーリエ変換対として扱われることが多い。

さて、式 (1.100) の近似について、具体的に考えてみる。式 (1.100) の第 2 項の $\frac{\rho^2}{2R}$ が十分小さい場合であり、開口径を D とすると、 ρ の最大値は $D/2$ であり、このとき、式 (1.100) の第 2 項の最大値は $\frac{(D/2)^2}{2R}$ となる。この最大値が $\lambda/16$ 以下となれば (λ は波長)，第 1 項が支配的であるとみなしてよい。つまり、 $\frac{(D/2)^2}{2R} < \frac{\lambda}{16}$ のとき、近似が妥当であり、 R の条件式は、

$$R \frac{2D^2}{\lambda} \quad (1.99)$$

となる。この範囲の放射領域を、**フラウンホーファ領域** (Fraunhofer region) という。

1.5 フレネル領域放射電界

電界ベクトル E_p の直交するスカラ成分 E_ξ 、 E_η は、

$$E_{(\xi)}(R, \Theta, \Phi) = j \frac{1 + \cos \Theta}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_A E_{(x)}(x, y) e^{-jk(r-R)} dS \quad (1.100)$$

第2項までで近似して,

$$r - R \simeq -\rho (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{a}_\rho) + \frac{\rho^2}{2R} \quad (1.101)$$

このとき, $e^{-jk(r-R)}$ は次のように近似できる.

$$e^{-jk(r-R)} \simeq e^{jk_t \cdot \rho} e^{-jk \frac{\rho^2}{2R}} \quad (1.102)$$

とすると, 放射電界 E_p は次のようにになり, このような領域を **フレネル領域** (Fresnel region) という.

$$E_p = j \frac{1 + \cos \Theta}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} g_r(k_x, k_y, R) \quad (1.103)$$

$$g_r(k_x, k_y, R) = \iint_{-\infty}^{\infty} u_r(x, y, R) e^{jk_t \cdot \rho} dx dy \quad (1.104)$$

$$u_r(x, y, R) = \begin{cases} E_a(x, y) e^{-jk \frac{\rho^2}{2R}} & (\text{inside A}) \\ 0 & (\text{outside A}) \end{cases} \quad (1.105)$$

このときも開口面分布はフーリエ変換によって求めることができ,

$$u_r(x, y, R) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g_r(k_x, k_y, R) e^{-jk_t \cdot \rho} dk_x dk_y \quad (1.106)$$

この場合もフーリエ変換対によって表され, 高速フーリエ変換を用いて計算できる. フレネル領域の距離 R の下限については, はつきりとした定義がないが, 一つの目安として, 無視した位相の第3項が $\lambda/16$ 以下とすると, $\frac{(D/2)^4}{8R^3} < \frac{\lambda}{16}$ より,

$$\frac{2D^2}{\lambda} > R > \frac{D}{2} \left(\frac{D}{\lambda} \right)^{1/3} \quad (1.107)$$

を満たす範囲となる. 一方, $1/R$ の項で近似できる領域は放射近傍領域と呼ばれ, $1/R$ の項だけでは表せない波源の近傍は, 誘導性近傍領域と呼ばれる.

1.6 導波管モードによる放射特性

1.6.1 単一モード

单一のモードが導波管開口へ入射した場合を考え, その横断面内電界分布を $\mathbf{E}_t^{\text{INC}}$, 反射係数を Γ とおくと, 開口面上の横断面内電界分布 \mathbf{E}_t は,

$$\mathbf{E}_t = (1 + \Gamma) \mathbf{E}_t^{\text{INC}} \quad (1.108)$$

また, 入射波の横断面内磁界分布 $\mathbf{H}_t^{\text{INC}}$, および反射波 $\mathbf{H}_t^{\text{REF}}$ は (管軸方向が z 軸),

$$\mathbf{H}_t^{\text{INC}} = Y_0(\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t^{\text{INC}}) \quad (1.109)$$

$$\mathbf{H}_t^{\text{REF}} = -Y_0(\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t^{\text{REF}}) \quad (1.110)$$

ここでは, 無損失の導波管における伝搬モードを考え, 特性アドミタンス Y_0 は次のように実数となる.

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \begin{cases} Y_0^{\text{TE}} = \frac{1}{Z_0^{\text{TE}}} = \frac{\beta^{\text{TE}}}{\omega\mu} & (\text{TE mode}) \\ Y_0^{\text{TM}} = \frac{1}{Z_0^{\text{TM}}} = \frac{\omega\epsilon}{\beta^{\text{TM}}} & (\text{TM mode}) \end{cases} \quad (1.111)$$

よって, 開口面上の横断面内磁界分布 \mathbf{H}_t は,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \mathbf{H}_t^{\text{INC}} + \mathbf{H}_t^{\text{REF}} \\ &= Y_0 \left\{ \mathbf{a}_z \times (\mathbf{E}_t^{\text{INC}} - \mathbf{E}_t^{\text{REF}}) \right\} \\ &= Y_0(1 - \Gamma) \left(\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t^{\text{INC}} \right) \\ &= Y_0(1 - \Gamma) \left(\mathbf{a}_z \times \frac{\mathbf{E}_t}{1 + \Gamma} \right) \\ &= Y_0 \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} \left(\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t \right) \\ &\equiv \alpha \left(\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t \right) \end{aligned} \quad (1.112)$$

ここで,

$$\alpha \equiv Y_0 \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} \quad (1.113)$$

逆の関係より, 開口面上の横断面内電界分布 \mathbf{E}_t は,

$$\mathbf{E}_t = \frac{1}{\alpha} (\mathbf{H}_t \times \mathbf{a}_z) \quad (1.114)$$

このとき, 開口面は xy 面ゆえ, その法線ベクトルは $\mathbf{n} = \mathbf{a}_z$ とおける. これより, 電界 \mathbf{E}_p の被積分関数の \mathbf{H}_a の項は,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left\{ \mathbf{a}_z \times (\mathbf{H}_t + H_z \mathbf{a}_z) \right\} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\mathbf{a}_z \times \mathbf{H}_t) \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{a}_z \times \alpha (\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t) \\ &= \alpha \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left\{ (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{E}_t) \mathbf{a}_z - (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z) \mathbf{E}_t \right\} \\ &= -\alpha \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{E}_t \end{aligned} \quad (1.115)$$

また,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a = \mathbf{a}_z \times (\mathbf{E}_t + E_z \mathbf{a}_z) = \mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t \quad (1.116)$$

これより、電界 \mathbf{E}_p は 2 次波源の磁界 \mathbf{H}_a を消去して次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_p &= \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \iint_A \left[\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{a}_R \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) \right] e^{-jk(r-R)} dS \\
 &= \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \iint_{S_i} \left[\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t + \mathbf{a}_R \times \alpha \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{E}_t \right] e^{-jk(r-R)} dS \\
 &= \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \left[\left(\mathbf{a}_z + \alpha \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{a}_R \right) \times \iint_{S_i} \mathbf{E}_t e^{-jk(r-R)} dS \right]
 \end{aligned} \tag{1.117}$$

同様にして、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_p &= \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \iint_A \left[\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{a}_R \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) \right] e^{-jk(r-R)} dS \\
 &= \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \iint_A \left[-\alpha \mathbf{E}_t + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{a}_R \times (\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t) \right] e^{-jk(r-R)} dS \\
 &= \frac{jk}{4\pi R} e^{-jkR} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{a}_R \times \iint_A \left[\alpha \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{E}_t - \mathbf{a}_R \times (\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t) \right] e^{-jk(r-R)} dS
 \end{aligned} \tag{1.118}$$

ここで、

$$\mathbf{N} \equiv \iint_{S_i} \mathbf{E}_t e^{j\psi_1} dS \equiv N_x \mathbf{a}_x + N_y \mathbf{a}_y \tag{1.119}$$

$$l_0 \equiv \alpha \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{1.120}$$

$$\psi_1 = -k(r - R) \tag{1.121}$$

とおくと、

$$\mathbf{E}_p = \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times [(l_0 \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_z) \times \mathbf{N}] \tag{1.122}$$

$$\mathbf{H}_p = \frac{jk}{4\pi R} e^{-jkR} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{a}_R \times (l_0 \mathbf{N} - \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_z \times \mathbf{N}) \tag{1.123}$$

両者の関係は、

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\mathbf{a}_R \times \mathbf{E}_p) &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{a}_R \times \left\{ \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times [(l_0 \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_z) \times \mathbf{N}] \right\} \\
 &= \frac{jk}{4\pi R} e^{-jkR} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{a}_R \times (l_0 \mathbf{N} - \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_z \times \mathbf{N}) \\
 &= \mathbf{H}_p
 \end{aligned} \tag{1.124}$$

ここで、ベクトル公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ より、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_R \times (l_0 \mathbf{a}_R \times \mathbf{N}) &= \mathbf{a}_R \cdot (l_0 \mathbf{a}_R \times \mathbf{N}) \mathbf{a}_R - (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{a}_R) (l_0 \mathbf{a}_R \times \mathbf{N}) \\
 &= -l_0 \mathbf{a}_R \times \mathbf{N}
 \end{aligned} \tag{1.125}$$

そして, \mathbf{E}_p の被積分関数は,

$$\mathbf{a}_R \times [(\mathbf{a}_z + l_0 \mathbf{a}_R) \times \mathbf{N}] = (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{N}) (\mathbf{a}_z + l_0 \mathbf{a}_R) - \left\{ \mathbf{a}_R \cdot (\mathbf{a}_z + l_0 \mathbf{a}_R) \right\} \mathbf{N} \quad (1.126)$$

直角座標系 (x, y, z) の単位ベクトル \mathbf{a}_z を球座標系 (R, θ, ϕ) の単位ベクトルで次のように表し,

$$\mathbf{a}_z = \cos \theta \mathbf{a}_R - \sin \theta \mathbf{a}_\theta \quad (1.127)$$

これより,

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_R \times [(\mathbf{a}_z + l_0 \mathbf{a}_R) \times \mathbf{N}] \\ &= (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{N}) (\cos \theta \mathbf{a}_R - \sin \theta \mathbf{a}_\theta + l_0 \mathbf{a}_R) - \left\{ \mathbf{a}_R \cdot (\cos \theta \mathbf{a}_R - \sin \theta \mathbf{a}_\theta + l_0 \mathbf{a}_R) \right\} \mathbf{N} \\ &= (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{N}) \left\{ (l_0 + \cos \theta) \mathbf{a}_R - \sin \theta \mathbf{a}_\theta \right\} - (l_0 + \cos \theta) \mathbf{N} \\ &= (l_0 + \cos \theta) \left\{ (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{N}) \mathbf{a}_R - \mathbf{N} \right\} - \sin \theta (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{N}) \mathbf{a}_\theta \\ &= -(l_0 + \cos \theta) \left\{ (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_\theta) \mathbf{a}_\theta + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_\phi) \mathbf{a}_\phi \right\} - \sin \theta (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_R) \mathbf{a}_\theta \\ &= - \left\{ (l_0 + \cos \theta) (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_\theta) + \sin \theta (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_R) \right\} \mathbf{a}_\theta - (l_0 + \cos \theta) (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_\phi) \mathbf{a}_\phi \end{aligned} \quad (1.128)$$

ここで,

$$\mathbf{a}_R = \sin \theta (\cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y) + \cos \theta \mathbf{a}_z \quad (1.129)$$

$$\mathbf{a}_\theta = \cos \theta (\cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y) - \sin \theta \mathbf{a}_z \quad (1.130)$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y \quad (1.131)$$

より,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_R = \sin \theta (\cos \phi N_x + \sin \phi N_y) \quad (1.132)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos \theta (\cos \phi N_x + \sin \phi N_y) \quad (1.133)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_\phi = -\sin \phi N_x + \cos \phi N_y \quad (1.134)$$

これより,

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_R \times [(\mathbf{a}_z + l_0 \mathbf{a}_R) \times \mathbf{N}] \\ &= - \left\{ (l_0 + \cos \theta) \cos \theta (\cos \phi N_x + \sin \phi N_y) + \sin \theta \sin \theta (\cos \phi N_x + \sin \phi N_y) \right\} \mathbf{a}_\theta \\ & \quad - (l_0 + \cos \theta) (-\sin \phi N_x + \cos \phi N_y) \mathbf{a}_\phi \\ &= -(1 + l_0 \cos \theta) (N_x \cos \phi + N_y \sin \phi) \mathbf{a}_\theta \\ & \quad - (l_0 + \cos \theta) (-N_x \sin \phi + N_y \cos \phi) \mathbf{a}_\phi \end{aligned} \quad (1.135)$$

よって,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_p = \frac{jk}{4\pi R} e^{-jkR} & \left[(1 + l_0 \cos \theta)(N_x \cos \phi + N_y \sin \phi) \mathbf{a}_\theta \right. \\ & \left. + (l_0 + \cos \theta)(-N_x \sin \phi + N_y \cos \phi) \mathbf{a}_\phi \right]\end{aligned}\quad (1.136)$$

いま、開口面への入射波を、モード関数 \mathbf{e} , \mathbf{h} を用いて、

$$\mathbf{E}_t^{\text{INC}} = \sqrt{Z_0} \mathbf{e} \quad (1.137)$$

$$\mathbf{H}_t^{\text{INC}} = \sqrt{Y_0} \mathbf{h} \quad (1.138)$$

ここで、

$$\iint_A |\mathbf{e}|^2 dS = \iint_A |\mathbf{h}|^2 dS = 1 \quad (1.139)$$

これより、

$$\begin{aligned}\iint_A (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) \cdot \mathbf{a}_z dS &= \iint_A (\mathbf{H}_t^* \times \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{E}_t dS \\ &= \alpha \int_A |\mathbf{E}_t|^2 dS \\ &= \alpha(1 + \Gamma)^2 \int_A |\mathbf{E}_t^{\text{INC}}|^2 dS \\ &= \alpha(1 + \Gamma)^2 Z_0 \iint_A |\mathbf{e}|^2 dS \\ &= (1 + \Gamma)^2 Z_0 \cdot Y_0 \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} \\ &= 1 - \Gamma^2\end{aligned}\quad (1.140)$$

また、

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \iint_A \mathbf{E}_t e^{-jk(r_a - r)} dS \\ &= (1 + \Gamma) \iint_A \mathbf{E}_t^{\text{INC}} e^{-jk(r_a - r)} dS \\ &= (1 + \Gamma) \sqrt{Z_0} \iint_A \mathbf{e} e^{-jk(r_a - r)} dS \\ &\equiv (1 + \Gamma) \sqrt{Z_0} \bar{\mathbf{N}}\end{aligned}\quad (1.141)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{N}} &\equiv \bar{N}_x \mathbf{a}_x + \bar{N}_y \mathbf{a}_y \\ &= \iint_A \mathbf{e} e^{-jk(r_a - r)} dS\end{aligned}\quad (1.142)$$

このとき、アンテナ利得 $G(\theta, \phi)$ は、

$$G(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \frac{|\mathbf{F}(\theta, \phi)|^2}{Z_w(1 - \Gamma^2)} \quad (1.143)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\theta, \phi) = \frac{1 + \Gamma}{2} \sqrt{Z_0} & \left\{ \left(1 + l_0 \cos \theta \right) \left(\tilde{N}_x \cos \phi + \tilde{N}_y \sin \phi \right) \mathbf{a}_\theta \right. \\ & \left. + \left(l_0 + \cos \theta \right) \left(-\tilde{N}_x \sin \phi + \tilde{N}_y \cos \phi \right) \mathbf{a}_\phi \right\} \end{aligned} \quad (1.144)$$

ここで、

$$l_0 = \alpha Z_w = \frac{Z_w}{Z_0} \cdot \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} \quad (1.145)$$

より、

$$\begin{aligned} \left(1 + \Gamma \right) \left(1 + l_0 \cos \theta \right) &= \left(1 + \Gamma \right) \left(1 + \frac{Z_w}{Z_0} \cdot \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} \cos \theta \right) \\ &= 1 + \Gamma + \frac{Z_w}{Z_0} (1 - \Gamma) \cos \theta \\ &= 1 + \frac{Z_w}{Z_0} \cos \theta + \Gamma \left(1 - \frac{Z_w}{Z_0} \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (1.146)$$

また、

$$\begin{aligned} \left(1 + \Gamma \right) \left(l_0 + \cos \theta \right) &= \left(1 + \Gamma \right) \left(\frac{Z_w}{Z_0} \cdot \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} + \cos \theta \right) \\ &= \frac{Z_w}{Z_0} (1 - \Gamma) + (1 + \Gamma) \cos \theta \\ &= \cos \theta + \frac{Z_w}{Z_0} + \Gamma \left(\cos \theta - \frac{Z_w}{Z_0} \right) \end{aligned} \quad (1.147)$$

これより、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\theta, \phi) = \frac{\sqrt{Z_0}}{2} & \left[\left\{ 1 + \frac{Z_w}{Z_0} \cos \theta + \Gamma \left(1 - \frac{Z_w}{Z_0} \cos \theta \right) \right\} \right. \\ & \cdot \left(\bar{N}_x \cos \phi + \bar{N}_y \sin \phi \right) \mathbf{a}_\theta \\ & + \left\{ \cos \theta + \frac{Z_w}{Z_0} + \Gamma \left(\cos \theta - \frac{Z_w}{Z_0} \right) \right\} \\ & \left. \cdot \left(-\bar{N}_x \sin \phi + \bar{N}_y \cos \phi \right) \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (1.148)$$

反射を無視すると、 $\Gamma = 0$ とおき、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0} = \frac{\sqrt{Z_0}}{2} & \left[\left(1 + \frac{Z_w}{Z_0} \cos \theta \right) \left(\bar{N}_x \cos \phi + \bar{N}_y \sin \phi \right) \mathbf{a}_\theta \right. \\ & \left. + \left(\cos \theta + \frac{Z_w}{Z_0} \right) \left(-\bar{N}_x \sin \phi + \bar{N}_y \cos \phi \right) \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (1.149)$$

また,

$$l_0 \Big|_{\Gamma=0} = \frac{Z_w}{Z_0} \quad (1.150)$$

アンテナ利得 $G(\theta, \phi)$ は,

$$G(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \frac{\left| \mathbf{F}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0} \right|^2}{Z_w} = 4\pi \frac{S}{\lambda^2} \frac{\left| \mathbf{F}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0} \right|^2}{SZ_w} \equiv 4\pi \frac{S}{\lambda^2} \hat{\mathbf{F}}(\theta, \phi) \quad (1.151)$$

ここで,

$$\hat{\mathbf{F}}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{S} \sqrt{Z_w}} \mathbf{F}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0} \quad (1.152)$$

導波管モードの特性インピーダンス Z_0 を自由空間波動インピーダンス Z_w で規格化して,

$$z_0 \equiv \frac{Z_0}{Z_w} \equiv \frac{1}{y_0} \quad (1.153)$$

これより,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{z_0}{S}} & \left[\frac{1 + y_0 \cos \theta}{2} (\bar{N}_x \cos \phi + \bar{N}_y \sin \phi) \mathbf{a}_\theta \right. \\ & \left. + \frac{y_0 + \cos \theta}{2} (-\bar{N}_x \sin \phi + \bar{N}_y \cos \phi) \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (1.154)$$

1.6.2 TE モード

TE モードのとき,

$$\frac{Z_w}{Z_0^{\text{TE}}} = \frac{\omega \mu}{k} \cdot \frac{\beta^{\text{TE}}}{\omega \mu} = \frac{\beta^{\text{TE}}}{k} = \frac{1}{z_0^{\text{TE}}} = y_0^{\text{TE}} \quad (1.155)$$

放射電界 \mathbf{E}_p は,

$$\mathbf{E}_p^{\text{TE}} = \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{F}^{\text{TE}}(\theta, \phi) \quad (1.156)$$

$$(1.157)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{TE}}(\theta, \phi) = \frac{\sqrt{Z_0^{\text{TE}}}}{2} & \left[\left\{ 1 + \frac{\beta^{\text{TE}}}{k} \cos \theta + \Gamma \left(1 - \frac{\beta^{\text{TE}}}{k} \cos \theta \right) \right\} \right. \\ & \cdot (\bar{N}_x^{\text{TE}} \cos \phi + \bar{N}_y^{\text{TE}} \sin \phi) \mathbf{a}_\theta \\ & + \left\{ \cos \theta + \frac{\beta^{\text{TE}}}{k} + \Gamma \left(\cos \theta - \frac{\beta^{\text{TE}}}{k} \right) \right\} \\ & \left. \cdot (-\bar{N}_x^{\text{TE}} \sin \phi + \bar{N}_y^{\text{TE}} \cos \phi) \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (1.158)$$

反射を無視すると, $\Gamma = 0$ とおき,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{TE}}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0} &= \frac{\sqrt{Z_0^{\text{TE}}}}{2} \left[\left(1 + \frac{\beta^{\text{TE}}}{k} \cos \theta \right) \left(\bar{N}_x^{\text{TE}} \cos \phi + \bar{N}_y^{\text{TE}} \sin \phi \right) \mathbf{a}_\theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \theta + \frac{\beta^{\text{TE}}}{k} \right) \left(-\bar{N}_x^{\text{TE}} \sin \phi + \bar{N}_y^{\text{TE}} \cos \phi \right) \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (1.159)$$

1.6.3 TM モード

一方, TM モードのとき,

$$\frac{Z_w}{Z_0^{\text{TM}}} = \frac{k}{\omega \epsilon} \frac{\omega \epsilon}{\beta^{\text{TM}}} = \frac{k}{\beta^{\text{TM}}} = \frac{1}{z_0^{\text{TM}}} = y_0^{\text{TM}} \quad (1.160)$$

放射電界 \mathbf{E}_p は,

$$\mathbf{E}_p^{\text{TM}} = \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{F}^{\text{TM}}(\theta, \phi) \quad (1.161)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{TM}}(\theta, \phi) &= \frac{\sqrt{Z_0^{\text{TM}}}}{2} \left[\left\{ 1 + \frac{k}{\beta^{\text{TM}}} \cos \theta + \Gamma \left(1 - \frac{k}{\beta^{\text{TM}}} \cos \theta \right) \right\} \right. \\ &\quad \cdot \left(\bar{N}_x^{\text{TM}} \cos \phi + \bar{N}_y^{\text{TM}} \sin \phi \right) \mathbf{a}_\theta \\ &\quad + \left\{ \cos \theta + \frac{k}{\beta^{\text{TM}}} + \Gamma \left(\cos \theta - \frac{k}{\beta^{\text{TM}}} \right) \right\} \\ &\quad \left. \cdot \left(-\bar{N}_x^{\text{TM}} \sin \phi + \bar{N}_y^{\text{TM}} \cos \phi \right) \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (1.162)$$

反射を無視すると, $\Gamma = 0$ とおき,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{TM}}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0} &= \frac{\sqrt{Z_0^{\text{TM}}}}{2} \left[\left(1 + \frac{k}{\beta^{\text{TM}}} \cos \theta \right) \left(\bar{N}_x^{\text{TM}} \cos \phi + \bar{N}_y^{\text{TM}} \sin \phi \right) \mathbf{a}_\theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \theta + \frac{k}{\beta^{\text{TM}}} \right) \left(-\bar{N}_x^{\text{TM}} \sin \phi + \bar{N}_y^{\text{TM}} \cos \phi \right) \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (1.163)$$

1.6.4 開口径が十分大きい場合

導波管の開口径が十分大きい場合, $Z_0 \simeq Z_w$, $k \simeq \beta$ ($l_0 \simeq 1$). さらに, 反射も無視して $\Gamma = 0$ とおき,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &\simeq \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sqrt{Z_w} \left(\bar{N}_x \mathbf{a}_\xi + \bar{N}_y \mathbf{a}_\eta \right) \\ &= \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \sqrt{Z_w} \bar{\mathbf{F}}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (1.164)$$

ここで,

$$\bar{\mathbf{F}}(\theta, \phi) \equiv \frac{1 + \cos \theta}{2} \left(\bar{N}_x \mathbf{a}_\xi + \bar{N}_y \mathbf{a}_\eta \right) \quad (1.165)$$

このとき, アンテナ利得 G は次のようになる.

$$G(\theta, \phi) \simeq \frac{4\pi}{\lambda^2} \left| \bar{\mathbf{F}}(\theta, \phi) \right|^2 = 4\pi \frac{S}{\lambda^2} \left| \frac{\bar{\mathbf{F}}(\theta, \phi)}{\sqrt{S}} \right|^2 = 4\pi \frac{S}{\lambda^2} \left| \hat{\mathbf{F}}(\theta, \phi) \right|^2 \quad (1.166)$$

ここで,

$$\hat{\mathbf{F}}(\theta, \phi) = \frac{\bar{\mathbf{F}}(\theta, \phi)}{\sqrt{S}} = \frac{\mathbf{F}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0}}{\sqrt{S} \sqrt{Z_w}} \quad (1.167)$$

1.6.5 多モード（伝搬モード, 無損失）

開口面での反射がないとして ($\Gamma = 0$), 開口面上の横断面内電界 \mathbf{E}_t が, 伝搬モードの合成で与えられている場合を考える.

$$\mathbf{E}_t(\rho') = \sum_i c_i \sqrt{Z_i} \mathbf{e}_i(\rho') \quad (1.168)$$

ただし, c_i は i 番目のモード係数を示す. このとき, 横断面内磁界 \mathbf{H}_t は,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t(\rho') &= \sum_i c_i \sqrt{Y_i} \mathbf{h}_i(\rho') \\ &= \sum_i c_i \sqrt{Y_i} \left\{ \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_i(\rho') \right\} \end{aligned} \quad (1.169)$$

いま, モード係数 c_i は次のように規格化されているとする.

$$\begin{aligned} &\int_S (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &\equiv \int_S \left\{ \left(\sum_i c_i \sqrt{Z_i} \mathbf{e}_i \right) \times \left(\sum_j c_j^* \sqrt{Y_j} \mathbf{h}_j \right) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= \int_S \left\{ \sum_i \sum_j c_i c_j^* \sqrt{Z_i} \sqrt{Y_j} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{h}_j) \cdot \mathbf{a}_z \right\} dS \\ &= \sum_i |c_i|^2 \equiv 1 \end{aligned} \quad (1.170)$$

多モードの放射電界 \mathbf{E}_p は,

$$\mathbf{E}_p = \sum_i c_i \mathbf{E}_{p,i} = \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \sum_i c_i \mathbf{F}_i(\theta, \phi) \quad (1.171)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i(\theta, \phi) &= \frac{\sqrt{Z_i}}{2} \left[\left(1 + \frac{Z_w}{Z_i} \cos \theta \right) \left(\bar{N}_{x,i} \cos \phi + \bar{N}_{y,i} \sin \phi \right) \mathbf{a}_\theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \theta + \frac{Z_w}{Z_i} \right) \left(-\bar{N}_{x,i} \sin \phi + \bar{N}_{y,i} \cos \phi \right) \mathbf{a}_\phi \right] \quad (1.172)\end{aligned}$$

さらに, $Z_w \simeq Z_i$ のとき,

$$\mathbf{E}_p \simeq \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \sqrt{Z_w} \sum_i c_i \bar{\mathbf{F}}_i(\theta, \phi) \quad (1.173)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_i(\theta, \phi) \equiv \frac{1 + \cos \theta}{2} \left(\bar{N}_{x,i} \mathbf{a}_\xi + \bar{N}_{y,i} \mathbf{a}_\eta \right) \quad (1.174)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_i = \bar{N}_{x,i} \mathbf{a}_x + \bar{N}_{y,i} \mathbf{a}_y = \int_S \mathbf{e}_i e^{-jk(r_a - r)} dS \quad (1.175)$$

$$G(\theta, \phi) \simeq \frac{4\pi}{\lambda^2} \left| \sum_i c_i \bar{\mathbf{F}}_i(\theta, \phi) \right|^2 = 4\pi \frac{S}{\lambda^2} \left| \sum_i c_i \hat{\mathbf{F}}_i(\theta, \phi) \right|^2 \quad (1.176)$$

ただし, \mathbf{e}_i は i 番目の電界モード関数, c_i はそのモード係数, S は開口の面積を示す. ここで,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{F}}_i(\theta, \phi) &= \frac{\bar{\mathbf{F}}_i(\theta, \phi)}{\sqrt{S}} \\ &= \sqrt{\frac{z_i}{S}} \left[\frac{1 + y_i \cos \theta}{2} \left(\bar{N}_{x,i} \cos \phi + \bar{N}_{y,i} \sin \phi \right) \mathbf{a}_\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_i + \cos \theta}{2} \left(-\bar{N}_{x,i} \sin \phi + \bar{N}_{y,i} \cos \phi \right) \mathbf{a}_\phi \right] \quad (1.177)\end{aligned}$$

1.7 円形開口面分布による放射特性

1.7.1 円形開口面分布

直径 D の円形開口面分布 $E_a(\rho, \phi)$ によるフレネル領域の指向性関数 $g_r(R, \Theta, \Phi)$ は,

$$g_r(R, \Theta, \Phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} E_a(\rho, \phi) e^{-jk\frac{\rho^2}{2R}} e^{jka_R \cdot \rho} \rho d\rho d\phi \quad (1.178)$$

ここで, 観測方向に沿う単位ベクトル \mathbf{a}_R , および開口面の座標を示す位置ベクトル $\boldsymbol{\rho}$ は,

$$\mathbf{a}_R = \sin \Theta (\cos \Phi \mathbf{a}_x + \sin \Phi \mathbf{a}_y) + \cos \Theta \mathbf{a}_z \quad (1.179)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{a}_\rho = \rho (\cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y) \quad (1.180)$$

で表され,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_R \cdot \boldsymbol{\rho} &= \{\sin \Theta (\cos \Phi \mathbf{a}_x + \sin \Phi \mathbf{a}_y) + \cos \Theta \mathbf{a}_z\} \cdot \rho (\cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y) \\
 &= \rho \sin \Theta (\cos \Phi \cos \phi + \sin \Phi \sin \phi) \\
 &= \rho \sin \Theta \cos(\Phi - \phi)
 \end{aligned} \tag{1.181}$$

また, 位相項は次のようになる.

$$k(\mathbf{a}_R \cdot \boldsymbol{\rho}) = \frac{2\pi}{\lambda} \rho \sin \Theta \cos(\Phi - \phi) \tag{1.182}$$

いま,

$$\bar{\rho} \equiv \frac{2\rho}{D} \tag{1.183}$$

$$u \equiv \frac{\pi D}{\lambda} \sin \Theta \tag{1.184}$$

とおくと,

$$k(\mathbf{a}_R \cdot \boldsymbol{\rho}) = u \bar{\rho} \cos(\Phi - \phi) \tag{1.185}$$

$$d\bar{\rho} = \frac{2}{D} d\rho \tag{1.186}$$

また,

$$t \equiv \frac{D^2}{8\lambda R} \tag{1.187}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
 k \frac{\rho^2}{2R} &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{2R} \left(\frac{D}{2} \bar{\rho} \right)^2 \\
 &= 2\pi \left(\frac{D^2}{8\lambda R} \right) \bar{\rho}^2 \\
 &= 2\pi t \bar{\rho}^2
 \end{aligned} \tag{1.188}$$

これより, フレネル領域の指向性関数 $g_r(R, \Theta, \Phi)$ は次のようになる.

$$g_r(R, \Theta, \Phi) = \left(\frac{D}{2} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 E_a(\rho, \phi) e^{-j2\pi t \bar{\rho}^2} e^{ju \bar{\rho} \cos(\Phi - \phi)} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\phi \tag{1.189}$$

1.7.2 回転対称な円形開口面分布

開口面分布 E_a が回転対称な場合, ϕ に関する定積分が可能で,

$$e^{ju \bar{\rho} \cos(\Phi - \phi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^n J_n(u \bar{\rho}) e^{jn(\Phi - \phi)} \tag{1.190}$$

を用いると、指向性関数 $g_r(R, \Theta, \Phi)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} g_r &= \left(\frac{D}{2}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 E_a(\bar{\rho}) e^{-j2\pi t\bar{\rho}^2} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^n J_n(u\bar{\rho}) e^{jn(\Phi-\phi)} \right\} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\phi \\ &= \left(\frac{D}{2}\right)^2 \int_0^1 E_a(\bar{\rho}) e^{-j2\pi t\bar{\rho}^2} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^n J_n(u\bar{\rho}) \int_0^{2\pi} e^{jn(\Phi-\phi)} d\phi \right\} \bar{\rho} d\bar{\rho} \end{aligned}$$

ただし、 J_n は n 次の第 1 種ベッセル関数を示す。上式の ϕ に関する積分は、

$$\int_0^{2\pi} e^{jn(\Phi-\phi)} d\phi = \begin{cases} 2\pi & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases} \quad (1.191)$$

よって、 $g_r(R, \Theta, \Phi)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} g_r(R, \Theta, \Phi) &= \left(\frac{D}{2}\right)^2 \int_0^1 E_a(\bar{\rho}) e^{-j2\pi t\bar{\rho}^2} \left\{ j^0 J_0(u\bar{\rho}) \cdot 2\pi \right\} \bar{\rho} d\bar{\rho} \\ &= 2\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \int_0^1 E_a(\bar{\rho}) e^{-j2\pi t\bar{\rho}^2} J_0(u\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \end{aligned} \quad (1.192)$$

1.7.3 円形一様開口面分布

開口面分布の振幅、位相が一様の場合、つまり E_a を一定と考えると、ベッセルの不定積分公式

$$\int J_0(u\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}}{u} J_1(u\bar{\rho}) \quad (1.193)$$

より、フラウンホーファ領域 ($t = 0$) の指向性関数 $g(u)$ は ($E_a(x, y) = E_0$ は一定、 S は円形開口面の面積)，

$$\begin{aligned} g(u) &= 2\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 E_0 \int_0^1 J_0(u\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \\ &= 2\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 E_0 \left[\frac{\bar{\rho}}{u} J_1(u\bar{\rho}) \right]_0^1 \\ &= 2SE_0 \frac{J_1(u)}{u} \end{aligned} \quad (1.194)$$

また、

$$g(0) = E_0 \iint_A dS = E_0 S \quad (1.195)$$

相対電界指向性（ユニバーサル電界パターン） $\bar{g}(u)$ は、

$$\begin{aligned} \bar{g}(u) &= \frac{g(u)}{g(0)} = \frac{2SE_a \frac{J_1(u)}{u}}{E_a S} \\ &= 2 \frac{J_1(u)}{u} \end{aligned} \quad (1.196)$$

ユニバーサル電界パターンのサイロドーブレベルは、ピーク値に対して第1サイドローブから順に、 -17.6 , -23.8 , -28.0 , -31.2 , -33.6 , -35.7 dBとなる。また、規格化した相対的な放射（電力）パターン $\bar{G}(\theta, \phi)$ は、

$$\bar{G}(\theta, \phi) = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \left| 2 \frac{J_1(u)}{u} \right|^2 \quad (1.197)$$

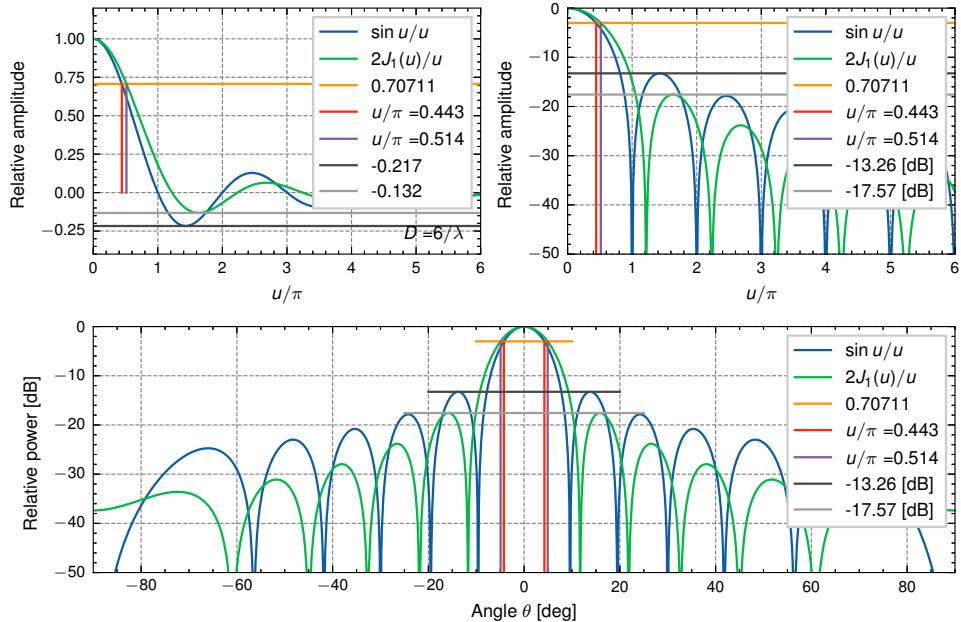


図 1.2. 直線開口および円形開口 ($D = 6\lambda$) の一様分布による放射パターン

1.7.4 放物線テーパ分布

回転対称の円形開口面分布において、半径 ρ 方向に放物線テーパ（Parabolic taper）のとき、 $\rho = \frac{D}{2}\bar{\rho}$ とおいて、

$$\begin{aligned} E(\rho) &= 1 - \left(\frac{2\rho}{D} \right)^2 \\ &= 1 - \bar{\rho}^2 = E(\bar{\rho}) \end{aligned} \quad (1.198)$$

これより,

$$\begin{aligned}
g(0) &= \iint_A E(\rho) dS \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} \left\{ 1 - \left(\frac{2\rho}{D} \right)^2 \right\} \rho d\phi d\rho \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\frac{D}{2} \right)^2 \int_0^1 (\bar{\rho} - \bar{\rho}^3) d\bar{\rho} \\
&= 2\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \left[\frac{\bar{\rho}^2}{2} - \frac{\bar{\rho}^4}{4} \right]_0^1 \\
&= \frac{S}{2}
\end{aligned} \tag{1.199}$$

また,

$$\begin{aligned}
\iint_A |E(\rho)|^2 dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \left\{ 1 - \left(\frac{2\rho}{D} \right)^2 \right\}^2 \rho d\phi d\rho \\
&= 2\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \int_0^1 (\bar{\rho} - 2\bar{\rho}^3 + \bar{\rho}^5) d\bar{\rho} \\
&= 2\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \left[\frac{\bar{\rho}^2}{2} - \frac{\bar{\rho}^4}{2} + \frac{\bar{\rho}^6}{6} \right]_0^1 \\
&= \frac{S}{3}
\end{aligned} \tag{1.200}$$

開口能率 η_a は,

$$\begin{aligned}
\eta_a &= \frac{\left| \iint_A E_a dS \right|^2}{S \iint_A |E_a|^2 dS} \\
&= \frac{\left(\frac{S}{2} \right)^2}{S \cdot \frac{S}{3}} = \frac{3}{4} = 0.75
\end{aligned} \tag{1.201}$$

フラウンホーファ領域 ($t = 0$) の指向性関数 $g(u)$ は、ベッセル関数に関わる積分公式を用いて,

$$\begin{aligned}
g(u) &= 2\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \int_0^1 E_a(\bar{\rho}) J_0(u\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \\
&= 2S \int_0^1 (1 - \bar{\rho}^2) J_0(u\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \\
&= 2S \cdot \frac{2J_2(u)}{u^2} = S \frac{4J_2(u)}{u^2}
\end{aligned} \tag{1.202}$$

相対電界指向性（ユニバーサル電界パターン） $\bar{g}(u)$ は、

$$\begin{aligned}\bar{g}(u) &= \frac{g(u)}{g(0)} = \frac{S \frac{4J_2(u)}{u^2}}{\frac{S}{2}} \\ &= 8 \frac{J_2(u)}{u^2}\end{aligned}\quad (1.203)$$

ユニバーサル電界パターンのサイロドーブレベルは、ピーク値に対して第1サイドローブから順に、 $-24.6, -33.6, -39.7, -44.5, -48.4, -51.6$ dB となる。また、規格化した相対的な放射（電力）パターン $\bar{G}(\theta, \phi)$ は、

$$\bar{G}(\theta, \phi) = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \left| 8 \frac{J_2(u)}{u^2} \right|^2 \quad (1.204)$$

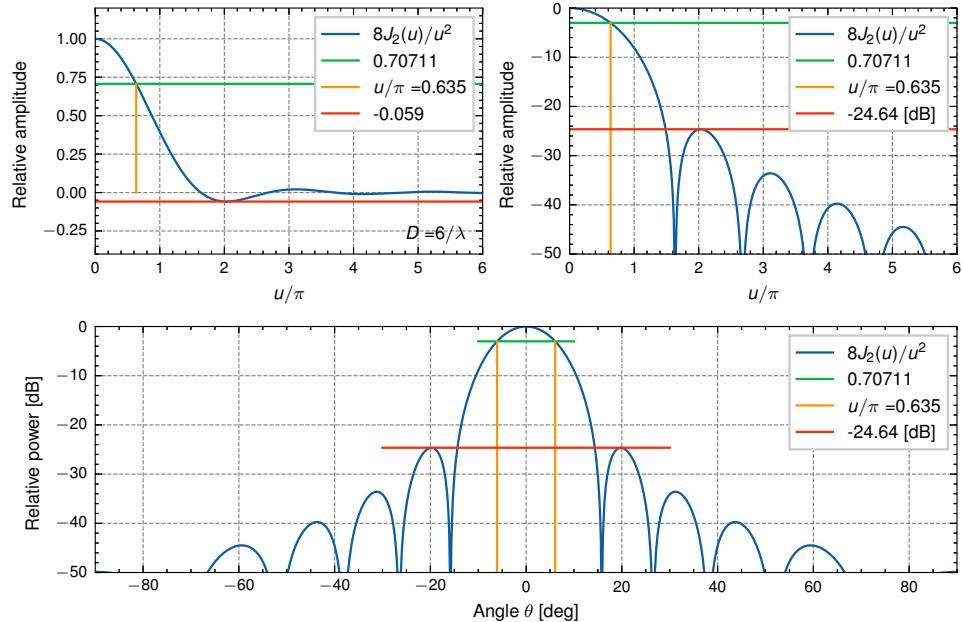


図 1.3. 放物線テーパ分布 ($D = 6\lambda$) による放射パターン

問題

次の極限を求めよ。

$$(a) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{J_1(u)}{u}, \quad (b) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{J_2(u)}{u^2} \quad (1.205)$$

■ 略解 (a) $u = 0$ のとき, ロピタルの定理より,

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow 0} \frac{J_1(u)}{u} &= \frac{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{d}{du} J_1(u)}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{d}{du} u} \\ &= \frac{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{2} \{J_0(u) - J_2(u)\}}{1} \\ &= \frac{1}{2} J_0(0) = \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{1.206}$$

ここで,

$$\frac{d}{dx} J_n(x) = \frac{1}{2} (J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x))\tag{1.207}$$

また,

$$J_0(0) = 1, \quad J_1(0) = 0, \quad J_2(0) = 0\tag{1.208}$$

■ 略解 (b)

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{J_2(u)}{u^2} = \frac{1}{8}\tag{1.209}$$

CHAPTER 2

方形導波管開口からの放射

方形導波管の開口部からの電磁波の放射特性について詳細に解説する。まず、方形開口からの放射を記述する一般的な式を導入し、フレネル領域における電界の積分表現を示していく。次に、*TE* (*Transverse Electric*) モードと *TM* (*Transverse Magnetic*) モードそれぞれのモード関数と、それらによって生じる遠方放射界の計算方法を詳しく説明する。特に、様々な *TE* モード (TE_{0n} , TE_{01} , TE_{m0} , TE_{10} など) における放射パターンとピーク利得の例を示し、最後に複数のモードを組み合わせた開口面からの放射、特に交差偏波成分を低減するためのモード合成の条件を議論する。

2.1 方形導波管開口からの放射特性

2.1.1 方形開口からの放射

方形導波管の断面寸法を $a \times b$ とし、導波管の中心軸上に z 軸をとる直角座標 (x', y', z) を考えると、 $x = x' + a/2$, $y = y' + b/2$ となる。開口面への横断面内入射電界 $\mathbf{E}_t^{\text{INC}}$ として、モード関数 $\mathbf{e}(\rho')$

$$\mathbf{e}(\rho') = e_x(x', y')\mathbf{a}_x + e_y(x', y')\mathbf{a}_y \quad (2.1)$$

を考えると、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{N}} &= \int_S \mathbf{e}(\rho') e^{-jk(r_a-r)} dS \\ &= \bar{N}_x \mathbf{a}_x + \bar{N}_y \mathbf{a}_y \\ &= \left\{ \int_S e_x(x', y') e^{-jk(r_a-r)} dS \right\} \mathbf{a}_x + \left\{ \int_S e_y(x', y') e^{-jk(r_a-r)} dS \right\} \mathbf{a}_y \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで、フレネル領域では、

$$-(r_a - r) \simeq \sin \theta (x' \cos \phi + y' \sin \phi) - \frac{x'^2 + y'^2}{2r} \quad (2.3)$$

ただし、 r_a は開口面上の波源から観測点までの距離、 r は原点から観測点までの距離を示す。これより、

$$\bar{N}_{(y)} \simeq \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e_{(y)}(x', y') e^{jk \sin \theta (x' \cos \phi + y' \sin \phi)} e^{-jk \frac{x'^2 + y'^2}{2r}} dy' dx' \quad (2.4)$$

さらに、

$$x' = \frac{a}{2} \cdot \bar{x}, \quad y' = \frac{b}{2} \cdot \bar{y} \quad (2.5)$$

で変数変換すると、

$$dx = \frac{a}{2} d\bar{x}, \quad dy = \frac{b}{2} d\bar{y} \quad (2.6)$$

$$kx' \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a}{2} \bar{x} \sin \theta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \cdot \bar{x} \equiv u_x \bar{x} \quad (2.7)$$

$$ky' \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{b}{2} \bar{y} \sin \theta = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \cdot \bar{y} \equiv u_y \bar{y} \quad (2.8)$$

ここで、

$$u_x \equiv \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta, \quad u_y \equiv \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \quad (2.9)$$

また、

$$\begin{aligned} k \frac{x'^2 + y'^2}{2r} &= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{2r} \left\{ \left(\frac{a}{2} \bar{x} \right)^2 + \left(\frac{b}{2} \bar{y} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{2\pi}{8\lambda r} (a^2 \bar{x}^2 + b^2 \bar{y}^2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

ここで、

$$t_x \equiv \frac{a^2}{8\lambda r}, \quad t_y \equiv \frac{b^2}{8\lambda r} \quad (2.11)$$

とおくと、

$$k \frac{x'^2 + y'^2}{2r} = 2\pi (t_x \bar{x}^2 + t_y \bar{y}^2) \quad (2.12)$$

これより、

$$\bar{N}_{(y)} = \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e_{(y)}(\bar{x}, \bar{y}) e^{j(\bar{x}u_x \cos \phi + \bar{y}u_y \sin \phi)} e^{-j2\pi(t_x \bar{x}^2 + t_y \bar{y}^2)} d\bar{y} d\bar{x} \quad (2.13)$$

2.1.2 方形導波管モードによる放射特性

方形導波管のモード関数は次のように変数分離形

$$e_x(\bar{x}, \bar{y}) = B_x e_{x1}(\bar{x}) e_{x2}(\bar{y}) \quad (2.14)$$

$$e_y(\bar{x}, \bar{y}) = B_y e_{y1}(\bar{x}) e_{y2}(\bar{y}) \quad (2.15)$$

で与えられるので (B_x, B_y は定数),

$$\begin{aligned} \bar{N}_{(x)} &= \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e_{(y)1}(\bar{x}) e_{(y)2}(\bar{y}) \\ &\quad \cdot e^{j(\bar{x}u_x \cos \phi + \bar{y}u_y \sin \phi)} e^{-j2\pi(t_x \bar{x}^2 + t_y \bar{y}^2)} d\bar{y} d\bar{x} \\ &= B_{(x)} \frac{ab}{4} \left[\int_{-1}^1 e_{(y)1}(\bar{x}) e^{j\bar{x}u_x \cos \phi} e^{-j2\pi t_x \bar{x}^2} d\bar{x} \right] \\ &\quad \cdot \left[\int_{-1}^1 e_{(y)2}(\bar{y}) e^{j\bar{y}u_y \sin \phi} e^{-j2\pi t_y \bar{y}^2} d\bar{y} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

無限遠方では,

$$\bar{N}_{(y)} = B_{(y)} \frac{ab}{4} \left[\int_{-1}^1 e_{(y)1}(\bar{x}) e^{j\bar{x}u_x \cos \phi} d\bar{x} \right] \left[\int_{-1}^1 e_{(y)2}(\bar{y}) e^{j\bar{y}u_y \sin \phi} d\bar{y} \right] \quad (2.17)$$

2.2 方形導波管の TE_{mn} モードによる遠方放射界

2.2.1 方形導波管の TE_{mn} モード関数

方形導波管の TE_{mn} モードの電界のモード関数 $e_{[mn]}$ は,

$$\begin{aligned} e_{[mn]} &= A_{[mn]} \left[\frac{n\pi}{b} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_x \right. \\ &\quad \left. - \frac{m\pi}{a} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_y \right] \\ &= A_{[mn]} \left[\frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{2}(\bar{x} + 1) \sin \frac{n\pi}{2}(\bar{y} + 1) \mathbf{a}_x \right. \\ &\quad \left. - \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{2}(\bar{x} + 1) \cos \frac{n\pi}{2}(\bar{y} + 1) \mathbf{a}_y \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

ここで,

$$x = x' + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\bar{x} + 1), \quad x' = \frac{a}{2}\bar{x} \quad (2.19)$$

$$y = y' + \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(\bar{y} + 1), \quad y' = \frac{b}{2}\bar{y} \quad (2.20)$$

また, TE_{mn} モードの正規化係数 $A_{[mn]}$ は,

$$\begin{aligned} A_{[mn]} &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{ab\epsilon_m\epsilon_n}{(mb)^2 + (na)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{\epsilon_m\epsilon_n}{ab}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_m\epsilon_n}{ab}} \frac{1}{k_{c,[mn]}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.2.2 遠方放射電界

方形導波管の TE_{mn} モードによる遠方界は,

$$\begin{aligned} \bar{N}_{x[mn]} &= A_{[mn]} \frac{n\pi}{b} \frac{ab}{4} I_{c1} I_{s2} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_m\epsilon_n}{ab}} \frac{1}{k_{c,[mn]}} \frac{n\pi}{b} \frac{ab}{4} I_{c1} I_{s2} \\ &= \sqrt{ab} \frac{\sqrt{\epsilon_m\epsilon_n}}{4k_{c,[mn]}} \frac{n\pi}{b} I_{c1} I_{s2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{y[mn]} &= -A_{[mn]} \frac{m\pi}{a} \frac{ab}{4} I_{s1} I_{c2} \\ &= -\sqrt{ab} \frac{\sqrt{\epsilon_m\epsilon_n}}{4k_{c,[mn]}} \frac{m\pi}{a} I_{s1} I_{c2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

ここで, \bar{x} に関する積分項は,

$$I_{s1} \equiv \int_{-1}^1 \sin \frac{m\pi}{2} (\bar{x} + 1) e^{j\bar{x}u_x \cos \phi} d\bar{x} \quad (2.24)$$

$$I_{c1} \equiv \int_{-1}^1 \cos \frac{m\pi}{2} (\bar{x} + 1) e^{j\bar{x}u_x \cos \phi} d\bar{x} \quad (2.25)$$

同様にして, \bar{y} に関する積分項は,

$$I_{s2} \equiv \int_{-1}^1 \sin \frac{n\pi}{2} (\bar{y} + 1) e^{j\bar{y}u_y \cos \phi} d\bar{y} \quad (2.26)$$

$$I_{c2} \equiv \int_{-1}^1 \cos \frac{n\pi}{2} (\bar{y} + 1) e^{j\bar{y}u_y \sin \phi} d\bar{y} \quad (2.27)$$

これらの不定積分は, 次のような式が計算できればよい.

$$I_s = \int \sin(Bv) e^{Av} dv \quad (2.28)$$

$$I_c = \int \cos(Bv) e^{Av} dv \quad (2.29)$$

上の不定積分を実行すると,

$$\begin{aligned}
\int e^{Av} \sin Bv \, dv &= \int e^{Av} \frac{1}{j2} (e^{jBv} - e^{-jBv}) \, dv \\
&= \frac{-j}{2} \left(\int e^{(A+jB)v} \, dv - \int e^{(\bar{A}-j\bar{B})v} \, dv \right) \\
&= \frac{-j}{2} \left(\frac{e^{(A+jB)v}}{A+jB} - \frac{e^{(\bar{A}-j\bar{B})v}}{\bar{A}-j\bar{B}} \right) \\
&= \frac{-je^{Av}}{2} \frac{(A-jB)e^{jBv} - (A+jB)e^{-jBv}}{(A+jB)(A-jB)} \\
&= \frac{e^{Av}}{A^2 + \bar{B}^2} (A \sin Bv - B \cos Bv)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$A \pm jB = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
\int e^{Ax} \sin Bx \, dx &= \frac{-j}{2} \left(\pm \int dx \mp \int e^{(A \mp jB)x} \, dx \right) \\
&= \frac{\mp j}{2} \left(x - \frac{e^{(A \mp jB)x}}{A \mp jB} \right)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

あるいは, 不定積分した式 (2.30) より, $A \pm jB = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
\int e^{Av} \sin Bv \, dv &= \frac{-j}{2} \left(\frac{e^{(A+jB)v}}{(A+jB)v} - \frac{e^{(A-jB)v}}{(A-jB)v} \right) \\
&= \frac{\mp j}{2} \left(v - \frac{e^{(A \mp jB)v}}{A \mp jB} \right)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}
\int e^{Av} \cos Bv \, dv &= \int e^{Av} \frac{1}{2} (e^{jBv} + e^{-jBv}) \, dv \\
&= \frac{1}{2} \left(\int e^{(A+jB)v} \, dv + \int e^{(A-jB)v} \, dv \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(A+jB)v}}{A+jB} + \frac{e^{(A-jB)v}}{A-jB} \right) \\
&= \frac{e^{Av}}{2} \frac{(A-jB)e^{jBv} + (A+jB)e^{-jBv}}{(A+jB)(A-jB)} \\
&= \frac{e^{Av}}{A^2 + B^2} (A \cos Bv + B \sin Bv)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$A \pm jB = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\int e^{Av} \cos Bv \, dv &= \frac{1}{2} \left(\int dv + \int e^{(A \mp jB)v} dv \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(v + \frac{e^{(A \mp jB)v}}{\bar{a} \mp jB} \right)\end{aligned}\tag{2.34}$$

あるいは、不定積分した式 (2.33) より、 $A \pm jB = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\int e^{Av} \cos Bv \, dv &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(A+jB)v}}{(A+jB)v} v + \frac{e^{(A-jB)v}}{(A-jB)v} v \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(v + \frac{e^{(A \mp jB)v}}{A \mp jB} \right)\end{aligned}\tag{2.35}$$

これより、 $v = \bar{x} + 1$ とおくと、 $dv = d\bar{x}$ とえ,

$$\begin{aligned}\int e^{A(\bar{x}+1)} \sin B(\bar{x}+1) \, d\bar{x} &= \frac{e^{A(\bar{x}+1)}}{A^2 + B^2} \left\{ A \sin B(\bar{x}+1) - B \cos B(\bar{x}+1) \right\}\end{aligned}\tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}\int e^{A(\bar{x}+1)} \cos B(\bar{x}+1) \, d\bar{x} &= \frac{e^{A(\bar{x}+1)}}{A^2 + B^2} \left\{ A \cos B(\bar{x}+1) + B \sin B(\bar{x}+1) \right\}\end{aligned}\tag{2.37}$$

よって、

$$\int e^{A\bar{x}} \sin B(\bar{x}+1) \, d\bar{x} = \frac{e^{A\bar{x}}}{A^2 + B^2} \left\{ A \sin B(\bar{x}+1) - B \cos B(\bar{x}+1) \right\}\tag{2.38}$$

$$\int e^{A\bar{x}} \cos B(\bar{x}+1) \, d\bar{x} = \frac{e^{A\bar{x}}}{A^2 + B^2} \left\{ A \cos B(\bar{x}+1) + B \sin B(\bar{x}+1) \right\}\tag{2.39}$$

同様にして、 $v = \bar{y} + 1$ とおくと、 $dv = d\bar{y}$ とえ、

$$\int e^{A\bar{y}} \sin B(\bar{y}+1) \, d\bar{y} = \frac{e^{A\bar{y}}}{A^2 + B^2} \left\{ A \sin B(\bar{y}+1) - B \cos B(\bar{y}+1) \right\}\tag{2.40}$$

$$\int e^{A\bar{y}} \cos B(\bar{y}+1) \, d\bar{y} = \frac{e^{A\bar{y}}}{A^2 + B^2} \left\{ A \cos B(\bar{y}+1) + B \sin B(\bar{y}+1) \right\}\tag{2.41}$$

定積分 I_{c1} については、

$$A \rightarrow ju_x \cos \phi, \quad B \rightarrow \frac{m\pi}{2}$$

とすると,

$$\begin{aligned}
I_{c1} &= \left[\frac{e^{j\bar{x}u_x \cos \phi}}{(ju_x \cos \phi)^2 + (\frac{m\pi}{2})^2} \right. \\
&\quad \cdot \left. \left\{ (ju_x \cos \phi) \cos \frac{m\pi}{2}(\bar{x} + 1) + \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2}(\bar{x} + 1) \right\} \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{ju_x \cos \phi}{-(u_x \cos \phi)^2 + (\frac{m\pi}{2})^2} \left(e^{ju_x \cos \phi} \cos m\pi - e^{-ju_x \cos \phi} \cos 0 \right) \\
&= \frac{ju_x \cos \phi}{-(u_x \cos \phi)^2 + (\frac{m\pi}{2})^2} \left(e^{j(u_x \cos \phi + m\pi)} - e^{-ju_x \cos \phi} \right) \\
&= \frac{2u_x \cos \phi \sin \left(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2} \right)}{(u_x \cos \phi)^2 - (\frac{m\pi}{2})^2} e^{j\frac{m\pi}{2}}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

同様にして, $A \rightarrow ju_y \sin \phi$, $B \rightarrow \frac{n\pi}{2}$ とおけば, I_{c2} は次のようになる.

$$I_{c2} = \frac{2u_y \sin \phi \sin \left(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2} \right)}{(u_y \sin \phi)^2 - (\frac{n\pi}{2})^2} e^{j\frac{n\pi}{2}} \tag{2.43}$$

また, I_{s1} については,

$$\begin{aligned}
I_{s1} &= \left[\frac{e^{j\bar{x}u_x \cos \phi}}{(ju_x \cos \phi)^2 + (\frac{m\pi}{2})^2} \right. \\
&\quad \cdot \left. \left\{ (ju_x \cos \phi) \sin \frac{m\pi}{2}(\bar{x} + 1) - \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{2}(\bar{x} + 1) \right\} \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{-\frac{m\pi}{2}}{-(u_x \cos \phi)^2 + (\frac{m\pi}{2})^2} \left(e^{ju_x \cos \phi} \cos m\pi - e^{-ju_x \cos \phi} \cos 0 \right) \\
&= \frac{\frac{m\pi}{2}}{(u_x \cos \phi)^2 - (\frac{m\pi}{2})^2} \left(e^{j(u_x \cos \phi + m\pi)} - e^{-ju_x \cos \phi} \right) \\
&= \frac{\frac{m\pi}{2}}{(u_x \cos \phi)^2 - (\frac{m\pi}{2})^2} j2 \sin \left(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2} \right) \\
&= \frac{jm\pi \sin \left(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2} \right)}{(u_x \cos \phi)^2 - (\frac{m\pi}{2})^2} e^{j\frac{m\pi}{2}}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

同様にして, $\bar{a} \rightarrow ju_y \sin \phi$, $\bar{b} \rightarrow \frac{n\pi}{2}$ とおけば, I_{s2} は次のようになる.

$$I_{s2} = \frac{jn\pi \sin \left(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2} \right)}{(u_y \sin \phi)^2 - (\frac{n\pi}{2})^2} e^{j\frac{n\pi}{2}} \tag{2.45}$$

よって,

$$\begin{aligned}
I_{c1}I_{s2} &= 2u_x \cos \phi \cdot jn\pi e^{j\frac{(m+n)\pi}{2}} \\
&\quad \cdot \frac{\sin \left(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2} \right)}{(u_x \cos \phi)^2 - (\frac{m\pi}{2})^2} \cdot \frac{\sin \left(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2} \right)}{(u_y \sin \phi)^2 - (\frac{n\pi}{2})^2}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\Psi_{mn}(\theta, \phi) &\equiv \frac{\sin\left(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2}\right)}{(u_x \cos \phi)^2 - (\frac{m\pi}{2})^2} \cdot \frac{\sin\left(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2}\right)}{(u_y \sin \phi)^2 - (\frac{n\pi}{2})^2} j e^{j \frac{(m+n)\pi}{2}} \\ &= \frac{\text{sinc}\left(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2}\right)}{u_x \cos \phi - \frac{m\pi}{2}} \cdot \frac{\text{sinc}\left(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2}\right)}{u_y \sin \phi - \frac{n\pi}{2}} e^{j \frac{(m+n+1)\pi}{2}}\end{aligned}\quad (2.47)$$

とおくと,

$$I_{c1}I_{s2} = 2n\pi u_x \cos \phi \cdot \Psi_{mn}(\theta, \phi) \quad (2.48)$$

同様にして,

$$I_{s1}I_{c2} = 2m\pi u_y \sin \phi \cdot \Psi_{mn}(\theta, \phi) \quad (2.49)$$

$u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2} = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2}\right)}{(u_x \cos \phi)^2 - (\frac{m\pi}{2})^2} &= \frac{\sin\left(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2}\right)}{(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2})(u_x \cos \phi - \frac{m\pi}{2})} \\ &= \frac{1}{u_x \cos \phi - \frac{m\pi}{2}}\end{aligned}\quad (2.50)$$

また, $u_x \cos \phi - \frac{m\pi}{2} = 0$ のとき, 三角関数の積和公式

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \quad (2.51)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \quad (2.52)$$

より,

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2}\right)}{(u_x \cos \phi)^2 - (\frac{m\pi}{2})^2} &= \frac{2 \cos(u_x \cos \phi) \sin(\frac{m\pi}{2}) + \sin\left(u_x \cos \phi - \frac{m\pi}{2}\right)}{(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2})(u_x \cos \phi - \frac{m\pi}{2})}\end{aligned}\quad (2.53)$$

ロピタルの定理より, 上式は,

$$\begin{aligned}\frac{-2 \sin(u_x \cos \phi) \sin(\frac{m\pi}{2})}{2u_x \cos \phi} + \frac{1}{u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2}} &= -\text{sinc}(u_x \cos \phi) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \frac{1}{u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2}}\end{aligned}\quad (2.54)$$

同様にして, $u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2} = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2}\right)}{(u_y \sin \phi)^2 - (\frac{n\pi}{2})^2} &= \frac{\sin\left(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2}\right)}{(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2})(u_y \sin \phi - \frac{n\pi}{2})} = \frac{1}{u_y \sin \phi - \frac{n\pi}{2}}\end{aligned}\quad (2.55)$$

また, $u_y \sin \phi - \frac{n\pi}{2} = 0$ のとき, 三角関数の積和公式より

$$\frac{\sin(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2})}{(u_y \sin \phi)^2 - (\frac{n\pi}{2})^2} = \frac{2 \cos(u_y \sin \phi) \sin(\frac{n\pi}{2}) + \sin(u_y \sin \phi - \frac{n\pi}{2})}{(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2})(u_y \sin \phi - \frac{n\pi}{2})} \quad (2.56)$$

ロピタルの定理より, 上式は,

$$\begin{aligned} & \frac{-2 \sin(u_y \sin \phi) \sin(\frac{n\pi}{2})}{2u_y \sin \phi} + \frac{1}{u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2}} \\ &= -\text{sinc}(u_y \sin \phi) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2}} \end{aligned} \quad (2.57)$$

これより,

$$\begin{aligned} \bar{N}_{x[mn]} &= A_{[mn]} \frac{n\pi a}{4} I_{c1} I_{s2} \\ &= A_{[mn]} \frac{n^2 \pi^2 a u_x}{2} \cos \phi \Psi_{mn}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{y[mn]} &= -A_{[mn]} \frac{m\pi b}{4} I_{s1} I_{c2} \\ &= -A_{[mn]} \frac{m^2 \pi^2 b u_y}{2} \sin \phi \Psi_{mn}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (2.59)$$

よって,

$$\begin{aligned} & \bar{N}_{x[mn]} \cos \phi + \bar{N}_{y[mn]} \sin \phi \\ &= A_{[mn]} \left(\frac{n^2 \pi^2 a u_x}{2} \cos^2 \phi - \frac{m^2 \pi^2 b u_y}{2} \sin^2 \phi \right) \Psi_{mn}(\theta, \phi) \\ &= -A_{[mn]} \frac{\pi a^2 b^2}{2\lambda} \sin \theta \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \sin \phi \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \cos \phi \right)^2 \right\} \Psi_{mn}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (2.60)$$

また,

$$\begin{aligned} & -\bar{N}_{x[mn]} \sin \phi + \bar{N}_{y[mn]} \cos \phi \\ &= A_{[mn]} \left(-\frac{n^2 \pi^2 a u_x}{2} \cos \phi \sin \phi - \frac{m^2 \pi^2 b u_y}{2} \sin \phi \cos \phi \right) \Psi_{mn}(\theta, \phi) \\ &= -A_{[mn]} \frac{\pi a^2 b^2}{2\lambda} \sin \theta \sin \phi \cos \phi \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\} \Psi_{mn}(\theta, \phi) \\ &= -A_{[mn]} \frac{\pi a^2 b^2 k_{c,[mn]}^2}{2\lambda} \sin \theta \sin \phi \cos \phi \Psi_{mn}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (2.61)$$

よって, 方形導波管の TE_{mn} モードによる遠方放射電界 $\mathbf{E}_{p[mn]}$ は,

$$\mathbf{E}_{p[mn]} = \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi) \quad (2.62)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi) = & -A_{[mn]} \frac{\pi(ab)^2}{4\lambda} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \sqrt{Z_{[mn]}} \\
 & \cdot \left[\left\{ 1 + \frac{\beta_{[mn]}}{k} \cos \theta + \Gamma \left(1 - \frac{\beta_{[mn]}}{k} \cos \theta \right) \right\} \right. \\
 & \cdot \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \sin \phi \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \cos \phi \right)^2 \right\} \mathbf{a}_\theta \\
 & + \left. \left\{ \cos \theta + \frac{\beta_{[mn]}}{k} + \Gamma \left(\cos \theta - \frac{\beta_{[mn]}}{k} \right) \right\} \right. \\
 & \cdot k_{c,[mn]}^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{a}_\phi \left. \right] \quad (2.63)
 \end{aligned}$$

反射を無視すると, $\Gamma = 0$ とおき,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0} = & -A_{[mn]} \frac{\pi(ab)^2}{4\lambda} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \sqrt{Z_{[mn]}} \\
 & \cdot \left[\left(1 + \frac{\beta_{[mn]}}{k} \cos \theta \right) \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \sin \phi \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \cos \phi \right)^2 \right\} \mathbf{a}_\theta \right. \\
 & \left. + \left(\cos \theta + \frac{\beta_{[mn]}}{k} \right) k_{c,[mn]}^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right] \quad (2.64)
 \end{aligned}$$

さらに, 低次のモードについて開口径が十分大きい場合, $Z_{[mn]} \simeq Z_w$, $\beta_{[mn]} \simeq k$ より,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{p[mn]} &= \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi) \\
 &\simeq \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \sqrt{Z_w} \frac{\mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0}}{\sqrt{Z_w}} \\
 &\simeq \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \sqrt{Z_w} \bar{\mathbf{F}}_{[mn]}(\theta, \phi) \quad (2.65)
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi)}{\sqrt{Z_w}} \Big|_{\Gamma=0} &= -A_{[mn]} \frac{\pi(ab)^2}{4\lambda} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \sqrt{\frac{Z_{[mn]}}{Z_w}} \\
&\cdot \left[\left(1 + \frac{Z_w}{Z_{[mn]}} \cos \theta \right) \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \sin \phi \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \cos \phi \right)^2 \right\} \mathbf{a}_\theta \right. \\
&\left. + \left(\cos \theta + \frac{Z_w}{Z_{[mn]}} \right) k_{c,[mn]}^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right] \\
&= -A_{[mn]} \frac{\pi(ab)^2}{4\lambda} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \sqrt{\frac{k}{\beta_{[mn]}}} \\
&\cdot \left[\left(1 + \frac{\beta_{[mn]}}{k} \cos \theta \right) \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \sin \phi \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \cos \phi \right)^2 \right\} \mathbf{a}_\theta \right. \\
&\left. + \left(\cos \theta + \frac{\beta_{[mn]}}{k} \right) k_{c,[mn]}^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right] \tag{2.66}
\end{aligned}$$

あるいは、自由空間の波動インピーダンス Z_w で規格化したモードの特性インピーダンス $z_{[mn]}$ 、規格化特性アドミタンス $y_{[mn]}$ を、

$$z_{[mn]} \equiv \frac{Z_{[mn]}}{Z_w} \equiv \frac{1}{y_{[mn]}} \tag{2.67}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi)}{\sqrt{Z_w}} \Big|_{\Gamma=0} &= -A_{[mn]} \frac{\pi(ab)^2}{4\lambda} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \sqrt{z_{[mn]}} \\
&\cdot \left[\left(1 + y_{[mn]} \cos \theta \right) \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \sin \phi \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \cos \phi \right)^2 \right\} \mathbf{a}_\theta \right. \\
&\left. + \left(\cos \theta + y_{[mn]} \right) k_{c,[mn]}^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right] \tag{2.68}
\end{aligned}$$

ここで、TE_{mn} モード関数の正規化係数 $A_{[mn]}$ は、

$$\begin{aligned}
A_{[mn]} &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{ab\epsilon_m\epsilon_n}{(mb)^2 + (na)^2}} = \sqrt{\frac{\epsilon_m\epsilon_n}{ab}} \frac{1}{k_{c,[mn]}} \\
&= \sqrt{\frac{\epsilon_m\epsilon_n}{ab}} \frac{\lambda_{c,[mn]}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\epsilon_m\epsilon_n}}{2} \frac{\lambda_{c,[mn]}}{\pi\sqrt{ab}} \tag{2.69}
\end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi)}{\sqrt{Z_w}} \Big|_{\Gamma=0} &= -\frac{ab\sqrt{ab\epsilon_m\epsilon_n}}{4} \frac{\lambda_{c,[mn]}}{\lambda} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \sqrt{z_{[mn]}} \\ &\cdot \left[\frac{1+y_{[mn]}\cos\theta}{2} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \sin \phi \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \cos \phi \right)^2 \right\} \mathbf{a}_\theta \right. \\ &\left. + \frac{\cos\theta+y_{[mn]}}{2} k_{c,[mn]}^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (2.70)$$

また, $\beta_{[mn]} \simeq k$ より,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{[mn]}(\theta, \phi) &= -A_{[mn]} \frac{\pi(ab)^2}{4\lambda} \sin \theta (1 + \cos \theta) \Psi_{mn}(\theta, \phi) \\ &\cdot \left[\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \sin \phi \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \cos \phi \right)^2 \right\} \mathbf{a}_\theta \right. \\ &\left. + \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\} \sin \phi \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (2.71)$$

次の直交する単位ベクトル

$$\mathbf{a}_\theta = \cos \phi \mathbf{a}_\xi + \sin \phi \mathbf{a}_\eta \quad (2.72)$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\sin \phi \mathbf{a}_\xi + \cos \phi \mathbf{a}_\eta \quad (2.73)$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{[mn]}(\theta, \phi) &= -A_{[mn]} \frac{\pi(ab)^2}{4\lambda} \sin \theta (1 + \cos \theta) \Psi_{mn}(\theta, \phi) \\ &\cdot \left[\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \phi - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos^2 \phi \right\} (\cos \phi \mathbf{a}_\xi + \sin \phi \mathbf{a}_\eta) \right. \\ &\left. + \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\} \sin \phi \cos \phi (-\sin \phi \mathbf{a}_\xi + \cos \phi \mathbf{a}_\eta) \right] \\ &= -A_{[mn]} \frac{\pi(ab)^2}{2\lambda} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \\ &\cdot \left\{ -\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos \phi \mathbf{a}_\xi + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \phi \mathbf{a}_\eta \right\} \\ &= \frac{ab\sqrt{ab\epsilon_m\epsilon_n}}{4} \frac{\lambda_{c,[mn]}}{\lambda} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \\ &\cdot \left\{ \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos \phi \mathbf{a}_\xi - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \phi \mathbf{a}_\eta \right\} \end{aligned} \quad (2.74)$$

2.3 方形 TE モードによる放射特性の例

2.3.1 方形 TE_{0n} モード ($m = 0$) による遠方界

TE_{0n} モードのとき, $m = 0$ において,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_{[0n]}(\theta, \phi)}{\sqrt{Z_w}} \Big|_{\Gamma=0} = & -\frac{ab\sqrt{ab\epsilon_0\epsilon_n}}{4} \frac{\lambda_{c,[0n]}}{\lambda} \sin \theta \Psi_{0n}(\theta, \phi) \sqrt{z_{[0n]}} \\ & \cdot \left[\frac{1 + y_{[0n]} \cos \theta}{2} \left\{ \left(\frac{0\pi}{a} \sin \phi \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \cos \phi \right)^2 \right\} \mathbf{a}_\theta \right. \\ & \left. + \frac{\cos \theta + y_{[0n]}}{2} k_{c,[0n]}^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (2.75)$$

ここで,

$$k_{c,[0n]} = \frac{n\pi}{b} \quad (2.76)$$

$$\lambda_{c,[0n]} = \frac{2\pi}{k_{c,[0n]}} = 2\pi \frac{b}{n\pi} = \frac{2b}{n} \quad (2.77)$$

$$\epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_{n(\neq 0)} = 2 \quad (2.78)$$

また,

$$\Psi_{0n}(\theta, \phi) = \frac{\text{sinc}(u_x \cos \phi)}{u_x \cos \phi} \cdot \frac{\text{sinc}\left(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2}\right)}{u_y \sin \phi - \frac{n\pi}{2}} e^{j\frac{(n+1)\pi}{2}} \quad (2.79)$$

$$e^{j\frac{(n+1)\pi}{2}} = e^{j\frac{n\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{2}} = j e^{j\frac{n\pi}{2}} = j \cos \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2} \quad (2.80)$$

ここで,

$$u_x = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \quad (2.81)$$

より,

$$\Psi_{0n}(\theta, \phi) = \frac{\lambda}{\pi a} \frac{\text{sinc}(u_x \cos \phi)}{u_x \cos \phi} \Phi_{y,n} \quad (2.82)$$

$$\Phi_{y,n} \equiv \frac{\text{sinc}\left(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2}\right)}{u_y \sin \phi - \frac{n\pi}{2}} e^{j\frac{(n+1)\pi}{2}} \quad (2.83)$$

これらより,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_{[0n]}(\theta, \phi)}{\sqrt{Z_w}} \Big|_{\Gamma=0} = & -\frac{ab\sqrt{ab \cdot 2}}{4} \frac{n\pi}{b} \frac{1}{\lambda} \sin \theta \frac{\lambda}{\pi a} \frac{\text{sinc}(u_x \cos \phi)}{u_x \cos \phi} \Phi_{y,n} \sqrt{z_{[0n]}} \\ & \cdot \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left[\frac{1 + y_{[0n]} \cos \theta}{2} (-\cos^2 \phi) \mathbf{a}_\theta + \frac{\cos \theta + y_{[0n]}}{2} \sin \phi \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (2.84)$$

整理して,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_{[0n]}(\theta, \phi)}{\sqrt{Z_w}} \Big|_{\Gamma=0} &= \frac{n\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \operatorname{sinc}(u_x \cos \phi) \Phi_{y,n} \sqrt{z_{[0n]}} \\ &\cdot \left(\frac{1 + y_{[0n]} \cos \theta}{2} \cos \phi \ \mathbf{a}_\theta - \frac{y_{[0n]} + \cos \theta}{2} \sin \phi \ \mathbf{a}_\phi \right) \end{aligned} \quad (2.85)$$

開口径が十分大きい場合, $z_{[0n]} \simeq 1$, $y_{[0n]} \simeq 1$ と近似して,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{[0n]}(\theta, \phi) &= \frac{n\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \frac{1 + \cos \theta}{2} \operatorname{sinc}(u_x \cos \phi) \\ &\cdot \frac{\sin\left(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2}\right)}{(u_y \sin \phi)^2 - \frac{n^2\pi^2}{4}} e^{j\frac{(n+1)\pi}{2}} \mathbf{a}_\xi \end{aligned} \quad (2.86)$$

ここで,

$$\mathbf{a}_\xi = \cos \phi \mathbf{a}_\theta - \sin \phi \mathbf{a}_\phi \quad (2.87)$$

正面方向 ($\theta = 0$, $\phi = 0$) では,

$$\bar{\mathbf{F}}_{[0n]}(0, 0) = \frac{n\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{-\frac{n^2\pi^2}{4}} e^{j\frac{(n+1)\pi}{2}} \mathbf{a}_x \quad (2.88)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \sin \frac{n\pi}{2} e^{j\frac{(n+1)\pi}{2}} &= \sin \frac{n\pi}{2} \left(j \cos \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\ &= - \left(\sin \frac{n\pi}{2} \right)^2 = -1(\text{odd}), \ 0(\text{even}) \end{aligned} \quad (2.89)$$

より, n が偶数の場合, 正面でヌルになる. また, n が奇数の場合,

$$\bar{\mathbf{F}}_{[0n]}(0, 0) = \frac{2\sqrt{2ab}}{n\pi} \mathbf{a}_x \quad (2.90)$$

$$G_{[0n]} \Big|_{\theta=0} = 4\pi \frac{ab}{\lambda^2} \left| \frac{2\sqrt{2}}{n\pi} \right|^2 = 4\pi \frac{ab}{\lambda^2} \cdot \frac{8}{n^2\pi^2} \quad (2.91)$$

2.3.2 方形 TE₀₁ モード ($m = 0$, $n = 1$) による遠方界

TE₀₁ モードのとき, $m = 0$, $n = 1$ とおいて,

$$A_{[01]} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2b}{a}} \quad (2.92)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{[01]}(\theta, \phi) = -\frac{\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \frac{1 + \cos \theta}{2} \operatorname{sinc}(u_x \cos \phi) \frac{\cos\left(u_y \sin \phi\right)}{\left(u_y \sin \phi\right)^2 - \frac{\pi^2}{4}} \mathbf{a}_\xi \quad (2.93)$$

E面は $\phi = 0$ のときで, $\sin \phi = 0$, $\cos \phi = 1$ より,

$$\bar{\mathbf{F}}_{[01]}(\theta, 0) = \frac{2\sqrt{2ab}}{\pi} \frac{1 + \cos \theta}{2} \text{sinc}(u_x) \mathbf{a}_x \quad (2.94)$$

一方, H面は $\phi = \pi/2$ のときで, $\sin \phi = 1$, $\cos \phi = 0$ より,

$$\bar{\mathbf{F}}_{[01]}(\theta, \pi/2) = -\frac{\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \frac{1 + \cos \theta \cos(u_y)}{2} \frac{\cos(u_y)}{u_y^2 - \frac{\pi^2}{4}} \mathbf{a}_x \quad (2.95)$$

2.3.3 方形 TE_{m0} モード ($n = 0$) による遠方界

同様にして, TE_{m0} モードのとき, $n = 0$ において,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_{[m0]}(\theta, \phi)}{\sqrt{Z_w}} \Big|_{\Gamma=0} = & -\frac{ab\sqrt{ab\epsilon_0\epsilon_n}}{4} \frac{\lambda_{c,[m0]}}{\lambda} \sin \theta \Psi_{m0}(\theta, \phi) \sqrt{z_{[m0]}} \\ & \cdot \left[\frac{1 + y_{[m0]} \cos \theta}{2} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \sin \phi \right)^2 - \left(\frac{0\pi}{b} \cos \phi \right)^2 \right\} \mathbf{a}_\theta \right. \\ & \left. + \frac{\cos \theta + y_{[m0]}}{2} k_{c,[0n]}^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (2.96)$$

ここで,

$$k_{c,[m0]} = \frac{m\pi}{a} \quad (2.97)$$

$$\lambda_{c,[m0]} = \frac{2\pi}{k_{c,[m0]}} = 2\pi \frac{a}{m\pi} = \frac{2a}{m} \quad (2.98)$$

$$\epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_{m(\neq 0)} = 2 \quad (2.99)$$

また,

$$\Psi_{m0}(\theta, \phi) = \frac{\text{sinc}\left(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2}\right)}{u_x \cos \phi - \frac{m\pi}{2}} \cdot \frac{\text{sinc}(u_y \sin \phi)}{u_y \sin \phi} e^{j\frac{(m+1)\pi}{2}} \quad (2.100)$$

ここで,

$$u_y = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \quad (2.101)$$

より,

$$\Psi_{m0}(\theta, \phi) = \frac{\lambda}{\pi b} \frac{\text{sinc}(u_y \sin \phi)}{u_y \sin \phi} \Phi_{x,n} \quad (2.102)$$

$$\Phi_{x,n} \equiv \frac{\text{sinc}\left(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2}\right)}{u_x \cos \phi - \frac{m\pi}{2}} e^{j\frac{(m+1)\pi}{2}} \quad (2.103)$$

これらより,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_{[m0]}(\theta, \phi)}{\sqrt{Z_w}} \Big|_{\Gamma=0} &= -\frac{ab\sqrt{ab \cdot 2}}{4} \frac{m\pi}{a} \frac{1}{\lambda} \sin \theta \frac{\lambda}{\pi b} \frac{\text{sinc}(u_y \sin \phi)}{u_y \sin \phi} \Phi_{x,n} \sqrt{z_{[m0]}} \\ &\cdot \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[\frac{1 + y_{[m0]} \cos \theta}{2} \sin^2 \phi \mathbf{a}_\theta + \frac{\cos \theta + y_{[m0]}}{2} \sin \phi \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (2.104)$$

整理して,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_{[m0]}(\theta, \phi)}{\sqrt{Z_w}} \Big|_{\Gamma=0} &= -\frac{m\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \text{sinc}(u_y \sin \phi) \Phi_{x,n} \sqrt{z_{[m0]}} \\ &\cdot \left(\frac{1 + y_{[m0]} \cos \theta}{2} \sin \phi \mathbf{a}_\theta + \frac{y_{[m0]} + \cos \theta}{2} \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right) \end{aligned} \quad (2.105)$$

開口径が十分大きい場合, $z_{[m0]} \simeq 1$, $y_{[m0]} \simeq 1$ と近似して,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{[m0]}(\theta, \phi) &= -\frac{m\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \frac{1 + \cos \theta}{2} \text{sinc}(u_y \sin \phi) \\ &\cdot \frac{\sin \left(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2} \right)}{(u_x \cos \phi)^2 - \frac{m^2\pi^2}{4}} e^{j\frac{(m+1)\pi}{2}} \mathbf{a}_\eta \end{aligned} \quad (2.106)$$

ここで,

$$\mathbf{a}_\eta = \sin \phi \mathbf{a}_\theta + \cos \phi \mathbf{a}_\phi \quad (2.107)$$

正面方向 ($\theta = 0$, $\phi = 0$) では, n が偶数の場合, 正面でヌルになる. また, n が奇数の場合,

$$\bar{\mathbf{F}}_{[m0]}(0, 0) = -\frac{2\sqrt{2ab}}{m\pi} \mathbf{a}_y \quad (2.108)$$

$$G_{[m0]} \Big|_{\theta=0} = 4\pi \frac{ab}{\lambda^2} \left| \frac{2\sqrt{2}}{m\pi} \right|^2 = 4\pi \frac{ab}{\lambda^2} \cdot \frac{8}{m^2\pi^2} \quad (2.109)$$

2.3.4 方形 TE₁₀ モード ($m = 1$, $n = 0$) による遠方界

TE₁₀ モードのとき, $m = 1$, $n = 0$ とおいて,

$$\bar{\mathbf{F}}_{[10]}(\theta, \phi) = -\frac{\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \frac{1 + \cos \theta}{2} \frac{\cos(u_x \cos \phi)}{(u_x \cos \phi)^2 - \frac{\pi^2}{4}} \text{sinc}(u_y \sin \phi) \mathbf{a}_\eta \quad (2.110)$$

E面は $\phi = \pi/2$ のときで, $\sin \phi = 1$, $\cos \phi = 0$ より,

$$\bar{\mathbf{F}}_{[10]}(\theta, \pi/2) = \frac{2\sqrt{2ab}}{\pi} \frac{1 + \cos \theta}{2} \text{sinc}(u_y) \mathbf{a}_y \quad (2.111)$$

一方, H面は $\phi = 0$ のときで, $\sin \phi = 0$, $\cos \phi = 1$ より,

$$\bar{\mathbf{F}}_{[10]}(\theta, 0) = -\frac{\pi\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \frac{1 + \cos \theta}{2} \frac{\cos(u_x)}{u_x^2 - \frac{\pi^2}{4}} \mathbf{a}_y \quad (2.112)$$

2.3.5 ピーク利得

TE₀₁ モードのピーク利得 $G_{[01]} \Big|_{\theta=0}$ は,

$$G_{[01]} \Big|_{\theta=0} = 4\pi \frac{ab}{\lambda^2} \left| \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right|^2 = 4\pi \frac{ab}{\lambda^2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \quad (2.113)$$

また, TE₁₀ モードのピーク利得 $G_{[10]} \Big|_{\theta=0}$ は,

$$G_{[10]} \Big|_{\theta=0} = 4\pi \frac{ab}{\lambda^2} \left| \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right|^2 = 4\pi \frac{ab}{\lambda^2} \cdot \frac{8}{\pi^2} = G_{[01]} \Big|_{\theta=0} \quad (2.114)$$

2.4 方形 TE_{mn} モードによるフレネル領域の放射界

積分項が $t_x \neq 0$ のとき,

$$I_{s1} \equiv \int_{-1}^1 \sin \frac{m\pi}{2} (\bar{x} + 1) e^{j\bar{x}u_x \cos \phi} e^{-j2\pi t_x \bar{x}^2} d\bar{x} \quad (2.115)$$

$$I_{c1} \equiv \int_{-1}^1 \cos \frac{m\pi}{2} (\bar{x} + 1) e^{j\bar{x}u_x \cos \phi} e^{-j2\pi t_x \bar{x}^2} d\bar{x} \quad (2.116)$$

また, $t_y \neq 0$ のとき,

$$I_{s2} \equiv \int_{-1}^1 \sin \frac{n\pi}{2} (\bar{y} + 1) e^{j\bar{y}u_y \cos \phi} e^{-j2\pi t_y \bar{y}^2} d\bar{y} \quad (2.117)$$

$$I_{c2} \equiv \int_{-1}^1 \cos \frac{n\pi}{2} (\bar{y} + 1) e^{j\bar{y}u_y \sin \phi} e^{-j2\pi t_y \bar{y}^2} d\bar{y} \quad (2.118)$$

上式は, 次の不定積分が計算できればよい.

$$I_s = \int \sin B(v + 1) e^{Av} e^{-j\frac{\pi}{2} Cv^2} dv \quad (2.119)$$

$$I_c = \int \cos B(v + 1) e^{Av} e^{-j\frac{\pi}{2} Cv^2} dv \quad (2.120)$$

2.4.1 フレネル積分

フレネル積分 $S(x)$, $C(x)$ は,

$$S(x) = \int_0^x \sin \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}} x} \sin(t^2) dt \quad (2.121)$$

$$C(x) = \int_0^x \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}} x} \cos(t^2) dt \quad (2.122)$$

不定積分を変形して,

$$\begin{aligned} I_s &= \int \sin B(v + 1) e^{Av} e^{-j\frac{\pi}{2} Cv^2} dv \\ &= \frac{1}{j2} \int \left(e^{jB(v+1)} - e^{-jB(v+1)} \right) e^{Av} e^{-j\frac{\pi}{2} Cv^2} dv \\ &= \frac{e^{jB}}{j2} \int e^{(A+jB)v} e^{-j\frac{\pi}{2} Cv^2} dv - \frac{e^{-jB}}{j2} \int e^{(A-jB)v} e^{-j\frac{\pi}{2} Cv^2} dv \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} I_c &= \int \cos B(v + 1) e^{Av} e^{-j\frac{\pi}{2} Cv^2} dv \\ &= \frac{1}{2} \int \left(e^{jB(v+1)} + e^{-jB(v+1)} \right) e^{Av} e^{-j\frac{\pi}{2} Cv^2} dv \\ &= \frac{e^{jB}}{2} \int e^{(A+jB)v} e^{-j\frac{\pi}{2} Cv^2} dv + \frac{e^{-jB}}{2} \int e^{(A-jB)v} e^{-j\frac{\pi}{2} Cv^2} dv \end{aligned} \quad (2.124)$$

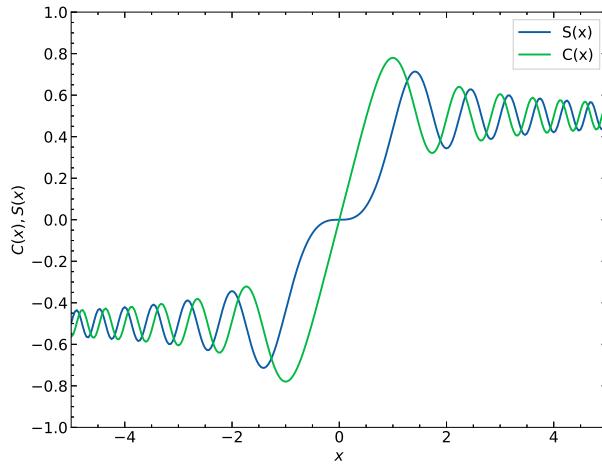


図 2.1. レネル積分 $S(x)$, $C(x)$ の計算例

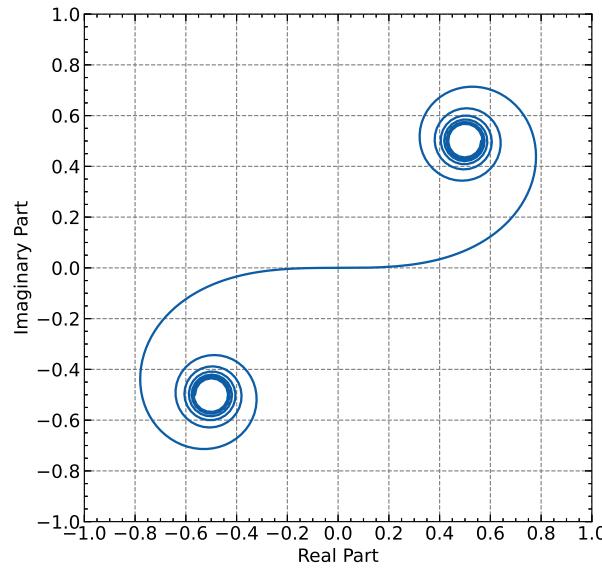


図 2.2. $\int_0^x e^{j\frac{\pi}{2}t^2} dt = C(x) + jS(x)$ (Cornu のらせん)

いま, $jA_i \equiv A \pm jB$ ($i = 1, 2$) とおくと,

$$I_s = \frac{e^{jB}}{j2} \int e^{jA_1 v} e^{-j\frac{\pi}{2}Cv^2} dv - \frac{e^{-jB}}{j2} \int e^{jA_2 v} e^{-j\frac{\pi}{2}Cv^2} dv \quad (2.125)$$

$$I_c = \frac{e^{jB}}{2} \int e^{jA_1 v} e^{-j\frac{\pi}{2}Cv^2} dv + \frac{e^{-jB}}{2} \int e^{jA_2 v} e^{-j\frac{\pi}{2}Cv^2} dv \quad (2.126)$$

積分項をまとめると,

$$\int e^{jA_i v} e^{-j\frac{\pi}{2}Cv^2} dv = \int e^{j(A_i v - \frac{\pi}{2}Cv^2)} dv \equiv \int e^{j\Theta_i(v)} dv \quad (2.127)$$

位相項 $\Theta_i(v)$ を変形して,

$$\begin{aligned}
\Theta_i(v) &= A_i v - \frac{\pi}{2} C v^2 \\
&= -\frac{\pi}{2} \left(C v^2 - \frac{2}{\pi} A_i v \right) \\
&= -\frac{\pi}{2} \left\{ \left(\sqrt{C} v - \frac{A_i}{\pi \sqrt{C}} \right)^2 - \frac{A_i^2}{\pi^2 C} \right\} \\
&= -\frac{\pi}{2} \left(\sqrt{C} v - \frac{A_i}{\pi \sqrt{C}} \right)^2 + \frac{A_i^2}{2\pi C}
\end{aligned} \tag{2.128}$$

ここで,

$$t_i(v) \equiv \sqrt{C} v - \frac{A_i}{\pi \sqrt{C}} \tag{2.129}$$

とおくと,

$$dt_i = \sqrt{C} dv \tag{2.130}$$

積分範囲は,

$$t_i(\mp 1) = \mp \sqrt{C} - \frac{A_i}{\pi \sqrt{C}} \equiv t_{i\mp} \tag{2.131}$$

これより積分項は,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 e^{j\Theta_i(v)} dv &= \int_{t_{i-}}^{t_{i+}} e^{-j\frac{\pi}{2}t_i^2} e^{j\frac{A_i^2}{2\pi C}} \frac{dt_i}{\sqrt{C}} \\
&= \frac{e^{j\frac{A_i^2}{2\pi C}}}{\sqrt{C}} \int_{t_{i-}}^{t_{i+}} e^{-j\frac{\pi}{2}t_i^2} dt_i
\end{aligned} \tag{2.132}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-}}^{t_{i+}} e^{-j\frac{\pi}{2}t_i^2} dt_i &= \int_{t_{i-}}^{t_{i+}} \cos\left(\frac{\pi}{2}t_i^2\right) dt_i - j \int_{t_{i-}}^{t_{i+}} \sin\left(\frac{\pi}{2}t_i^2\right) dt_i \\
&= C(t_{i+}) - C(t_{i-}) - j \{ S(t_{i+}) - S(t_{i-}) \}
\end{aligned} \tag{2.133}$$

いま,

$$v \rightarrow \bar{x}, \quad A \rightarrow ju_x \cos \phi, \quad B \rightarrow \frac{m\pi}{2}, \quad C \rightarrow 4t_x$$

とすると $(jA_i \equiv A \pm jB (i = 1, 2))$,

$$\begin{aligned} t_{1\mp} &= \mp\sqrt{C} - \frac{A_1}{\pi\sqrt{C}} \\ &= \mp\sqrt{C} - \frac{-jA + B}{\pi\sqrt{C}} \\ &= \mp2\sqrt{t_x} - \frac{u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2}}{2\pi\sqrt{t_x}} \end{aligned} \quad (2.134)$$

$$\begin{aligned} t_{2\mp} &= \mp\sqrt{C} - \frac{A_2}{\pi\sqrt{C}} \\ &= \mp\sqrt{C} - \frac{-jA - B}{\pi\sqrt{C}} \\ &= \mp2\sqrt{t_x} - \frac{u_x \cos \phi - \frac{m\pi}{2}}{2\pi\sqrt{t_x}} \end{aligned} \quad (2.135)$$

このとき,

$$\frac{e^{j\frac{A_1^2}{2\pi C}}}{\sqrt{C}} = \frac{1}{2\sqrt{t_x}} e^{j\frac{(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2})^2}{8\pi t_x}} \quad (2.136)$$

$$\frac{e^{j\frac{A_2^2}{2\pi C}}}{\sqrt{C}} = \frac{1}{2\sqrt{t_x}} e^{j\frac{(u_x \cos \phi - \frac{m\pi}{2})^2}{8\pi t_x}} \quad (2.137)$$

同様にして,

$$v \rightarrow \bar{y}, \quad A \rightarrow ju_y \sin \phi, \quad B \rightarrow \frac{n\pi}{2}, \quad C \rightarrow 4t_y$$

として,

$$t'_{1\mp} = \mp2\sqrt{t_y} - \frac{u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2}}{2\pi\sqrt{t_y}} \quad (2.138)$$

$$t'_{2\mp} = \mp2\sqrt{t_y} - \frac{u_y \sin \phi - \frac{n\pi}{2}}{2\pi\sqrt{t_y}} \quad (2.139)$$

このとき,

$$\frac{e^{j\frac{A_1^2}{2\pi C}}}{\sqrt{C}} = \frac{1}{2\sqrt{t_y}} e^{j\frac{(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2})^2}{8\pi t_y}} \quad (2.140)$$

$$\frac{e^{j\frac{A_2^2}{2\pi C}}}{\sqrt{C}} = \frac{1}{2\sqrt{t_y}} e^{j\frac{(u_y \sin \phi - \frac{n\pi}{2})^2}{8\pi t_y}} \quad (2.141)$$

よって、

$$\begin{aligned}
I_{s1} &= \frac{e^{jB}}{j2} \int_{-1}^1 e^{j\Theta_1 \bar{x}} d\bar{x} - \frac{e^{-jB}}{j2} \int_{-1}^1 e^{j\Theta_2 \bar{x}} d\bar{x} \\
&= \frac{1}{j4\sqrt{t_x}} \left(e^{j\frac{m\pi}{2}} e^{j\frac{(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2})^2}{8\pi t_x}} \int_{t_{1-}}^{t_{1+}} e^{-j\frac{\pi}{2}t^2} dt \right. \\
&\quad \left. - e^{-j\frac{m\pi}{2}} e^{j\frac{(u_x \cos \phi - \frac{m\pi}{2})^2}{8\pi t_x}} \int_{t_{2-}}^{t_{2+}} e^{-j\frac{\pi}{2}t^2} dt \right) \\
&= \frac{1}{j4\sqrt{t_x}} \\
&\quad \cdot \left(e^{j\frac{m\pi}{2}} e^{j\frac{(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2})^2}{8\pi t_x}} \left[C(t_{1+}) - C(t_{1-}) - j\{S(t_{1+}) - S(t_{1-})\} \right] \right. \\
&\quad \left. - e^{-j\frac{m\pi}{2}} e^{j\frac{(u_x \cos \phi - \frac{m\pi}{2})^2}{8\pi t_x}} \left[C(t_{2+}) - C(t_{2-}) - j\{S(t_{2+}) - S(t_{2-})\} \right] \right) \quad (2.142)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{c1} &= \frac{e^{jB}}{2} \int_{-1}^1 e^{j\Theta_1 \bar{x}} d\bar{x} + \frac{e^{jB}}{2} \int_{-1}^1 e^{j\Theta_2 \bar{x}} d\bar{x} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{t_x}} \\
&\quad \cdot \left(e^{j\frac{m\pi}{2}} e^{j\frac{(u_x \cos \phi + \frac{m\pi}{2})^2}{8\pi t_x}} \left[C(t_{1+}) - C(t_{1-}) - j\{S(t_{1+}) - S(t_{1-})\} \right] \right. \\
&\quad \left. + e^{-j\frac{m\pi}{2}} e^{j\frac{(u_x \cos \phi - \frac{m\pi}{2})^2}{8\pi t_x}} \left[C(t_{2+}) - C(t_{2-}) - j\{S(t_{2+}) - S(t_{2-})\} \right] \right) \quad (2.143)
\end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned}
I_{s2} &= \frac{1}{j4\sqrt{t_y}} \\
&\quad \cdot \left(e^{j\frac{n\pi}{2}} e^{j\frac{(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2})^2}{8\pi t_y}} \left[C(t'_{1+}) - C(t'_{1-}) - j\{S(t'_{1+}) - S(t'_{1-})\} \right] \right. \\
&\quad \left. - e^{-j\frac{n\pi}{2}} e^{j\frac{(u_y \sin \phi - \frac{n\pi}{2})^2}{8\pi t_y}} \left[C(t'_{2+}) - C(t'_{2-}) - j\{S(t'_{2+}) - S(t'_{2-})\} \right] \right) \quad (2.144)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{c2} &= \frac{1}{4\sqrt{t_y}} \\
&\quad \cdot \left(e^{j\frac{n\pi}{2}} e^{j\frac{(u_y \sin \phi + \frac{n\pi}{2})^2}{8\pi t_y}} \left[C(t'_{1+}) - C(t'_{1-}) - j\{S(t'_{1+}) - S(t'_{1-})\} \right] \right. \\
&\quad \left. + e^{-j\frac{n\pi}{2}} e^{j\frac{(u_y \sin \phi - \frac{n\pi}{2})^2}{8\pi t_y}} \left[C(t'_{2+}) - C(t'_{2-}) - j\{S(t'_{2+}) - S(t'_{2-})\} \right] \right) \quad (2.145)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}_{[mn]} &= \frac{1 + \cos \theta}{2} \left(\bar{N}_{x[mn]} \mathbf{a}_\xi + \bar{N}_{y[mn]} \mathbf{a}_\eta \right) \\ &= A_{[mn]} \frac{ab}{4} \frac{1 + \cos \theta}{2} \left(\frac{n\pi}{b} I_{c1} I_{s2} \mathbf{a}_\xi + \frac{m\pi}{a} I_{s1} I_{c2} \mathbf{a}_\eta \right)\end{aligned}\quad (2.146)$$

また、

$$\bar{N}_{x[mn]} = A_{[mn]} \frac{n\pi a}{4} I_{c1} I_{s2} \quad (2.147)$$

$$\bar{N}_{y[mn]} = -A_{[mn]} \frac{m\pi b}{4} I_{s1} I_{c2} \quad (2.148)$$

2.5 方形 TM_{mn} モードによる放射

方形導波管の TM_{mn} モードの電界のモード関数 $\mathbf{e}_{(mn)}$ は,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{(mn)} &= -A_{(mn)} \left[\frac{m\pi}{a} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_x \right. \\ &\quad \left. + \frac{n\pi}{b} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_y \right] \\ &= -A_{(mn)} \left[\frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{2} (\bar{x} + 1) \sin \frac{n\pi}{2} (\bar{y} + 1) \mathbf{a}_x \right. \\ &\quad \left. + \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{2} (\bar{x} + 1) \cos \frac{n\pi}{2} (\bar{y} + 1) \mathbf{a}_y \right]\end{aligned}\quad (2.149)$$

ここで, 正規化係数 $A_{(mn)}$ は,

$$\begin{aligned}A_{(mn)} &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{ab}{(mb)^2 + (na)^2}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{\frac{1}{ab}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{ab} k_{c,(mn)}}\end{aligned}\quad (2.150)$$

これより,

$$\bar{N}_{x(mn)} = -A_{(mn)} \frac{m\pi b}{4} I_{c1} I_{s2} \quad (2.151)$$

$$\bar{N}_{y(mn)} = -A_{(mn)} \frac{n\pi a}{4} I_{s1} I_{c2} \quad (2.152)$$

したがって (導出省略),

$$\bar{N}_{x(mn)} = -A_{(mn)} \frac{mn\pi^2 bu_x}{2} \cos \phi \Psi_{mn}(\theta, \phi) \quad (2.153)$$

$$\bar{N}_{y(mn)} = -A_{(mn)} \frac{mn\pi^2 au_y}{2} \sin \phi \Psi_{mn}(\theta, \phi) \quad (2.154)$$

これより,

$$\bar{N}_{x(mn)} \cos \phi + \bar{N}_{y(mn)} \sin \phi = -A_{(mn)} \frac{mn\pi^3 ab}{2\lambda} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \quad (2.155)$$

$$-\bar{N}_{x(mn)} \sin \phi + \bar{N}_{y(mn)} \cos \phi = 0 \quad (2.156)$$

よって,

$$\mathbf{E}_{p(mn)} = \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{F}_{(mn)}(\theta, \phi) \quad (2.157)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{(mn)}(\theta, \phi) &= -A_{(mn)} \frac{mn\pi^3 ab}{4\lambda} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \sqrt{Z_{(mn)}} \\ &\cdot \left\{ 1 + \frac{k}{\beta_{(mn)}} \cos \theta + \Gamma \left(1 - \frac{k}{\beta_{(mn)}} \cos \theta \right) \right\} \mathbf{a}_\theta\end{aligned}\quad (2.158)$$

反射を無視すると, $\Gamma = 0$ とおき,

$$\mathbf{F}_{(mn)}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0} = -A_{(mn)} \frac{mn\pi^3 ab}{4\lambda} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \sqrt{Z_{(mn)}} \left(1 + \frac{k}{\beta_{(mn)}} \cos \theta \right) \quad (2.159)$$

さらに, 低次のモードについて開口径が十分大きい場合, $Z_{[mn]} \simeq Z_w$, $\beta_{[mn]} \simeq k$ より,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{p[mn]} &= \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi) \\ &\simeq \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \sqrt{Z_w} \frac{\mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0}}{\sqrt{Z_w}} \\ &\simeq \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \sqrt{Z_w} \bar{\mathbf{F}}_{[mn]}(\theta, \phi)\end{aligned}\quad (2.160)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{F}_{(mn)}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0}}{\sqrt{Z_w}} &= -A_{(mn)} \frac{mn\pi^3 ab}{4\lambda} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \sqrt{\frac{Z_{(mn)}}{Z_w}} \left(1 + \frac{Z_w}{Z_{(mn)}} \cos \theta \right) \mathbf{a}_\theta \\ &= -A_{(mn)} \frac{mn\pi^3 ab}{4\lambda} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \sqrt{\frac{\beta_{(mn)}}{k}} \left(1 + \frac{k}{\beta_{(mn)}} \cos \theta \right) \mathbf{a}_\theta\end{aligned}\quad (2.161)$$

あるいは, 自由空間の波動インピーダンス Z_w で規格化したモードの特性インピーダンス $z_{(mn)}$, 規格化特性アドミタンス $y_{(mn)}$ を,

$$z_{(mn)} \equiv \frac{Z_{(mn)}}{Z_w} \equiv \frac{1}{y_{(mn)}} \quad (2.162)$$

とおくと,

$$\frac{\mathbf{F}_{(mn)}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0}}{\sqrt{Z_w}} = -A_{(mn)} \frac{mn\pi^3 ab}{4\lambda} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \sqrt{z_{(mn)}} \left(1 + y_{(mn)} \cos \theta \right) \mathbf{a}_\theta \quad (2.163)$$

ここで, TM_{mn} モード関数の正規化係数 $A_{(mn)}$ は,

$$\begin{aligned}A_{(mn)} &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{ab}{(mb)^2 + (na)^2}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{1}{k_{c,(mn)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{\lambda_{c,(mn)}}{2\pi} = \frac{\lambda_{c,(mn)}}{\pi\sqrt{ab}}\end{aligned}\quad (2.164)$$

これより,

$$\frac{\mathbf{F}_{(mn)}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0}}{\sqrt{Z_w}} = -\frac{mn\pi^2\sqrt{ab}}{2} \frac{\lambda_{c,(mn)}}{\lambda} \sin \theta \cdot \sqrt{z_{(mn)}} \frac{1 + y_{(mn)} \cos \theta}{2} \Psi_{mn}(\theta, \phi) \mathbf{a}_\theta \quad (2.165)$$

また,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{(mn)}(\theta, \phi) &= -A_{(mn)} \frac{mn\pi^3 ab}{4\lambda} \sin \theta (1 + \cos \theta) \Psi_{mn}(\theta, \phi) \mathbf{a}_\theta \\ &= -\frac{mn\pi^2\sqrt{ab}}{4} \frac{\lambda_{c,(mn)}}{\lambda} \sin \theta (1 + \cos \theta) \Psi_{mn}(\theta, \phi) \mathbf{a}_\theta \\ &= -\frac{mn\pi^2\sqrt{ab}}{2} \frac{\lambda_{c,(mn)}}{\lambda} \sin \theta \frac{1 + \cos \theta}{2} \Psi_{mn}(\theta, \phi) \mathbf{a}_\theta \end{aligned} \quad (2.166)$$

2.6 正方形導波管のモードとその放射パターンの例

2.6.1 正方形導波管 TE_{10} モード

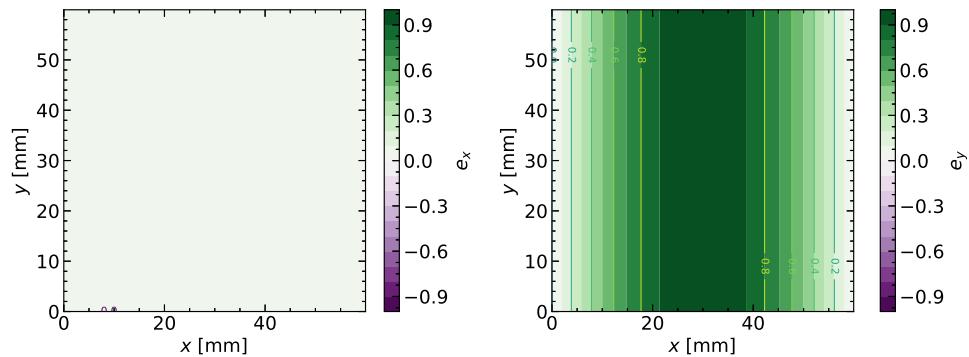


図 2.3. 正方形導波管の TE_{10} 電界モード関数の x 成分 e_x および y 成分 e_y

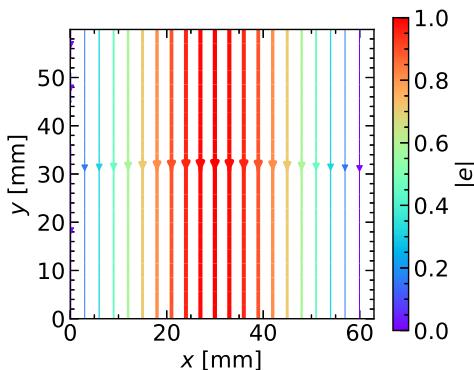


図 2.4. 正方形導波管の TE_{10} 電界モード関数の x 成分 e_x および y 成分 e_y

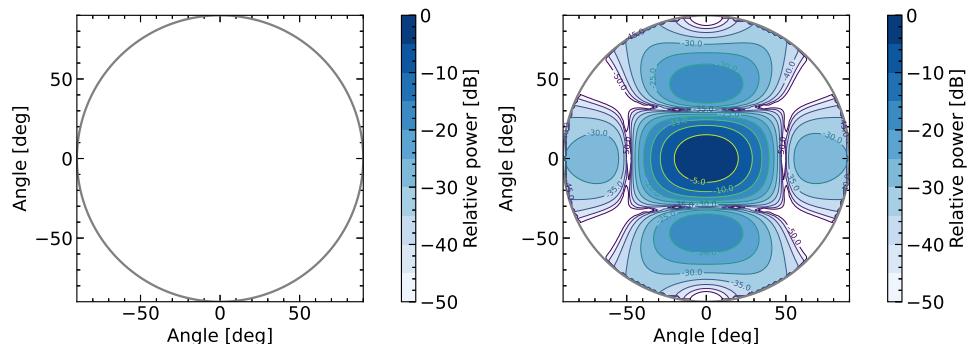


図 2.5. TE_{10} モードの放射パターンの a_η 成分および a_ζ 成分

2.6.2 正方形導波管 TE_{12} モード

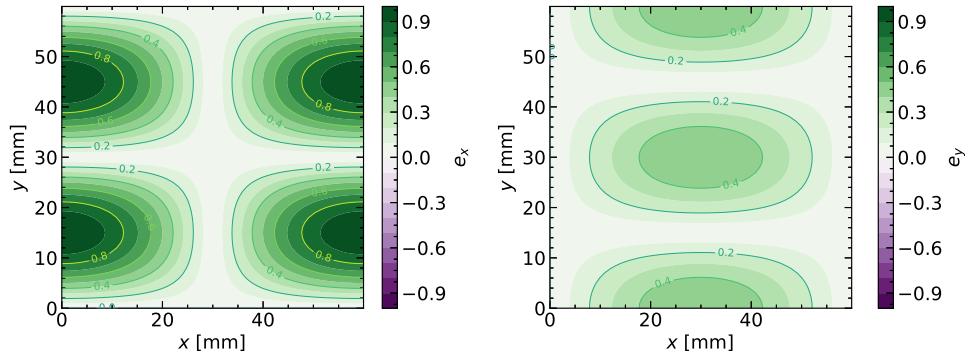


図 2.6. 正方形導波管の TE_{12} 電界モード関数の x 成分 e_x および y 成分 e_y

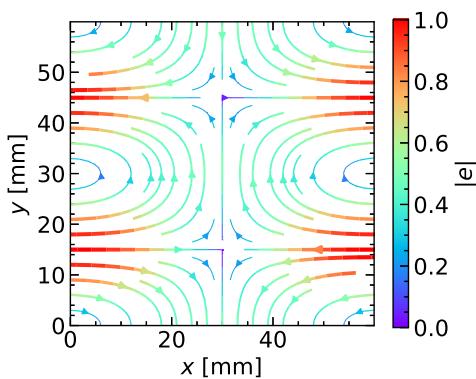


図 2.7. 正方形導波管の TE_{12} 電界モード関数の x 成分 e_x および y 成分 e_y

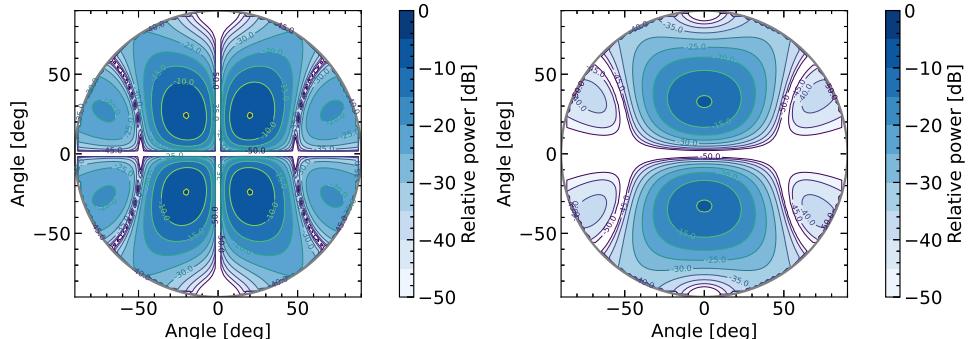


図 2.8. TE_{12} モードの放射パターンの a_η 成分および a_ζ 成分

2.6.3 正方形導波管 TM_{12} モード

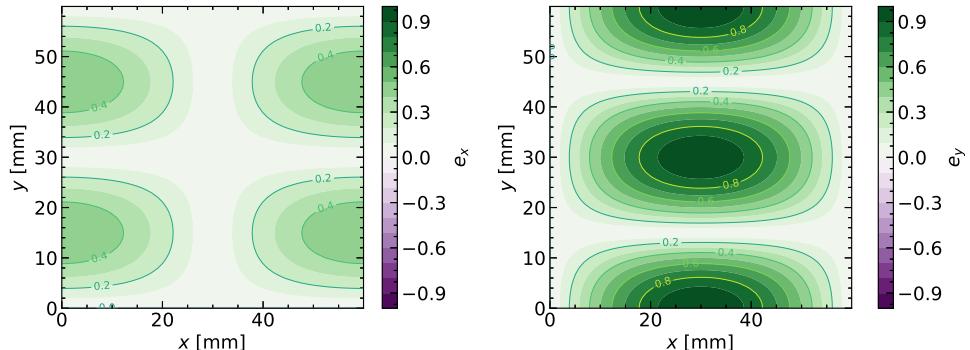


図 2.9. 正方形導波管の TM_{12} 電界モード関数の x 成分 e_x および y 成分 e_y

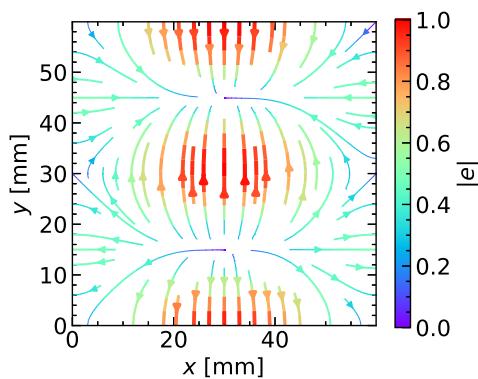


図 2.10. 正方形導波管の TM_{12} 電界モード関数の x 成分 e_x および y 成分 e_y

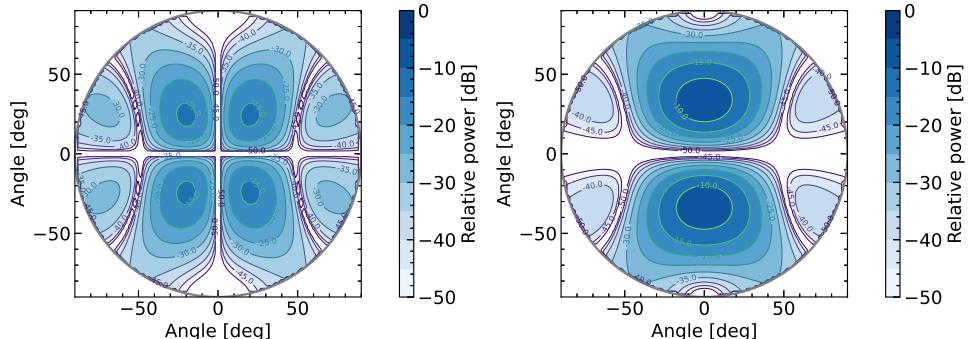


図 2.11. TM_{12} モードの放射パターンの a_η 成分および a_ζ 成分

2.6.4 正方形導波管 TE_{01} モード

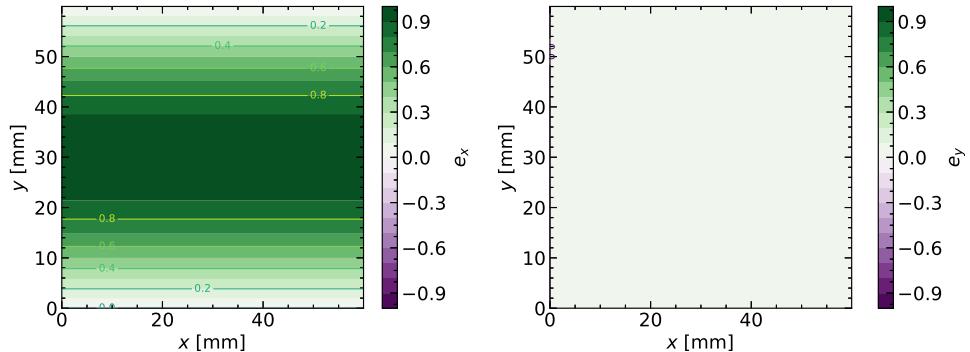


図 2.12. 正方形導波管の TE_{01} 電界モード関数の x 成分 e_x および y 成分 e_y

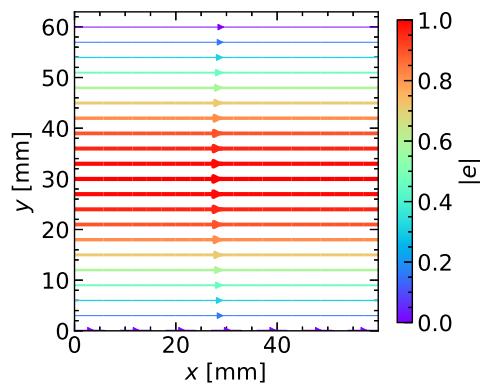


図 2.13. 正方形導波管の TE_{01} 電界モード関数の x 成分 e_x および y 成分 e_y

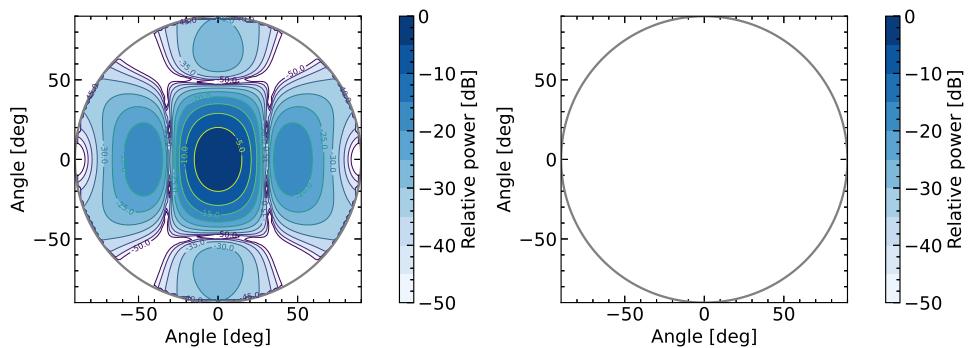


図 2.14. TE_{01} モードの放射パターンの a_η 成分および a_ξ 成分

2.6.5 正方形導波管 TE_{21} モード

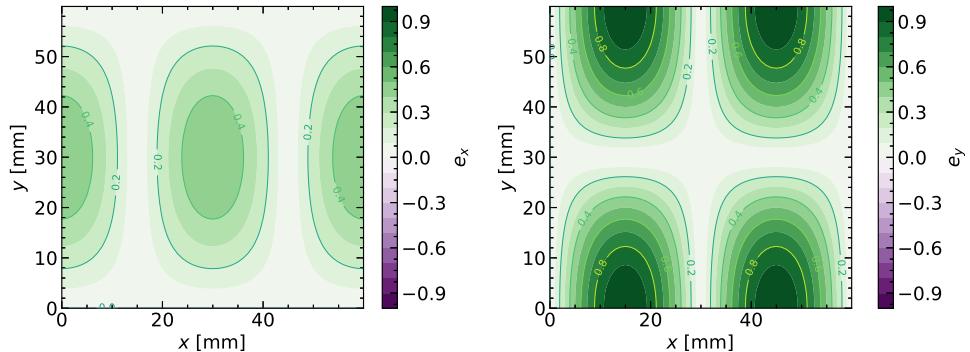


図 2.15. 正方形導波管の TE_{21} 電界モード関数の x 成分 e_x および y 成分 e_y

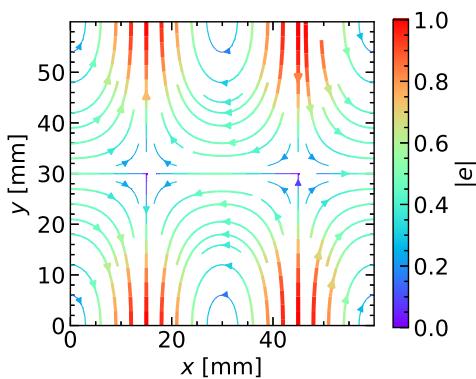


図 2.16. 正方形導波管の TE_{21} 電界モード関数の x 成分 e_x および y 成分 e_y

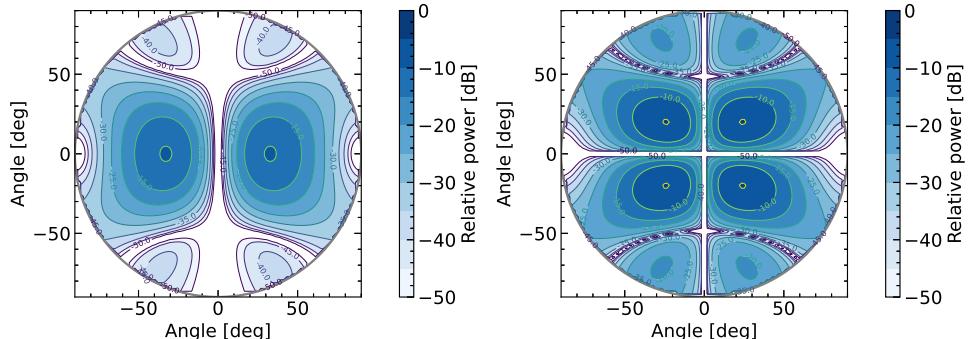


図 2.17. TE_{21} モードの放射パターンの a_η 成分および a_ξ 成分

2.6.6 正方形導波管 TM_{21} モード

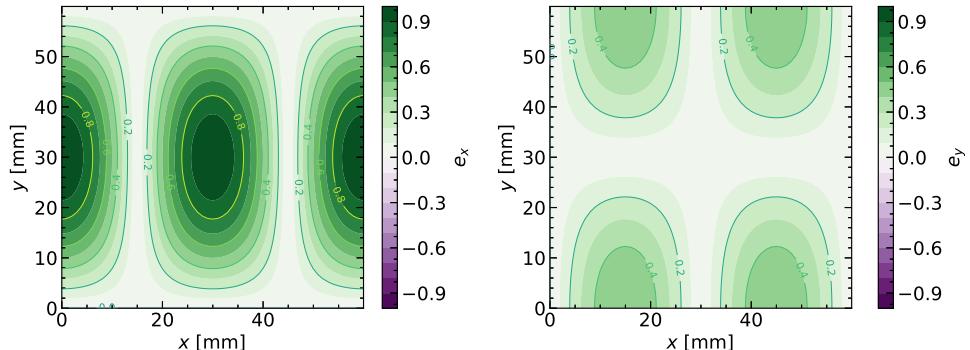


図 2.18. 正方形導波管の TM_{21} 電界モード関数の x 成分 e_x および y 成分 e_y

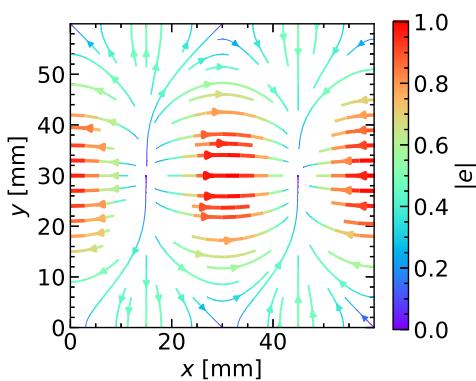


図 2.19. 正方形導波管の TM_{21} 電界モード関数の x 成分 e_x および y 成分 e_y

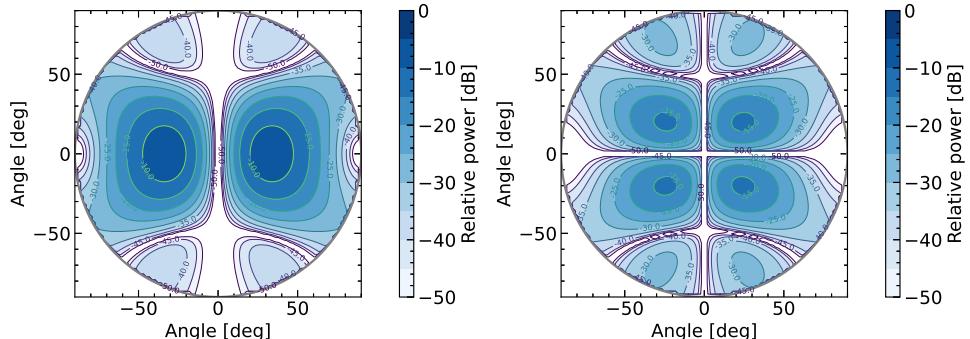


図 2.20. TM_{21} モードの放射パターンの a_η 成分および a_ζ 成分

2.7 2.7 多モード方形導波管開口からの放射

2.7.1 多モードを合成した開口面分布

開口面分布が方形導波管の伝搬モード (TE_{mn} モードおよび TM_{mn} モード) の合成で与えられている場合を考える。いま、モード係数を $c_{[mn]}$, $c_{(mn)}$ とすると、横断面内電界 \mathbf{E}_t および磁界 \mathbf{H}_t は、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t &= \sum_{m,n} c_{[mn]} \sqrt{Z_{[mn]}} \mathbf{e}_{[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \sqrt{Z_{(mn)}} \mathbf{e}_{(mn)} \\ &= \sum_i c_i \sqrt{Z_i} \mathbf{e}_i\end{aligned}\tag{2.167}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_t &= \sum_{m,n} c_{[mn]} \sqrt{Y_{[mn]}} \mathbf{h}_{[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \sqrt{Y_{(mn)}} \mathbf{h}_{(mn)} \\ &= \sum_i c_i \sqrt{Y_i} \mathbf{h}_i\end{aligned}\tag{2.168}$$

ただし、モード係数 c_i は次のように規格化されているとする。

$$\begin{aligned}& \int_S (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) \cdot \mathbf{a}_z dS \\ & \equiv \int_S \left\{ \left(\sum_i c_i \sqrt{Z_i} \mathbf{e}_i \right) \times \left(\sum_j c_j^* \sqrt{Y_j} \mathbf{h}_j \right) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS \\ & = \int_S \left\{ \sum_i \sum_j c_i c_j^* \sqrt{Z_i} \sqrt{Y_j} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{h}_j) \cdot \mathbf{a}_z \right\} dS \\ & = \sum_i \sum_j c_i c_j^* \sqrt{Z_i} \sqrt{Y_j} \int_S \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j dS \\ & = \sum_i |c_i|^2 \equiv 1\end{aligned}\tag{2.169}$$

つまり、

$$\sum_{m,n} |c_{[mn]}|^2 + \sum_{m,n} |c_{(mn)}|^2 = 1\tag{2.170}$$

2.7.2 開口面での反射が小さい場合

放射電界 \mathbf{E}_p は,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_p &= \sum_i c_i \mathbf{E}_{p,i} \\ &= \sum_{m,n} c_{[mn]} \mathbf{E}_{p[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \mathbf{E}_{p(mn)} \\ &= \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \left(\sum_{m,n} c_{[mn]} \mathbf{F}_{[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \mathbf{F}_{(mn)} \right)\end{aligned}\quad (2.171)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{F}}_{[mn]} &= \frac{\mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0}}{\sqrt{S} \sqrt{Z_w}} \\ &= -\frac{ab\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{4} \frac{\lambda_{c,[mn]}}{\lambda} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \sqrt{z_{[mn]}} \\ &\cdot \left[\frac{1 + y_{[mn]} \cos \theta}{2} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \sin \phi \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \cos \phi \right)^2 \right\} \mathbf{a}_\theta \right. \\ &\left. + \frac{\cos \theta + y_{[mn]}}{2} k_{c,[mn]}^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right]\end{aligned}\quad (2.172)$$

また,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{F}}_{(mn)} &= \frac{\mathbf{F}_{(mn)}(\theta, \phi) \Big|_{\Gamma=0}}{\sqrt{S} \sqrt{Z_w}} \\ &= -\frac{mn\pi^2}{2} \frac{\lambda_{c,(mn)}}{\lambda} \sin \theta \sqrt{z_{(mn)}} \frac{1 + y_{(mn)} \cos \theta}{2} \Psi_{mn}(\theta, \phi) \mathbf{a}_\theta\end{aligned}\quad (2.173)$$

このとき、各モードの正規化された放射電界は、

$$\mathbf{E}_{p,mn} = \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{F}_{mn}(\theta, \phi) \quad (2.174)$$

アンテナ利得 $G(\theta, \phi)$ は、正面方向の交差偏波成分がない場合、

$$\begin{aligned}G(\theta, \phi) &= 4\pi \frac{S}{\lambda^2} \frac{1}{SZ_w} \left| \sum_{m,n} c_{[mn]} \mathbf{F}_{[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \mathbf{F}_{(mn)} \right|^2 \\ &= 4\pi \frac{S}{\lambda^2} \left| \sum_{m,n} c_{[mn]} \hat{\mathbf{F}}_{[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \hat{\mathbf{F}}_{(mn)} \right|^2\end{aligned}\quad (2.175)$$

2.7.3 開口径が大きい場合

開口径が大きくなつていくと, 開口における反射は十分小さくなる. このとき, $\beta_{[mn]} \simeq k$, $\beta_{(mn)} \simeq k$ より,

$$\mathbf{E}_p \simeq \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \sqrt{S} \sqrt{Z_w} \left(\sum_{m,n} c_{[mn]} \hat{\mathbf{F}}_{[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \hat{\mathbf{F}}_{(mn)} \right) \quad (2.176)$$

$$G(\theta, \phi) \simeq 4\pi \frac{S}{\lambda^2} \left| \sum_{m,n} c_{[mn]} \hat{\mathbf{F}}_{[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \hat{\mathbf{F}}_{(mn)} \right|^2 \quad (2.177)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{[mn]}(\theta, \phi) &= \frac{ab\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{4} \frac{\lambda_{c,[mn]}}{\lambda} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta \Psi_{mn}(\theta, \phi) \\ &\quad \cdot \left\{ \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos \phi \mathbf{a}_\xi - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \phi \mathbf{a}_\eta \right\} \end{aligned} \quad (2.178)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{(mn)}(\theta, \phi) &= -\frac{mn\pi^2}{2} \frac{\lambda_{c,(mn)}}{\lambda} \sin \theta \frac{1 + \cos \theta}{2} \Psi_{mn}(\theta, \phi) \mathbf{a}_\theta \\ &= -\frac{mn\pi^2}{2} \frac{\lambda_{c,(mn)}}{\lambda} \sin \theta \frac{1 + \cos \theta}{2} \Psi_{mn}(\theta, \phi) \left(\cos \phi \mathbf{a}_\xi + \sin \phi \mathbf{a}_\eta \right) \end{aligned} \quad (2.179)$$

2.7.4 モードの合成による交差偏波成分の低減

TE_{mn} モードと TM_{mn} モードの指向性関数の \mathbf{a}_ξ 成分の比をとると,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mathbf{F}}_{(mn)} \cdot \mathbf{a}_\xi}{\hat{\mathbf{F}}_{[mn]} \cdot \mathbf{a}_\xi} &= \frac{-\frac{mn\pi^2}{2} \frac{\lambda_{c,(mn)}}{\lambda} \sin \theta \frac{1+\cos\theta}{2} \Psi_{mn} \cos \phi}{\frac{ab\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{4} \frac{\lambda_{c,[mn]}}{\lambda} \frac{1+\cos\theta}{2} \sin \theta \Psi_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos \phi} \\ &= \frac{-2mn\pi^2}{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n} \frac{a}{b} n^2 \pi^2} = -\frac{2}{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}} \frac{b}{a} \frac{m}{n} \end{aligned} \quad (2.180)$$

ここで, $m \neq 0$, $n \neq 0$ より, $\epsilon_m = 2$, $\epsilon_n = 2$ とえ,

$$\frac{\hat{\mathbf{F}}_{(mn)} \cdot \mathbf{a}_\xi}{\hat{\mathbf{F}}_{[mn]} \cdot \mathbf{a}_\xi} = -\frac{b}{a} \frac{m}{n} \quad (2.181)$$

主偏波成分が \mathbf{a}_η のとき, TE_{mn} モードと TM_{mn} モードによって交差偏波成分を消去する条件は,

$$c_{[mn]} \hat{\mathbf{F}}_{[mn]} \cdot \mathbf{a}_\xi + c_{(mn)} \hat{\mathbf{F}}_{(mn)} \cdot \mathbf{a}_\xi = 0 \quad (2.182)$$

整理して,

$$\hat{\mathbf{F}}_{[mn]} \cdot \mathbf{a}_\xi \left(c_{[mn]} + c_{(mn)} \frac{\hat{\mathbf{F}}_{(mn)} \cdot \mathbf{a}_\xi}{\hat{\mathbf{F}}_{[mn]} \cdot \mathbf{a}_\xi} \right) = 0 \quad (2.183)$$

$\hat{\mathbf{F}}_{[mn]} \cdot \mathbf{a}_\xi \neq 0$ より,

$$c_{[mn]} - c_{(mn)} \frac{b}{a} \frac{m}{n} = 0 \quad (2.184)$$

これより, 交差偏波成分を消去するモード係数の関係は, 次のようになる.

$$c_{(mn)} = \frac{a}{b} \frac{n}{m} c_{[mn]} \equiv \alpha_{mn}^{\text{Ypol}} c_{[mn]} \quad (2.185)$$

遠方放射電界 \mathbf{E}_p および利得 G は,

$$\mathbf{E}_p \simeq \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \sqrt{S} \sqrt{Z_w} \left\{ \sum_{m=1} c_{[m0]} \hat{\mathbf{F}}_{[m0]} + \sum_{m=1} \sum_{n=1} c_{[mn]} \left(\hat{\mathbf{F}}_{[mn]} + \alpha_{mn}^{\text{Ypol}} \hat{\mathbf{F}}_{(mn)} \right) \right\} \quad (2.186)$$

$$G(\theta, \phi) \simeq 4\pi \frac{S}{\lambda^2} \left| \sum_{m=1} c_{[m0]} \hat{\mathbf{F}}_{[m0]} \cdot \mathbf{a}_\eta + \sum_{m=1} \sum_{n=1} c_{[mn]} \left(\hat{\mathbf{F}}_{[mn]} \cdot \mathbf{a}_\eta + \alpha_{mn}^{\text{Ypol}} \hat{\mathbf{F}}_{(mn)} \cdot \mathbf{a}_\eta \right) \right|^2 \quad (2.187)$$

例えば, TE_{10} モードの入射によって発生する高次の次数の等しい TE モードと TM モードを考える. TE_{10} モードは, 開口面においては \mathbf{a}_y 方向, 遠方放射電界では \mathbf{a}_η 方向の成分が主偏波であり, 交差偏波は開口面において \mathbf{a}_x 方向, 遠方放射電界では \mathbf{a}_ξ 方向ゆえ, モード係数の関係は, TE/TM₁₂ モードの場合, $m = 1, n = 2$ において,

$$c_{(12)} = \frac{2}{1} \frac{a}{b} c_{[12]} = 2 \frac{a}{b} c_{[12]} \quad (2.188)$$

TE/TM₃₂ モードの場合, $m = 3, n = 2$ において,

$$c_{(32)} = \frac{2}{3} \frac{a}{b} c_{[32]} \quad (2.189)$$

TE/TM₁₄ モードの場合, $m = 1, n = 2$ において,

$$c_{(14)} = \frac{4}{1} \frac{a}{b} c_{[14]} = 4 \frac{a}{b} c_{[14]} \quad (2.190)$$

TE/TM₃₄ モードの場合, $m = 3, n = 4$ において,

$$c_{(34)} = \frac{4}{3} \frac{a}{b} c_{[34]} \quad (2.191)$$

TE/TM₅₂ モードの場合, $m = 5, n = 2$ において,

$$c_{(52)} = \frac{2}{5} \frac{a}{b} c_{[52]} \quad (2.192)$$

TE/TM₁₆ モードの場合, $m = 1, n = 6$ において,

$$c_{(16)} = \frac{6}{1} \frac{a}{b} c_{[16]} = 6 \frac{a}{b} c_{[16]} \quad (2.193)$$

同様にして, \mathbf{a}_η 成分の比をとると,

$$\frac{\hat{\mathbf{F}}_{(mn)} \cdot \mathbf{a}_\eta}{\hat{\mathbf{F}}_{[mn]} \cdot \mathbf{a}_\eta} = \frac{a}{b} \frac{n}{m} \quad (2.194)$$

主偏波成分が \mathbf{a}_ξ のとき, TE_{mn} モードと TM_{mn} モードによって交差偏波成分を消去するモード係数の関係は,

$$c_{(mn)} = -\frac{b}{a} \frac{m}{n} c_{[mn]} \equiv \alpha_{mn}^{\text{Xpol}} c_{[mn]} \quad (2.195)$$

TE_{01} モードの入射によって発生する高次の次数の等しい TE モードと TM モードを考えると, TE_{10} モードは, 開口面においては \mathbf{a}_x 方向, 遠方放射電界では \mathbf{a}_ξ 方向の成分が主偏波であり, 交差偏波は開口面において \mathbf{a}_y 方向, 遠方放射電界では \mathbf{a}_η 方向ゆえ, モード係数の関係は, 添字の交換以外には, 符号の違いと, a, b の交換をすれば求められる.

CHAPTER 3

円形導波管開口からの放射

円形導波管の開口からの電磁波の放射について詳しく解説する。まず、円形導波管の中心軸を基準とした座標系を定義し、開口面における入射電界をモード関数で表す。次に、軸対称導波管の TE モードと TM モードについて、それぞれの電界成分をベッセル関数を用いて詳細に導出する。そして、これらのモードを重畠した多モードの場合の放射電界やアンテナ利得の計算方法を示し、特に開口径が大きい場合の低次モードにおける特性について議論する。

3.1 円形導波管開口からの放射

円形導波管の断面の半径を a とし、導波管の中心軸上に z 軸をとる円筒座標 (ρ', ϕ', z) を定義する。開口面への横断面内入射電界として、モード関数 $e(\rho')$

$$e(\rho') \equiv e_x(\rho', \phi') \mathbf{a}_x + e_y(\rho', \phi') \mathbf{a}_y \quad (3.1)$$

を考えると、観測点が遠方の場合、

$$\bar{N}_{(x)} = \int_0^{2\pi} \int_0^a e_{(x)}(\rho', \phi') e^{j\mathbf{k} \cdot \rho'} \rho' d\rho' d\phi' \quad (3.2)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \rho' &= k \mathbf{a}_r \cdot \rho' \mathbf{a}_\rho \\ &= k \left\{ \sin \theta (\cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y) + \cos \theta \mathbf{a}_z \right\} \\ &\quad \cdot \rho' (\cos \phi' \mathbf{a}_x + \sin \phi' \mathbf{a}_y) \\ &= k \rho' \sin \theta (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi') \\ &= k \rho' \sin \theta \cos (\phi - \phi') \end{aligned} \quad (3.3)$$

いま、

$$\bar{\rho} \equiv \frac{\rho'}{a} \quad (3.4)$$

$$u \equiv \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta \quad (3.5)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}' &= \frac{2\pi}{\lambda} a \bar{\rho} \sin \theta \cos(\phi - \phi') \\ &= u \bar{\rho} \cos(\phi - \phi') \end{aligned} \quad (3.6)$$

このとき、 $\rho' d\rho' = a^2 \bar{\rho} d\bar{\rho}$ 。これより、

$$\bar{N}_{(y)}^{(x)} = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 e_{(y)}^{(x)}(\bar{\rho}, \phi') e^{ju\bar{\rho} \cos(\phi - \phi')} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\phi' \quad (3.7)$$

3.1.1 TE モード

TE_{mn} モードの場合、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{[mn]} &= \frac{A_{[mn]}}{a} \left[\mp \frac{m}{\bar{\rho}} J_m(\chi'_{mn} \bar{\rho}) \frac{\cos}{\sin} m\phi' \mathbf{a}_\rho \right. \\ &\quad \left. + \chi'_{mn} J'_m(\chi'_{mn} \bar{\rho}) \frac{\sin}{\cos} m\phi' \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

ベッセル関数の公式

$$J_m(z) = \frac{z}{2m} \left\{ J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z) \right\} \quad (3.9)$$

$$J'_m(z) = \frac{1}{2} \left\{ J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z) \right\} \quad (3.10)$$

より、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{[mn]} &= \frac{A_{[mn]} \chi'_{mn}}{2a} \left[\mp \left\{ J_{m-1}(\chi'_{mn} \bar{\rho}) + J_{m+1}(\chi'_{mn} \bar{\rho}) \right\} \frac{\cos}{\sin} m\phi' \mathbf{a}_\rho \right. \\ &\quad \left. + \left\{ J_{m-1}(\chi'_{mn} \bar{\rho}) - J_{m+1}(\chi'_{mn} \bar{\rho}) \right\} \frac{\sin}{\cos} m\phi' \mathbf{a}_\phi \right] \\ &= \mp \frac{A_{[mn]} \chi'_{mn}}{2a} \left[\left\{ J_{m-1}(\chi'_{mn} \bar{\rho}) + J_{m+1}(\chi'_{mn} \bar{\rho}) \right\} \frac{\cos}{\sin} m\phi' \mathbf{a}_\rho \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -J_{m-1}(\chi'_{mn} \bar{\rho}) + J_{m+1}(\chi'_{mn} \bar{\rho}) \right\} \frac{\sin}{-\cos} m\phi' \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

主偏波成分の係数が正になるように、上側は逆符号にして、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{[mn]} = & \frac{A_{[mn]}\chi'_{mn}}{2a} \left[\left\{ J_{m-1}(\chi'_{mn}\bar{\rho}) + J_{m+1}(\chi'_{mn}\bar{\rho}) \right\} \cos m\phi' \mathbf{a}_\rho \right. \\ & \left. \mp \left\{ J_{m-1}(\chi'_{mn}\bar{\rho}) - J_{m+1}(\chi'_{mn}\bar{\rho}) \right\} \cos m\phi' \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.1.2 TM モード

一方、 TM_{mn} モードでは、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(mn)} = & \frac{A_{(mn)}}{a} \left[-\chi_{mn} J'_m(\chi_{mn}\bar{\rho}) \frac{\sin m\phi'}{\cos m\phi'} \mathbf{a}_\rho \right. \\ & \left. \mp \frac{m}{\bar{\rho}} J_m(\chi_{mn}\bar{\rho}) \frac{\cos m\phi'}{\sin m\phi'} \mathbf{a}_\phi \right] \\ = & -\frac{A_{(mn)}\chi_{mn}}{2a} \left[\left\{ J_{m-1}(\chi_{mn}\bar{\rho}) - J_{m+1}(\chi_{mn}\bar{\rho}) \right\} \cos m\phi' \mathbf{a}_\rho \right. \\ & \left. + \left\{ -J_{m-1}(\chi_{mn}\bar{\rho}) - J_{m+1}(\chi_{mn}\bar{\rho}) \right\} \frac{-\cos m\phi'}{\sin m\phi'} \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

TE モードの正弦モードと余弦モードに合わせるため上側と下側を入れ替え、その係数が正となるように逆符号にして、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(mn)} = & \frac{A_{(mn)}\chi_{mn}}{2a} \left[\left\{ J_{m-1}(\chi_{mn}\bar{\rho}) - J_{m+1}(\chi_{mn}\bar{\rho}) \right\} \cos m\phi' \mathbf{a}_\rho \right. \\ & \left. \mp \left\{ J_{m-1}(\chi_{mn}\bar{\rho}) + J_{m+1}(\chi_{mn}\bar{\rho}) \right\} \cos m\phi' \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.1.3 TE/TM をまとめた表示式

TE モードと TM モードを次のようにまとめて表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{mn} = & \frac{A_{mn}\bar{\chi}_{mn}}{2a} \left[\left\{ J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) + \ell J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) \right\} \cos m\phi' \mathbf{a}_\rho \right. \\ & \left. + \left\{ J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) - \ell J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) \right\} \frac{-\sin m\phi'}{\cos m\phi'} \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

ただし、

$$\ell = \begin{cases} 1 & (\text{TE mode}) \\ -1 & (\text{TM mode}) \end{cases}, \quad \bar{\chi}_{mn} = \begin{cases} \chi'_{mn} & (\text{TE}_{mn} \text{ mode}) \\ \chi_{mn} & (\text{TM}_{mn} \text{ mode}) \end{cases} \quad (3.16)$$

さらに,

$$\mathbf{a}_\rho = \cos \phi' \mathbf{a}_x + \sin \phi' \mathbf{a}_y \quad (3.17)$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\sin \phi' \mathbf{a}_x + \cos \phi' \mathbf{a}_y \quad (3.18)$$

これより,

$$\frac{\cos}{\sin} m\phi' \cdot \cos \phi' + \frac{-\sin}{\cos} m\phi' \cdot (-\sin \phi') = \frac{\cos}{\sin} (m-1)\phi' \quad (3.19)$$

$$\frac{\cos}{\sin} m\phi' \cdot \sin \phi' + \frac{-\sin}{\cos} m\phi' \cdot \cos \phi' = \frac{-\sin}{\cos} (m-1)\phi' \quad (3.20)$$

$$\frac{\cos}{\sin} m\phi' \cdot \cos \phi' - \frac{-\sin}{\cos} m\phi' \cdot (-\sin \phi') = \frac{\cos}{\sin} (m+1)\phi' \quad (3.21)$$

$$\frac{\cos}{\sin} m\phi' \cdot \sin \phi' - \frac{-\sin}{\cos} m\phi' \cdot \cos \phi' = -\frac{-\sin}{\cos} (m+1)\phi' \quad (3.22)$$

直角座標成分で表すと,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{mn} = & \frac{A_{mn}\bar{\chi}_{mn}}{2a} \left[\left\{ J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) \frac{\cos}{\sin} (m-1)\phi' \right. \right. \\ & + \ell J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) \frac{\cos}{\sin} (m+1)\phi' \left. \right\} \mathbf{a}_x \\ & + \left\{ J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) \frac{-\sin}{\cos} (m-1)\phi' \right. \\ & \left. - \ell J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) \frac{-\sin}{\cos} (m+1)\phi' \mathbf{a}_y \right\} \left. \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.2 円形導波管の TE_{1n} および TM_{1n} モードの特性

円形導波管の基本モードは TE_{11} モードであり, これに関連する周方向の次数 $m = 1$ のモードについて偏波方向を考えてみる. 上式の上側より,

$$\mathbf{e}_{1n} = \frac{A_{1n}\bar{\chi}_{1n}}{2a} \left\{ J_0(\bar{\chi}_{1n}\bar{\rho}) \mathbf{a}_x + \ell J_2(\bar{\chi}_{1n}\bar{\rho}) \left(\cos 2\phi' \mathbf{a}_x + \sin 2\phi' \mathbf{a}_y \right) \right\} \quad (3.24)$$

中心 $\bar{\rho} = 0$ では, $J_0(0) = 1$, $J_2(0) = 0$ ゆえ, このとき電界 $\mathbf{e}_{1n}(0)$ は x 方向偏波となっている. そして, 主偏波の非対称性および交差偏波成分は上式の第 2 項によるものである. 一方, 下側については,

$$\mathbf{e}_{1n} = \frac{A_{1n}\bar{\chi}_{1n}}{2a} \left\{ \ell J_2(\bar{\chi}_{1n}\bar{\rho}) \left(\sin 2\phi' \mathbf{a}_x - \cos 2\phi' \mathbf{a}_y \right) + J_0(\bar{\chi}_{1n}\bar{\rho}) \mathbf{a}_y \right\} \quad (3.25)$$

このとき, 中心 $\bar{\rho} = 0$ での電界 $\mathbf{e}_{1n}(0)$ は y 方向偏波である.

3.3 フラウンホーファ領域

円形導波管モードによる放射界を計算するため,

$$\begin{aligned}\bar{N}_x &= a^2 \frac{A_{mn} \bar{\chi}_{mn}}{2a} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn} \bar{\rho}) \frac{\cos(m-1)}{\sin} \phi' \right. \\ &\quad \left. + \ell J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn} \bar{\rho}) \frac{\cos(m+1)}{\sin} \phi' \right\} e^{ju\bar{\rho} \cos(\phi-\phi')} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\phi' \end{aligned}\quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}\bar{N}_y &= a^2 \frac{A_{mn} \bar{\chi}_{mn}}{2a} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ -J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn} \bar{\rho}) \frac{\sin}{-\cos} (m-1) \phi' \right. \\ &\quad \left. + \ell J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn} \bar{\rho}) \frac{\sin}{-\cos} (m+1) \phi' \right\} e^{ju\bar{\rho} \cos(\phi-\phi')} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\phi' \end{aligned}\quad (3.27)$$

における積分

$$I_{Nx1} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn} \bar{\rho}) \frac{\cos}{\sin} (m-1) \phi' e^{ju\bar{\rho} \cos(\phi-\phi')} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\phi' \quad (3.28)$$

$$I_{Nx2} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn} \bar{\rho}) \frac{\cos}{\sin} (m+1) \phi' e^{ju\bar{\rho} \cos(\phi-\phi')} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\phi' \quad (3.29)$$

$$I_{Ny1} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn} \bar{\rho}) \frac{\sin}{-\cos} (m-1) \phi' e^{ju\bar{\rho} \cos(\phi-\phi')} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\phi' \quad (3.30)$$

$$I_{Ny2} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn} \bar{\rho}) \frac{\sin}{-\cos} (m+1) \phi' e^{ju\bar{\rho} \cos(\phi-\phi')} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\phi' \quad (3.31)$$

を, ベッセル - フーリエ級数 (Bessel-Fourier series)

$$e^{j\lambda\rho \cos(\phi-\phi')} = J_0(\lambda\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} 2j^n J_n(\lambda\rho) \cos n(\phi - \phi') \quad (3.32)$$

を用いて積分する.

まず, \bar{N}_x の第 1 項の積分 I_{Nx1} は,

$$\begin{aligned}I_{Nx1} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn} \bar{\rho}) \frac{\cos}{\sin} (m-1) \phi' \\ &\quad \cdot \left\{ J_0(u\bar{\rho}) + \sum_{n'=1}^{\infty} 2j^{n'} J_{n'}(u\bar{\rho}) \cos n'(\phi - \phi') \right\} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\phi' \\ &= \int_0^1 J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn} \bar{\rho}) J_0(u\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{\cos}{\sin} (m-1) \phi' d\phi' \\ &\quad + \sum_{n'=1}^{\infty} 2j^{n'} \int_0^1 J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn} \bar{\rho}) J_{n'}(u\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \\ &\quad \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos}{\sin} (m-1) \phi' \cos n'(\phi - \phi') d\phi' \end{aligned}\quad (3.33)$$

ここで,

$$\int_0^{2\pi} \cos(m \mp 1)\phi' d\phi' = 2\pi\delta_{m,\pm 1} \quad (3.34)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m \mp 1)\phi' d\phi' = 0 \quad (3.35)$$

また,

$$\begin{aligned} & \cos(m \mp 1)\phi' \cos n'(\phi - \phi') \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos((m \mp 1)\phi' + n'(\phi - \phi')) + \cos((m \mp 1)\phi' - n'(\phi - \phi')) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos((m \mp 1 - n')\phi' + n'\phi) + \cos((m \mp 1 + n')\phi' - n'\phi) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos(m \mp 1 - n')\phi' \cos n'\phi - \sin(m \mp 1 - n')\phi' \sin n'\phi \right. \\ & \quad \left. + \cos(m \mp 1 + n')\phi' \cos n'\phi + \sin(m \mp 1 + n')\phi' \sin n'\phi \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

これを積分すると, $1 \leq n' = m \mp 1, -m \pm 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) のとき値をもち, このとき,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(m \mp 1)\phi' \cos n'(\phi - \phi') d\phi' &= \frac{1}{2} \cos n'\phi \int_0^{2\pi} d\phi' \\ &= \pi \cos n'\phi \end{aligned} \quad (3.37)$$

上側符号では, $m = 0$ のとき $n' = -m + 1 = 1$, $m = 1$ のとき $n' \geq 1$ となるケースはなし, $m = 2$ のとき $n' = m - 1 = 1$, $m = 3, 4, \dots$ のとき $n' = m - 1$ である. したがって,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \cos(m - 1)\phi' \cos n'(\phi - \phi') d\phi' \\ &= \begin{cases} \pi \cos |m - 1|\phi & (n' = |m - 1|, m = 0, 2, 3, 4, \dots) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.38)$$

また, 下側符号では, $m = 0$ のとき $n' = m + 1 = 1$, $m = 1, 2, \dots$ のとき $n' = m + 1$ である. したがって,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \cos(m + 1)\phi' \cos n'(\phi - \phi') d\phi' \\ &= \begin{cases} \pi \cos(m + 1)\phi & (n' = m + 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.39)$$

同様にして (導出省略),

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sin(m-1)\phi' \cos n'(\phi - \phi') d\phi' \\ &= \begin{cases} \pi \sin |m-1|\phi & (n' = |m-1|, m = 0, 2, 3, 4, \dots) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sin(m+1)\phi' \cos n'(\phi - \phi') d\phi' \\ &= \begin{cases} \pi \sin(m+1)\phi & (n' = m+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.41)$$

よって, 積分項は,

$$I_{Nx1} = j^{m-1} 2\pi \frac{\cos}{\sin} (m-1)\phi \int_0^1 J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) J_{m-1}(u\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \quad (3.42)$$

同様にして, \bar{N}_x の第 2 項の積分 I_{Nx2} は,

$$\begin{aligned} I_{Nx2} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) \frac{\cos}{\sin} (m+1)\phi' \\ &\quad \cdot \left\{ J_0(u\bar{\rho}) + \sum_{n'=1}^{\infty} 2j^{n'} J_{n'}(u\bar{\rho}) \cos n'(\phi - \phi') \right\} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\phi' \\ &= j^{m+1} 2\pi \frac{\cos}{\sin} (m+1)\phi \int_0^1 J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) J_{m+1}(u\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \end{aligned} \quad (3.43)$$

さらに, \bar{N}_y の第 1 項の積分 I_{Ny1} は,

$$\begin{aligned} I_{Ny1} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) \frac{\sin}{-\cos} (m-1)\phi' \cdot e^{ju\bar{\rho} \cos(\phi-\phi')} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\phi' \\ &= -j^{m-1} 2\pi \frac{\sin}{-\cos} (m-1)\phi \int_0^1 J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) J_{m-1}(u\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \end{aligned} \quad (3.44)$$

また, \bar{N}_y の第 2 項の積分 I_{Ny2} は,

$$\begin{aligned} I_{Ny2} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) \frac{\sin}{-\cos} (m+1)\phi' \cdot e^{ju\bar{\rho} \cos(\phi-\phi')} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\phi' \\ &= j^{m+1} 2\pi \frac{\sin}{-\cos} (m+1)\phi \int_0^1 J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) J_{m+1}(u\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \end{aligned} \quad (3.45)$$

積分項は,

$$I_{m\pm 1,n} \equiv \int_0^1 J_{m\pm 1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) J_{m\pm 1}(u\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \quad (3.46)$$

ベッセル関数の不定積分公式 ($\alpha \neq \beta$)

$$\int z J_\nu(\alpha z) J_\nu(\beta z) dz = \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \beta J_\nu(\alpha z) J'_\nu(\beta z) - \alpha J'_\nu(\alpha z) J_\nu(\beta z) \} \quad (3.47)$$

より,

$$\int_0^1 z J_\nu(\alpha z) J_\nu(\beta z) dz = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \beta J_\nu(\alpha) J'_\nu(\beta) - \alpha J'_\nu(\alpha) J_\nu(\beta) \} \quad (3.48)$$

よって,

$$I_{m\pm 1,n} = \frac{1}{\bar{\chi}_{mn}^2 - u^2} \{ u J_{m\pm 1}(\bar{\chi}_{mn}) J'_{m\pm 1}(u) - \bar{\chi}_{mn} J'_{m\pm 1}(\bar{\chi}_{mn}) J_{m\pm 1}(u) \}$$

3.4 フレネル領域

フレネル領域 (距離 r), あるいは円すいホーン (開口径 D , 軸長 L) に対しては,

$$t = \frac{D^2}{8\lambda} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{L} \right) \quad (3.49)$$

を導入して, 積分項は,

$$I_{m\pm 1,n} \equiv \int_0^1 J_{m\pm 1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) J_{m\pm 1}(u\bar{\rho}) e^{-j2\pi t\bar{\rho}^2} \bar{\rho} d\bar{\rho} \quad (3.50)$$

このとき,

$$\bar{\mathbf{F}}_{mn} = \frac{1 + \cos\theta}{2} \left(\bar{N}_x \mathbf{a}_\xi + \bar{N}_y \mathbf{a}_\eta \right) \quad (3.51)$$

ここで,

$$\bar{N}_x = j^{m-1} A_{mn} \pi a \bar{\chi}_{mn} \left\{ I_{m-1,n} \frac{\cos(m-1)\phi - \ell I_{m+1,n} \cos(m+1)\phi}{\sin(m-1)\phi + \ell \sin(m+1)\phi} \right\} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_y = & -j^{m-1} A_{mn} \pi a \bar{\chi}_{mn} \\ & \cdot \left\{ I_{m-1,n} \frac{\sin(m-1)\phi + \ell \sin(m+1)\phi}{\cos(m-1)\phi - \cos(m+1)\phi} \right\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

これより,

$$\begin{aligned} & \bar{N}_x \cos\phi + \bar{N}_y \sin\phi \\ = & j^{m-1} A_{mn} \pi a \bar{\chi}_{mn} \\ & \cdot \left[\left\{ I_{m-1,n} \frac{\cos(m-1)\phi - \ell I_{m+1,n} \cos(m+1)\phi}{\sin(m-1)\phi + \ell \sin(m+1)\phi} \right\} \cos\phi \right. \\ & \left. - \left\{ I_{m-1,n} \frac{\sin(m-1)\phi + \ell \sin(m+1)\phi}{\cos(m-1)\phi - \cos(m+1)\phi} \right\} \sin\phi \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

上式の [] の中は,

$$\begin{aligned}
& I_{m-1,n} \left\{ \frac{\cos(m-1)\phi \cos \phi}{\sin(m-1)\phi \sin \phi} - \frac{\sin(m-1)\phi \sin \phi}{-\cos(m-1)\phi \cos \phi} \right\} \\
& - \ell I_{m+1,n} \left\{ \frac{\cos(m+1)\phi \cos \phi}{\sin(m+1)\phi \sin \phi} + \frac{\sin(m+1)\phi \sin \phi}{-\cos(m+1)\phi \cos \phi} \right\} \\
& = I_{m-1,n} \frac{\cos m\phi}{\sin m\phi} - \ell I_{m+1,n} \frac{\cos m\phi}{\sin m\phi} \\
& = \left(I_{m-1,n} - \ell I_{m+1,n} \right) \frac{\cos m\phi}{\sin m\phi}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

また,

$$\begin{aligned}
& -\bar{N}_x \sin \phi + \bar{N}_y \cos \phi \\
& = j^{m-1} A_{mn} \pi a \bar{\chi}_{mn} \\
& \cdot \left[- \left\{ I_{m-1,n} \frac{\cos(m-1)\phi \cos \phi}{\sin(m-1)\phi \sin \phi} - \ell I_{m+1,n} \frac{\cos(m+1)\phi \cos \phi}{\sin(m+1)\phi \sin \phi} \right\} \sin \phi \right. \\
& \left. - \left\{ I_{m-1,n} \frac{\sin(m-1)\phi \sin \phi}{-\cos(m-1)\phi \cos \phi} + \ell I_{m+1,n} \frac{\sin(m+1)\phi \sin \phi}{-\cos(m+1)\phi \cos \phi} \right\} \cos \phi \right]
\end{aligned} \tag{3.56}$$

上式の [] の中は,

$$\begin{aligned}
& -I_{m-1,n} \left(\frac{\cos(m-1)\phi \sin \phi}{\sin(m-1)\phi \cos \phi} + \frac{\sin(m-1)\phi \cos \phi}{-\cos(m-1)\phi \sin \phi} \right) \\
& - \ell I_{m+1,n} \left(-\frac{\cos(m+1)\phi \sin \phi}{\sin(m+1)\phi \cos \phi} + \frac{\sin(m+1)\phi \cos \phi}{-\cos(m+1)\phi \sin \phi} \right) \\
& = -I_{m-1,n} \frac{\sin m\phi}{-\cos m\phi} - \ell I_{m+1,n} \frac{\sin m\phi}{-\cos m\phi} \\
& = - \left(I_{m-1,n} + \ell I_{m+1,n} \right) \frac{\sin m\phi}{-\cos m\phi}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

したがって,

$$\bar{N}_x \cos \phi + \bar{N}_y \sin \phi = j^{m-1} A_{mn} \pi a \bar{\chi}_{mn} \left(I_{m-1,n} - \ell I_{m+1,n} \right) \frac{\cos m\phi}{\sin m\phi} \tag{3.58}$$

$$-\bar{N}_x \sin \phi + \bar{N}_y \cos \phi = -j^{m-1} A_{mn} \pi a \bar{\chi}_{mn} \left(I_{m-1,n} + \ell I_{m+1,n} \right) \frac{\sin m\phi}{-\cos m\phi} \tag{3.59}$$

上式の積分項を計算するため, ベッセル関数の不定積分公式

$$\begin{aligned}
& \int z J_\nu(\alpha z) J_\nu(\beta z) dz \\
& = \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \beta J_\nu(\alpha z) J'_\nu(\beta z) - \alpha J'_\nu(\alpha z) J_\nu(\beta z) \} \quad (\alpha \neq \beta)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

を次のように変形する。

$$\begin{aligned}
& \int \left\{ J_{\nu-1}(\alpha z) J_{\nu-1}(\beta z) \pm J_{\nu+1}(\alpha z) J_{\nu+1}(\beta z) \right\} z \, dz \\
&= \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ \beta J_{\nu-1}(\alpha z) J'_{\nu-1}(\beta z) - \alpha J'_{\nu-1}(\alpha z) J_{\nu-1}(\beta z) \right. \\
&\quad \left. \pm \beta J_{\nu+1}(\alpha z) J'_{\nu+1}(\beta z) \mp \alpha J'_{\nu+1}(\alpha z) J_{\nu+1}(\beta z) \right\} \\
&= \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\beta J_{\nu-1}(\alpha z) \left\{ \frac{\nu-1}{\beta z} J_{\nu-1}(\beta z) - J_{\nu}(\beta z) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \alpha \left\{ \frac{\nu-1}{\alpha z} J_{\nu-1}(\alpha z) - J_{\nu}(\alpha z) \right\} J_{\nu-1}(\beta z) \right. \\
&\quad \left. \pm \beta J_{\nu+1}(\alpha z) \left\{ J_{\nu}(\beta z) - \frac{\nu+1}{\beta z} J_{\nu+1}(\beta z) \right\} \right. \\
&\quad \left. \mp \alpha \left\{ J_{\nu}(\alpha z) - \frac{\nu+1}{\alpha z} J_{\nu+1}(\alpha z) \right\} J_{\nu+1}(\beta z) \right] \\
&= \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ -\beta J_{\nu-1}(\alpha z) J_{\nu}(\beta z) + \alpha J_{\nu}(\alpha z) J_{\nu-1}(\beta z) \right. \\
&\quad \left. \pm \beta J_{\nu+1}(\alpha z) J_{\nu}(\beta z) \mp \alpha J_{\nu}(\alpha z) J_{\nu+1}(\beta z) \right\} \\
&= \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\alpha J_{\nu}(\alpha z) \left\{ J_{\nu-1}(\beta z) \mp J_{\nu+1}(\beta z) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \beta \left\{ J_{\nu-1}(\alpha z) \mp J_{\nu+1}(\alpha z) \right\} J_{\nu}(\beta z) \right] \tag{3.61}
\end{aligned}$$

上側符号については,

$$\begin{aligned}
& \int \left\{ J_{\nu-1}(\alpha z) J_{\nu-1}(\beta z) + J_{\nu+1}(\alpha z) J_{\nu+1}(\beta z) \right\} z \, dz \\
&= \frac{2z}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ \alpha J_{\nu}(\alpha z) J'_{\nu}(\beta z) - \beta J'_{\nu}(\alpha z) J_{\nu}(\beta z) \right\} \tag{3.62}
\end{aligned}$$

一方, 下側符号については,

$$\begin{aligned}
& \int \left\{ J_{\nu-1}(\alpha z) J_{\nu-1}(\beta z) - J_{\nu+1}(\alpha z) J_{\nu+1}(\beta z) \right\} z \, dz \\
&= \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ \alpha J_{\nu}(\alpha z) \frac{2\nu}{\beta z} J_{\nu}(\beta z) - \beta \frac{2\nu}{\alpha z} J_{\nu}(\alpha z) J_{\nu}(\beta z) \right\} \\
&= \frac{2\nu}{\alpha\beta} J_{\nu}(\alpha z) J_{\nu}(\beta z) \tag{3.63}
\end{aligned}$$

したがって、定積分は、

$$\begin{aligned}
& I_{m-1,n} + I_{m+1,n} \\
&= \int_0^1 \left(J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) J_{m-1}(u\bar{\rho}) + J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) J_{m+1}(u\bar{\rho}) \right) \bar{\rho} d\bar{\rho} \\
&= \frac{2}{\bar{\chi}_{mn}^2 - u^2} \left[\bar{\rho} \left\{ \bar{\chi}_{mn} J_m(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) J'_m(u\bar{\rho}) - u J'_m(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) J_m(u\bar{\rho}) \right\} \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\bar{\chi}_{mn}^2 - u^2} \left\{ \bar{\chi}_{mn} J_m(\bar{\chi}_{mn}) J'_m(u) - u J'_m(\bar{\chi}_{mn}) J_m(u) \right\}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

また、

$$\begin{aligned}
& I_{m-1,n} - I_{m+1,n} \\
&= \int_0^1 \left(J_{m-1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) J_{m-1}(u\bar{\rho}) - J_{m+1}(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) J_{m+1}(u\bar{\rho}) \right) \bar{\rho} d\bar{\rho} \\
&= \frac{2m}{\bar{\chi}_{mn}u} \left[J_m(\bar{\chi}_{mn}\bar{\rho}) J_m(u\bar{\rho}) \right]_0^1 \\
&= \frac{2m}{\bar{\chi}_{mn}u} J_m(\bar{\chi}_{mn}) J_m(u)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

TE_{mn} モードのとき、 $\bar{\chi}_{mn} = \chi'_{mn}$, $J'_m(\chi'_{mn}) = 0$, $\ell = 1$ より、

$$\begin{aligned}
I_{m-1,n} - \ell I_{m+1,n} &= I_{m-1,n} - I_{m+1,n} \\
&= \frac{2m}{\chi'_{mn}u} J_m(\chi'_{mn}) J_m(u)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
I_{m-1,n} + \ell I_{m+1,n} &= I_{m-1,n} + I_{m+1,n} \\
&= \frac{2\chi'_{mn}}{\chi'^2_{mn} - u^2} J_m(\chi'_{mn}) J'_m(u)
\end{aligned} \tag{3.67}$$

これより、

$$\bar{N}_x^{\text{TE}} \cos \phi + \bar{N}_y^{\text{TE}} \sin \phi = j^{m-1} A_{[mn]} \pi a \frac{2m}{u} J_m(\chi'_{mn}) J_m(u) \frac{\cos m\phi}{\sin m\phi} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{N}_x^{\text{TE}} \sin \phi + \bar{N}_y^{\text{TE}} \cos \phi \\
&= -j^{m-1} A_{[mn]} \pi a \frac{2}{1 - \left(\frac{u}{\chi'_{mn}} \right)^2} J_m(\chi'_{mn}) J'_m(u) \frac{\sin m\phi}{-\cos m\phi}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

よって、

$$\mathbf{E}_{p[mn]} = \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi) \tag{3.70}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi) = & j^{m-1} A_{[mn]} \pi a J_m(\chi'_{mn}) \sqrt{Z_{[mn]}} \frac{1}{2} \\
 & \cdot \left[\left\{ 1 + \frac{\beta_{[mn]}}{k} \cos \theta + \Gamma \left(1 - \frac{\beta_{[mn]}}{k} \cos \theta \right) \right\} \right. \\
 & \cdot \frac{2m}{u} J_m(u) \frac{\cos}{\sin} m\phi \mathbf{a}_\theta \\
 & - \left\{ \cos \theta + \frac{\beta_{[mn]}}{k} + \Gamma \left(\cos \theta - \frac{\beta_{[mn]}}{k} \right) \right\} \\
 & \left. \frac{2J'_m(u)}{1 - \left(\frac{u}{\chi'_{mn}} \right)^2} \cdot \frac{\sin}{\cos} m\phi \mathbf{a}_\phi \right] \tag{3.71}
 \end{aligned}$$

3.4.1 TM モード

一方、 TM_{mn} モードのとき、 $\bar{\chi}_{mn} = \chi_{mn}$, $J_m(\chi_{mn}) = 0$, $\ell = -1$ より、

$$I_{m-1,n} - \ell I_{m+1,n} = I_{m-1,n} + I_{m+1,n} = -\frac{2u}{\chi_{mn}^2 - u^2} J'_m(\chi_{mn}) J_m(u) \tag{3.72}$$

$$I_{m-1,n} + \ell I_{m+1,n} = I_{m-1,n} - I_{m+1,n} = 0 \tag{3.73}$$

また、

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_x^{\text{TM}} \cos \phi + \bar{N}_y^{\text{TM}} \sin \phi \\
 = -j^{m-1} A_{(mn)} \pi a \chi_{mn} \frac{\frac{2u}{\chi_{mn}^2}}{1 - \left(\frac{u}{\chi_{mn}} \right)^2} J'_m(\chi_{mn}) J_m(u) \frac{\cos}{\sin} m\phi \tag{3.74}
 \end{aligned}$$

$$- \bar{N}_x^{\text{TM}} \sin \phi + \bar{N}_y^{\text{TM}} \cos \phi = 0 \tag{3.75}$$

よって、

$$\mathbf{E}_{p(mn)} = \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{F}_{(mn)}(\theta, \phi) \tag{3.76}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{(mn)}(\theta, \phi) = & -j^{m-1} A_{(mn)} \pi a J'_m(\chi_{mn}) \frac{\frac{2u}{\chi_{mn}^2}}{1 - \left(\frac{u}{\chi_{mn}} \right)^2} J_m(u) \frac{\cos}{\sin} m\phi \sqrt{Z_{(mn)}} \\
 & \cdot \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{k}{\beta_{(mn)}} \cos \theta + \Gamma \left(1 - \frac{k}{\beta_{(mn)}} \cos \theta \right) \right\} \mathbf{a}_\theta
 \end{aligned}$$

3.5 開口径が十分大きい場合

3.5.1 TE モード

低次のモードについて開口径が十分大きい場合, $\Gamma \simeq 0$, $\beta_{[mn]} \simeq k$ より,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{[mn]}(\theta, \phi) &\simeq j^{m-1} A_{[mn]} \pi a J_m(\chi'_{mn}) (1 + \cos \theta) \\ &\cdot \left[\frac{m}{u} J_m(u) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} m\phi \mathbf{a}_\theta - \frac{J'_m(u)}{1 - \left(\frac{u}{\chi'_{mn}}\right)^2} \begin{matrix} \sin \\ -\cos \end{matrix} m\phi \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (3.77)$$

$m = 1$ のとき (TE_{1n} モード),

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{[1n]}(\theta, \phi) &= A_{[1n]} \pi a J_1(\chi'_{1n}) (1 + \cos \theta) \\ &\cdot \left[\frac{J_1(u)}{u} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \phi \mathbf{a}_\theta - \frac{J'_1(u)}{1 - \left(\frac{u}{\chi'_{1n}}\right)^2} \begin{matrix} \sin \\ -\cos \end{matrix} \phi \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (3.78)$$

ここで,

$$\mathbf{a}_\theta = \cos \phi \mathbf{a}_\xi + \sin \phi \mathbf{a}_\eta \quad (3.79)$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\sin \phi \mathbf{a}_\xi + \cos \phi \mathbf{a}_\eta \quad (3.80)$$

これより, 上側符号については,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{[1n]}(\theta, \phi) &= A_{[1n]} \frac{\pi a J_1(\chi'_{1n})}{1 - \left(\frac{u}{\chi'_{1n}}\right)^2} \frac{1 + \cos \theta}{2} \left[\left\{ J_0(u) - \frac{u J_1(u)}{\chi'^2_{1n}} \right\} \mathbf{a}_\xi \right. \\ &+ \left\{ J_2(u) - \frac{u J_1(u)}{\chi'^2_{1n}} \right\} \cos 2\phi \mathbf{a}_\xi \\ &\left. + \left\{ J_2(u) - \frac{u J_1(u)}{\chi'^2_{1n}} \right\} \sin 2\phi \mathbf{a}_\eta \right] \end{aligned} \quad (3.81)$$

正面方向 $u = 0$ で有限値をとるのは第 1 項で, 電界の偏波方向は \mathbf{a}_ξ 方向である. そして, 第 2 項は主偏波の非対称性, 第 3 項は交差偏波成分を示している. また, 交差偏波成分ピーク値は 45° 面に生じることがわかる. このとき, 正面方向 ($\theta = 0$, $\phi = 0$) では,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{[1n]}(0, 0) &= A_{[1n]} \pi a J_1(\chi'_{1n}) \mathbf{a}_\xi \\ &= \sqrt{\frac{2}{\chi'^2_{1n} - 1}} \sqrt{\pi} a \operatorname{sign}(J_1(\chi'_{1n})) \mathbf{a}_\xi \end{aligned} \quad (3.82)$$

ここで,

$$A_{[1n]} = \sqrt{\frac{2}{\pi(\chi'^2_{1n} - 1)}} \frac{1}{|J_1(\chi'_{1n})|} \quad (3.83)$$

これより、正面方向のアンテナ利得は、

$$G_{[1n]} \Big|_{\theta=0} = 4\pi \frac{\pi a^2}{\lambda^2} \cdot \frac{2}{\chi_{1n}'^2 - 1} \quad (3.84)$$

下側符号について、電界の偏波は \mathbf{a}_η 方向であり、同様の式を求めることができる（導出省略）。

3.5.2 TM モード

低次のモードについて開口径が十分大きい場合、 $\Gamma \simeq 0$ 、 $\beta_{(mn)} \simeq k$ より、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{(mn)}(\theta, \phi) &\simeq -j^{m-1} A_{(mn)} \pi a J'_m(\chi_{mn}) (1 + \cos \theta) \\ &\cdot \frac{\frac{u}{\chi_{mn}} J_m(u) \cos m\phi}{1 - \left(\frac{u}{\chi_{mn}}\right)^2 \sin^2 \phi} \mathbf{a}_\theta \end{aligned} \quad (3.85)$$

$m = 1$ のとき (TM_{1n} モード)，

$$\bar{\mathbf{F}}_{(1n)}(\theta, \phi) = -A_{(1n)} \pi a J'_1(\chi_{1n}) (1 + \cos \theta) \frac{\frac{u}{\chi_{1n}} J_1(u)}{1 - \left(\frac{u}{\chi_{1n}}\right)^2} \cos \phi \mathbf{a}_\theta \quad (3.86)$$

ここで、

$$\mathbf{a}_\theta = \cos \phi \mathbf{a}_\xi + \sin \phi \mathbf{a}_\eta \quad (3.87)$$

3.6 多モード円形導波管開口からの放射

開口面での反射がなく ($\Gamma = 0$), 開口面分布が円形導波管の伝搬モード (TE_{mn} モードおよび TM_{mn} モード) の合成で与えられている場合を考える. いま, モード係数を $c_{[mn]}$, $c_{(mn)}$ とすると, 横断面内電界 \mathbf{E}_t および磁界 \mathbf{H}_t は,

$$\mathbf{E}_t = \sum_{m,n} c_{[mn]} \sqrt{Z_{[mn]}} \mathbf{e}_{[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \sqrt{Z_{(mn)}} \mathbf{e}_{(mn)} = \sum_i c_i \sqrt{Z_i} \mathbf{e}_i \quad (3.88)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_{m,n} c_{[mn]} \sqrt{Y_{[mn]}} \mathbf{h}_{[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \sqrt{Y_{(mn)}} \mathbf{h}_{(mn)} = \sum_i c_i \sqrt{Y_i} \mathbf{h}_i \quad (3.89)$$

ただし, モード係数 c_i は次のように規格化されているとする.

$$\begin{aligned} & \int_S (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) \cdot \mathbf{a}_z dS \\ & \equiv \int_S \left\{ \left(\sum_i c_i \sqrt{Z_i} \mathbf{e}_i \right) \times \left(\sum_j c_j^* \sqrt{Y_j} \mathbf{h}_j \right) \right\} \cdot \mathbf{a}_z dS \\ & = \int_S \left\{ \sum_i \sum_j c_i c_j^* \sqrt{Z_i} \sqrt{Y_j} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{h}_j) \cdot \mathbf{a}_z \right\} dS \\ & = \sum_i \sum_j c_i c_j^* \sqrt{Z_i} \sqrt{Y_j} \int_S \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j dS \\ & = \sum_i |c_i|^2 \equiv 1 \end{aligned} \quad (3.90)$$

つまり,

$$\sum_{m,n} |c_{[mn]}|^2 + \sum_{m,n} |c_{(mn)}|^2 = 1 \quad (3.91)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{[mn]}(\theta, \phi) &= j^{m-1} A_{[mn]} \pi a J_m(\chi'_{mn}) \sqrt{Z_{[mn]}} \\ & \cdot \left[\left\{ 1 + \frac{\beta_{[mn]}}{k} \cos \theta + \Gamma \left(1 - \frac{\beta_{[mn]}}{k} \cos \theta \right) \right\} \right. \\ & \cdot \frac{m}{u} J_m(u) \frac{\cos}{\sin} m\phi \mathbf{a}_\theta \\ & - \left\{ \cos \theta + \frac{\beta_{[mn]}}{k} + \Gamma \left(\cos \theta - \frac{\beta_{[mn]}}{k} \right) \right\} \\ & \cdot \left. \frac{J'_m(u)}{1 - \left(\frac{u}{\chi'_{mn}} \right)^2} \begin{bmatrix} \sin m\phi & \mathbf{a}_\phi \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (3.92)$$

また,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{(mn)}(\theta, \phi) &= -j^{m-1} A_{(mn)} \pi a J'_m(\chi_{mn}) \frac{\frac{u}{\chi_{mn}}}{1 - \left(\frac{u}{\chi_{mn}}\right)^2} J_m(u) \frac{\cos m\phi}{\sin m\phi} \\ &\cdot \sqrt{Z_{(mn)}} \left\{ 1 + \frac{k}{\beta_{(mn)}} \cos \theta + \Gamma \left(1 - \frac{k}{\beta_{(mn)}} \cos \theta \right) \right\} \mathbf{a}_\theta\end{aligned}\quad (3.93)$$

放射電界 \mathbf{E}_p は,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_p &= \sum_i c_i \mathbf{E}_{p,i} \\ &= \sum_{m,n} c_{[mn]} \mathbf{E}_{p[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \mathbf{E}_{p(mn)} \\ &= \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \left(\sum_{m,n} c_{[mn]} \mathbf{F}_{[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \mathbf{F}_{(mn)} \right)\end{aligned}\quad (3.94)$$

モードの放射電界は,

$$\mathbf{E}_{p,mn} = \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{F}_{mn}(\theta, \phi) \quad (3.95)$$

アンテナ利得は,

$$G(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{1}{Z_w} \left| \sum_{m,n} c_{[mn]} \mathbf{F}_{[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \mathbf{F}_{(mn)} \right|^2 \quad (3.96)$$

さらに, $\beta_{[mn]} \simeq k$, $\beta_{(mn)} \simeq k$ のとき,

$$\mathbf{E}_p \simeq \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \sqrt{Z_w} \left(\sum_{m,n} c_{[mn]} \bar{\mathbf{F}}_{[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \bar{\mathbf{F}}_{(mn)} \right) \quad (3.97)$$

$$G(\theta, \phi) \simeq \frac{4\pi}{\lambda^2} \left| \sum_{m,n} c_{[mn]} \bar{\mathbf{F}}_{[mn]} + \sum_{m,n} c_{(mn)} \bar{\mathbf{F}}_{(mn)} \right|^2 \quad (3.98)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}_{[mn]}(\theta, \phi) &\simeq j^{m-1} A_{[mn]} \pi a J_m(\chi'_{mn}) (1 + \cos \theta) \\ &\cdot \left[\frac{m}{u} J_m(u) \frac{\cos m\phi}{\sin m\phi} \mathbf{a}_\theta - \frac{J'_m(u)}{1 - \left(\frac{u}{\chi'_{mn}}\right)^2} \frac{\sin m\phi}{-\cos m\phi} \mathbf{a}_\phi \right]\end{aligned}\quad (3.99)$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}_{(mn)}(\theta, \phi) &\simeq -j^{m-1} A_{(mn)} \pi a J'_m(\chi_{mn}) (1 + \cos \theta) \\ &\cdot \frac{\frac{u}{\chi_{mn}} J_m(u)}{1 - \left(\frac{u}{\chi_{mn}}\right)^2} \frac{\cos m\phi}{\sin m\phi} \mathbf{a}_\theta\end{aligned}\quad (3.100)$$

CHAPTER 4

開口面アンテナの設計・解析

アンテナ工学における開口面アンテナの設計と解析について説明する。まず、多重二次曲面鏡系の等価パラボラ表現を詳細に導出し、複数の反射鏡を持つアンテナの光学特性を統一的に扱う方法を示す。さらに、位相誤差がある場合の平均放射パターンの導出を通じて、鏡面の歪みがアンテナの利得に及ぼす影響を定量化し、カセグレンアンテナの最適開口面分布や鏡面修整法についても幾何光学の原理に基づいた設計アプローチを示していく。そして、高効率で低サイドローブのアンテナを実現するための理論的基盤と設計手法を明らかにする。

4.1 多重2次曲面鏡系の等価パラボラ表示

4.1.1 回転放物面鏡と開口面との関係

回転放物面鏡の焦点を頂点とする円すいに沿う光線は反射され平行光線となる。図のように、回転軸に平行な円筒に沿う焦点を F_m 、焦点距離を f_m 、回転軸に沿う単位ベクトルを \mathbf{k}_m 、点 F_m を頂点とする円すいの中心軸に沿う単位ベクトルを \mathbf{v}_m 、円すいの半頂角を θ_m とする。

4.1.2 回転放物面鏡

焦点を原点として図に示すように、円すいの中心を Z 軸とする (X, Y, Z) 座標系を考えると、半頂角 θ_m の円すいの方程式は、

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \tan^2 \theta_m \quad (4.1)$$

一方、回転放物面の回転軸を z 軸、焦点を原点とする (x, y, z) 座標系を定義すると、焦点距

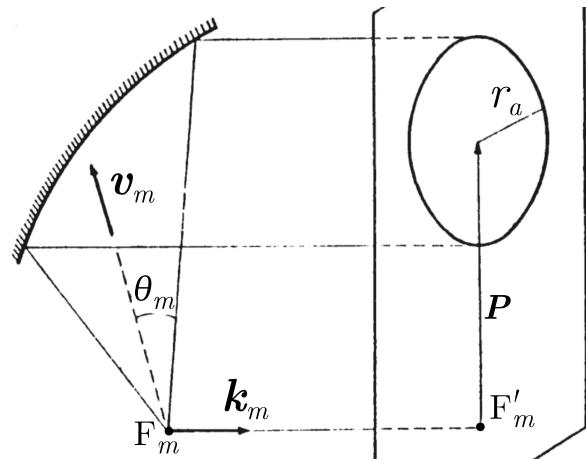


図 4.1. 回転放物面鏡と開口面

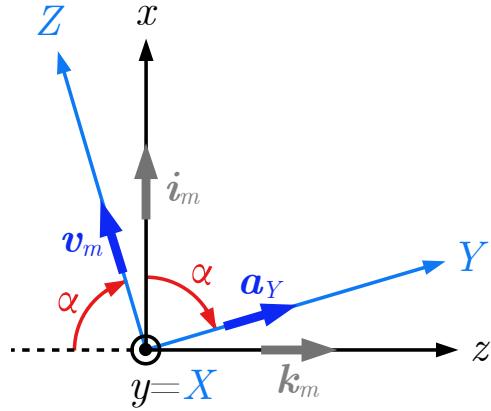


図 4.2. 2つの座標系 (X, Y, Z) , (x, y, z)

離 f_m の回転放物面の方程式は,

$$x^2 + y^2 = 4f_m(z + f_m) \quad (4.2)$$

ここで, オフセット角を α として, 図のような Z 軸と z 軸のなす角度を基に座標系の関係を考える. まず, 単位ベクトルでは,

$$\mathbf{v}_m = -\cos \alpha \mathbf{k}_m + \sin \alpha \mathbf{i}_m \quad (4.3)$$

$$\mathbf{a}_Y = \sin \alpha \mathbf{k}_m + \cos \alpha \mathbf{i}_m \quad (4.4)$$

これより, 任意の点の位置ベクトル \mathbf{A} を直交する単位ベクトルを用いて表すと,

$$\mathbf{A} = Y \mathbf{a}_Y + Z \mathbf{v}_m = z \mathbf{k}_m + x \mathbf{i}_m \quad (4.5)$$

両辺に単位ベクトルのスカラー積をとって,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_Y &= (Y\mathbf{a}_Y + Z\mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{a}_Y = Y \\ &= (z\mathbf{k}_m + x\mathbf{i}_m) \cdot \mathbf{a}_Y = z \sin \alpha + x \cos \alpha\end{aligned}\tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_m &= (Y\mathbf{a}_Y + Z\mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{v}_m = Z \\ &= (z\mathbf{k}_m + x\mathbf{i}_m) \cdot \mathbf{v}_m = -z \cos \alpha + x \sin \alpha\end{aligned}\tag{4.7}$$

両座標系の関係をまとめると,

$$X = y \tag{4.8}$$

$$Y = x \cos \alpha + z \sin \alpha \tag{4.9}$$

$$Z = x \sin \alpha - z \cos \alpha \tag{4.10}$$

上の関係式を, 式 (4.1) に代入すると,

$$y^2 + (x \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 = (x \sin \alpha - z \cos \alpha)^2 \tan^2 \theta_m \tag{4.11}$$

これを整理して,

$$\begin{aligned}y^2 + (1 - \sin^2 \alpha \sec^2 \theta_m) x^2 + (1 - \cos^2 \alpha \sec^2 \theta_m) z^2 \\ + 2xz \sin \alpha \cos \alpha \sec^2 \theta_m = 0\end{aligned}\tag{4.12}$$

上式と式 (4.2) より, y^2 を消去すると,

$$\begin{aligned}-x^2 + 4f_m(z + f_m) + (1 - \sin^2 \alpha \sec^2 \theta_m)x^2 \\ + (1 - \cos^2 \alpha \sec^2 \theta_m)z^2 + 2xz \sin \alpha \cos \alpha \sec^2 \theta_m = 0\end{aligned}\tag{4.13}$$

これは, z に関して因数分解でき,

$$\begin{aligned}\left\{ (1 + \cos \alpha \sec \theta_m)z + (2f_m - \sin \alpha \sec \theta_m x) \right\} \\ \cdot \left\{ (1 - \cos \alpha \sec \theta_m)z + (2f_m + \sin \alpha \sec \theta_m x) \right\} = 0\end{aligned}\tag{4.14}$$

よって,

$$z = \frac{-2f_m \pm \sin \alpha \sec \theta_m x}{1 \pm \cos \alpha \sec \theta_m} \tag{4.15}$$

上式を式 (4.2) に代入すると,

$$x^2 + y^2 = 4f_m \left(\frac{-2f_m \pm \sin \alpha \sec \theta_m x}{1 \pm \cos \alpha \sec \theta_m} + f_m \right) \tag{4.16}$$

整理すると, 次のように円の方程式が得られる.

$$\left(x \mp \frac{2f_m \sin \alpha}{\cos \theta_m \pm \cos \alpha} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2f_m \sin \theta_m}{\cos \theta_m \pm \cos \alpha} \right)^2 \tag{4.17}$$

円の中心 (x_0, y_0) ならびに円の半径 r_a は,

$$(x_0, y_0) = \left(\pm \frac{2f_m \sin \alpha}{\cos \theta_m \pm \cos \alpha}, 0 \right) \quad (4.18)$$

$$r_a = \frac{2f_m \sin \theta_m}{\cos \theta_0 \pm \cos \alpha} \quad (4.19)$$

いま, $\theta_m = 0$ のとき,

$$(x_0, y_0) = \left(\pm \frac{2f_m \sin \alpha}{1 \pm \cos \alpha}, 0 \right) \quad (4.20)$$

$$r_a = 0 \quad (4.21)$$

となり, 上側符号は円すいの $Z > 0$ に対応し, 下側符号は円すいの $Z < 0$ に対応することがわかる. したがって, 通常, 上側符号をとって, 円の方程式は次のようになる.

$$\left(x - \frac{2f_m \sin \alpha}{\cos \theta_m + \cos \alpha} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2f_m \sin \theta_0}{\cos \theta_m + \cos \alpha} \right)^2 \quad (4.22)$$

円すいの中心軸方向の単位ベクトルを \mathbf{v}_m とおくと, $\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{k}_m = -\cos \alpha$ より, 円の半径 r_a , 円の中心 (x_0, y_0) は,

$$r_a = \frac{2f_m \sin \theta_m}{\cos \theta_m + \cos \alpha} = 2f_m \frac{\sin \theta_m}{\cos \theta_m - (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{k}_m)} \quad (4.23)$$

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{2f_m \sin \alpha}{\cos \theta_m + \cos \alpha}, 0 \right) \quad (4.24)$$

いま, 焦点を含む面を開口面にとり, その面上での円形開口面の中心の位置ベクトル \mathbf{P} は, $\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{i}_m = \sin \alpha$ より (\mathbf{i}_m は x 方向の単位ベクトル),

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= x_0 \mathbf{i}_m \\ &= \frac{2f_m \sin \alpha \mathbf{i}_m}{\cos \theta_m + \cos \alpha} \\ &= 2f_m \frac{(\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{i}_m) \mathbf{i}_m}{\cos \theta_m - (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{k}_m)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

ここで, $\mathbf{v}_m = (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{i}_m) \mathbf{i}_m + (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{k}_m) \mathbf{k}_m$ より,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= x_0 \mathbf{i}_m \\ &= 2f_m \frac{\mathbf{v}_m - (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{k}_m) \mathbf{k}_m}{\cos \theta_m - (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{k}_m)} \end{aligned} \quad (4.26)$$

逆に, 回転軸に平行な円筒に沿って光線が入射したとき, 反射光線は焦点を頂点とする円すいに沿うことになる. なお, 極形式では, 焦点から回転放物面までの方向に沿う単位ベクトルを \mathbf{a}_r とおくと, 距離 r は (導出省略),

$$r = \frac{2f_m}{1 - \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{k}_m} \quad (4.27)$$

4.1.3 だ円と双曲線の離心率

図に示すようにだ円および双曲線の長軸の長さ $A'A$ を $2a$, 中心 C から焦点 F または F' までの距離を c とすると, 離心率 e は,

$$e = \frac{c}{a} \quad (4.28)$$

離心率 e はだ円面のとき $e < 1$, 双曲線のとき $e > 1$ ゆえ,

$$p = \text{sign}(e^2 - 1) = \begin{cases} 1 & (\text{双曲線}) \\ -1 & (\text{だ円}) \end{cases} \quad (4.29)$$

で区別できる. さらに,

$$\delta = \begin{cases} 1 & (\text{凹面}) \\ -1 & (\text{凸面}) \end{cases} \quad (4.30)$$

4.1.4 だ円と双曲線

焦点 F_1 から回転だ円面 (凹面) までの距離を $|R_1|$, の点からもう一方の焦点 F_2 までの距離を $|R_2|$, 焦点間の距離を $L (= 2c)$ とすると,

$$L\mathbf{k}_1 = |R_1|\mathbf{a}_1 - |R_2|\mathbf{a}_2 \quad (4.31)$$

ただし, \mathbf{k}_1 は焦点 F_1 から焦点 F_2 に向かう単位ベクトル, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は焦点 F_1, F_2 からだ円面上の点に向かう単位ベクトルを各々示す.

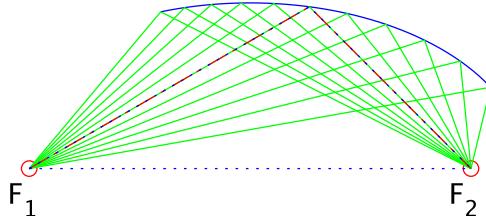


図 4.3. 2つの座標系 (X, Y, Z) , (x, y, z)

光線の進む方向に沿った単位ベクトル $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2$ を考えると, $\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1, \bar{\mathbf{a}}_2 = -\mathbf{a}_2$ より,

$$\begin{aligned} L\mathbf{k}_1 &= |R_1|\bar{\mathbf{a}}_1 - |R_2|(-\bar{\mathbf{a}}_2) \\ &\equiv \bar{R}_1\bar{\mathbf{a}}_1 - \bar{R}_2\bar{\mathbf{a}}_2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

ここで, \bar{R}_1, \bar{R}_2 は光線の進む方向に沿った単位ベクトルの振幅として新たに定義したものです,

$$\bar{R}_1 = |R_1| \quad (4.33)$$

$$\bar{R}_2 = -|R_2| \quad (4.34)$$

これより、離心率 e 、曲面定数 a は、

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} \\ &= \frac{L}{|R_2| + |R_1|} \\ &= \frac{L}{-\bar{R}_2 + \bar{R}_1} = -\frac{L}{\bar{R}_2 - \bar{R}_1} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$a = -(\bar{R}_2 - \bar{R}_1) \quad (4.36)$$

このとき、 $p\delta$ は、

$$p\delta = -1 \cdot 1 = -1 \quad (4.37)$$

4.1.5 楕円面、凸面のとき

また、だ円面の凸面を鏡面とする場合、 $\bar{a}_1 = -a_1$ 、 $\bar{a}_2 = a_2$ の関係となり、

$$\begin{aligned} Lk_1 &= |R_1|(-\bar{a}_1) - |R_2|\bar{a}_2 \\ &\equiv \bar{R}_1\bar{a}_1 - \bar{R}_2\bar{a}_2 \end{aligned} \quad (4.38)$$

光線の進む方向に沿った単位ベクトルの振幅は、

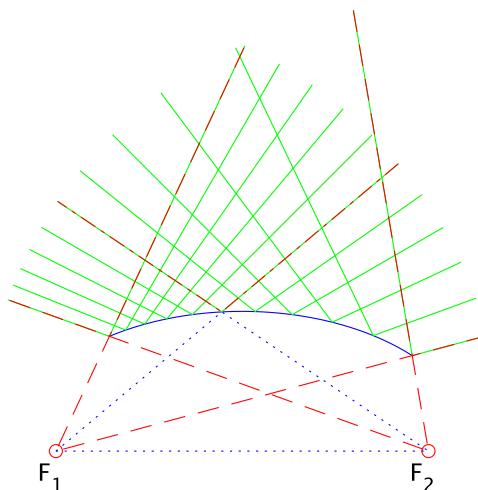


図 4.4. だ円面 ($p = -1$) の凸面 ($\delta = -1$) を鏡面とする場合

$$\bar{R}_1 = -|R_1| \quad (4.39)$$

$$\bar{R}_2 = |R_2| \quad (4.40)$$

これより、離心率 e 、曲面定数 a は、

$$\begin{aligned} e &= \frac{2c}{2a} \\ &= \frac{L}{|R_2| + |R_1|} \\ &= \frac{L}{\bar{R}_2 - \bar{R}_1} \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$a = \bar{R}_2 - \bar{R}_1 \tag{4.42}$$

このとき、 $p\delta$ は、

$$p\delta = -1 \cdot (-1) = 1 \tag{4.43}$$

4.1.6 双曲面、凹面、発散系のとき

焦点 F_1 から双曲面（凹面、発散系）までの距離を $|R_1|$ 、その鏡面上の点からもう一方の焦点 F_2 までの距離を $|R_2|$ 、焦点間の距離 $L = 2c$ とすると、

$$L\mathbf{k}_1 = |R_1|\mathbf{a}_1 - |R_2|\mathbf{a}_2 \tag{4.44}$$

ただし、 \mathbf{k}_1 は焦点 F_n から焦点 F_2 に向かう単位ベクトル、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は焦点 F_1, F_2 から双曲面上の点に向かう単位ベクトルを各々示す。光線の進む方向に沿った単位ベクトル $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2$

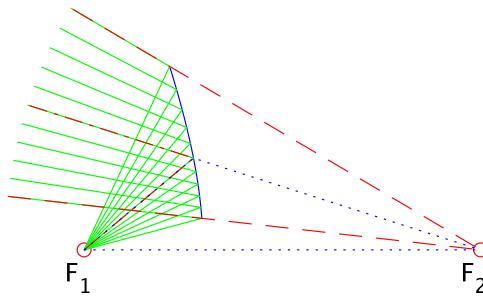


図 4.5. 双曲面 ($p = 1$)、凹面 ($\delta = 1$)、発散系

を考えると、 $\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1, \bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_2$ より、

$$\begin{aligned} L\mathbf{k}_1 &= |R_1|\bar{\mathbf{a}}_1 - |R_2|\bar{\mathbf{a}}_2 \\ &\equiv \bar{R}_1\bar{\mathbf{a}}_1 - \bar{R}_2\bar{\mathbf{a}}_2 \end{aligned} \tag{4.45}$$

ここで、

$$\bar{R}_1 = |R_1| \tag{4.46}$$

$$\bar{R}_2 = |R_2| \tag{4.47}$$

これより、離心率 e 、曲面定数 a は、

$$\begin{aligned} e &= \frac{2c}{2a} \\ &= \frac{L}{|R_2| - |R_1|} \\ &= \frac{L}{\bar{R}_2 - \bar{R}_1} \end{aligned} \tag{4.48}$$

$$a = \bar{R}_2 - \bar{R}_1 \tag{4.49}$$

このとき、 $p\delta$ は、

$$p\delta = 1 \cdot 1 = 1 \tag{4.50}$$

4.1.7 双曲面、凹面、集束系のとき

光線の進む方向に沿った単位ベクトルは $\bar{\mathbf{a}}_1 = -\mathbf{a}_1$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = -\mathbf{a}_2$ の関係となり、

$$\begin{aligned} L\mathbf{k}_1 &= |R_1|(-\bar{\mathbf{a}}_1) - |R_2|(-\bar{\mathbf{a}}_2) \\ &\equiv \bar{R}_1\bar{\mathbf{a}}_1 - \bar{R}_2\bar{\mathbf{a}}_2 \end{aligned} \tag{4.51}$$

ここで、光線の進む方向に沿った単位ベクトルの振幅は、

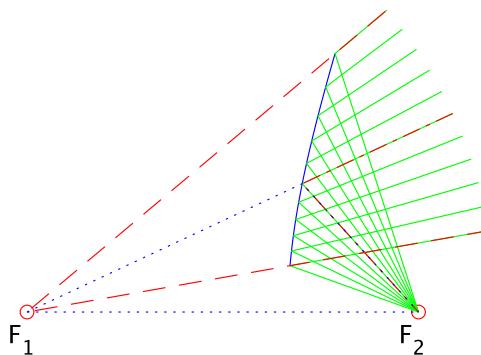


図 4.6. 双曲面 ($p = 1$), 凹面 ($\delta = 1$), 集束系

$$\bar{R}_1 = -|R_1| \tag{4.52}$$

$$\bar{R}_2 = -|R_2| \tag{4.53}$$

これより、離心率 e 、曲面定数 a は、

$$\begin{aligned} e &= \frac{2c}{2a} \\ &= \frac{L}{|R_1| - |R_2|} \\ &= \frac{L}{-\bar{R}_1 + \bar{R}_2} \\ &= \frac{L}{\bar{R}_2 - \bar{R}_1} \end{aligned} \tag{4.54}$$

$$a = \bar{R}_2 - \bar{R}_1 \tag{4.55}$$

このとき、 $p\delta$ は、

$$p\delta = 1 \cdot 1 = 1 \tag{4.56}$$

4.1.8 双曲面、凸面、発散系のとき

双曲面の凸面（発散系）を鏡面とする場合、光線の進む方向に沿った単位ベクトルは、
 $\bar{a}_1 = a_1, \bar{a}_2 = a_2$ 。よって、

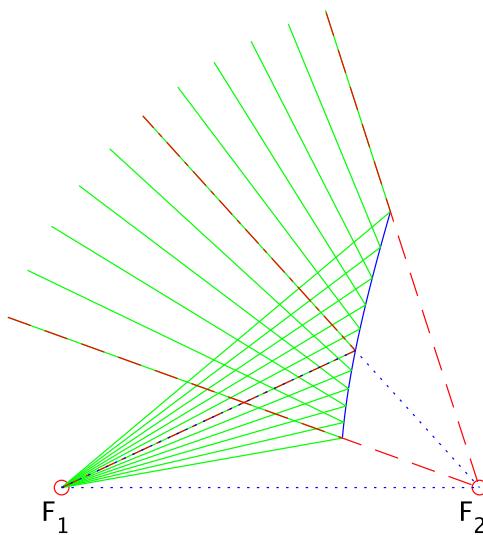


図 4.7. 双曲面 ($p = 1$)、凸面 ($\delta = -1$)、発散系

$$\begin{aligned} Lk_1 &= |R_1|\bar{a}_1 - |R_2|\bar{a}_2 \\ &\equiv \bar{R}_1\bar{a}_1 - \bar{R}_2\bar{a}_2 \end{aligned} \tag{4.57}$$

ここで、光線の進む方向に沿った単位ベクトルの振幅は、

$$\bar{R}_1 = |R_1| \tag{4.58}$$

$$\bar{R}_2 = |R_2| \tag{4.59}$$

これより、離心率 e 、曲面定数 a は、

$$\begin{aligned} e &= \frac{2c}{2a} \\ &= \frac{L}{|R_1| - |R_2|} \\ &= \frac{L}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \\ &= -\frac{L}{\bar{R}_2 - \bar{R}_1} \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$a = -(\bar{R}_2 - \bar{R}_1) \tag{4.61}$$

このとき、 $p\delta$ は、

$$p\delta = 1 \cdot (-1) = -1 \tag{4.62}$$

4.1.9 双曲面、凸面、集束系のとき

双曲面の凸面（集束系）を鏡面とする場合、光線の進む方向に沿った単位ベクトルは、
 $\bar{a}_1 = -a_1, \bar{a}_2 = -a_2$ の関係となり、

$$\begin{aligned} Lk_1 &= |R_1|(-\bar{a}_1) - |R_2|(-\bar{a}_2) \\ &\equiv \bar{R}_1\bar{a}_1 - \bar{R}_2\bar{a}_2 \end{aligned} \tag{4.63}$$

ここで、光線の進む方向に沿った単位ベクトルの振幅は、

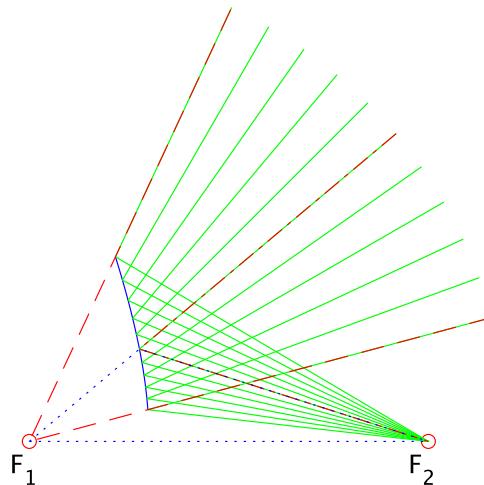


図 4.8. 双曲面 ($p = 1$)、凸面 ($\delta = -1$)、集束系

$$\bar{R}_1 = -|R_1| \tag{4.64}$$

$$\bar{R}_2 = -|R_2| \tag{4.65}$$

これより、離心率 e 、曲面定数 a は、

$$\begin{aligned} e &= \frac{2c}{2a} \\ &= \frac{L}{-|R_1| + |R_2|} \\ &= \frac{L}{\bar{R}_1 - \bar{R}_2} \\ &= -\frac{L}{\bar{R}_2 - \bar{R}_1} \end{aligned} \tag{4.66}$$

$$a = -(\bar{R}_2 - \bar{R}_1) \tag{4.67}$$

このとき、 $p\delta$ は、

$$p\delta = 1 \cdot (-1) = -1 \tag{4.68}$$

4.1.10 離心率

種類の異なる鏡面系を統一的に計算するために、離心率 \bar{e} を次式で定義する。

$$\bar{e} \equiv \frac{L}{\bar{R}_2 - \bar{R}_1} = p\delta e \tag{4.69}$$

また、

$$a = p\delta(\bar{R}_2 - \bar{R}_1) \tag{4.70}$$

ここで、

$$p = \text{sign}(\bar{e}^2 - 1) = \begin{cases} 1 & (\text{回転双曲面}) \\ -1 & (\text{回転だ円面}) \end{cases} \tag{4.71}$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & (\text{凹面}) \\ -1 & (\text{凸面}) \end{cases} \tag{4.72}$$

4.1.11 だ円および双曲線の関係式

焦点 F_n から鏡面上の点 P までの距離が $|R_n|$ のとき、光線の進む方向に焦点がある場合 $\bar{R}_n \equiv -|R_n|$ 、逆の場合 $\bar{R}_n \equiv |R_n|$ として、

$$\begin{aligned} \bar{R}_n &= \frac{p\delta a(\bar{e}^2 - 1)}{1 + \bar{e} \cos \vartheta} \\ &= \frac{p\delta a(\bar{e}^2 - 1)}{1 + \bar{e}(\bar{a}_n \cdot \mathbf{k}_n)} \end{aligned} \tag{4.73}$$

ただし, $\bar{\mathbf{a}}_n$ は点 P に入射する光線の進む方向に沿う単位ベクトル, \mathbf{k}_n はこの焦点 F_n からもう一方の焦点 F_{n+1} への方向に沿う単位ベクトルを示す. ここで,

$$\bar{R}_{n+1}\bar{\mathbf{a}}_{n+1} = \bar{R}_n\bar{\mathbf{a}}_n - L\mathbf{k}_n \quad (4.74)$$

光線の進む方向に焦点 F_{n+1} がある場合 $q_{n+1} = -1$, 逆の場合 $q_{n+1} = 1$ として,

$$\bar{R}_{n+1} = q_{n+1}\sqrt{\bar{R}_n^2 - 2\bar{R}_nL(\bar{\mathbf{a}}_n \cdot \mathbf{k}_n) + L^2} \quad (4.75)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{n+1} = \frac{\bar{R}_n\bar{\mathbf{a}}_n - L\mathbf{k}_n}{\bar{R}_{n+1}} \quad (4.76)$$

4.1.12 回転 2 次曲面鏡系の入射光線と反射光線

符号を考慮した離心率 \bar{e} の式 (4.69) を変形して,

$$R_{n+1} = R_n + \frac{L}{\bar{e}} \quad (4.77)$$

光線に沿う単位ベクトルを $\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ とおくと,

$$L\mathbf{k}_n = R_n\boldsymbol{\alpha}_n - R_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \quad (4.78)$$

上の 2 式より R_{n+1} を消去すると,

$$\begin{aligned} R_n\boldsymbol{\alpha}_n &= R_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + L\mathbf{k}_n \\ &= \left(R_n + \frac{L}{\bar{e}}\right)\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + L\mathbf{k}_n \\ &= R_n\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \frac{L}{\bar{e}}\left(\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \bar{e}\mathbf{k}_n\right) \\ &= R_n\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \frac{L}{\bar{e}}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.79)$$

ここで,

$$\mathbf{x} \equiv \boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \bar{e}\mathbf{k}_n \quad (4.80)$$

これより,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_n &= \boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \frac{L}{R_n\bar{e}}\mathbf{x} \\ 1 &= \left(\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \frac{L}{R_n\bar{e}}\mathbf{x}\right)^2 = 1 + 2\frac{L}{R_n\bar{e}}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot \mathbf{x}) + \left(\frac{L}{R_n\bar{e}}\right)^2\mathbf{x}^2 \\ \therefore 0 &= 2(\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot \mathbf{x}) + \frac{L}{R_n\bar{e}}\mathbf{x}^2 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
R_n &= -\frac{L}{2\bar{e}} \cdot \frac{\mathbf{x}^2}{(\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot \mathbf{x})} \\
&= -\frac{L}{2\bar{e}} \cdot \frac{(\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \bar{e}\mathbf{k}_n)^2}{\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \bar{e}\mathbf{k}_n)} \\
&= -\frac{L}{2\bar{e}} \cdot \frac{\bar{e}^2 + 1 + 2\bar{e}(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1})}{1 + \bar{e}(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1})}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

また,

$$\begin{aligned}
R_{n+1} &= R_n + \frac{L}{\bar{e}} \\
&= -\frac{L}{2\bar{e}} \cdot \frac{\bar{e}^2 + 1 + 2\bar{e}(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1})}{1 + \bar{e}(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1})} + \frac{L}{\bar{e}} \\
&= -\frac{L}{2\bar{e}} \cdot \frac{\bar{e}^2 + 1 + 2\bar{e}(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) - 2 - 2\bar{e}(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1})}{1 + \bar{e}(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1})} \\
&= -\frac{L}{2\bar{e}} \cdot \frac{\bar{e}^2 - 1}{1 + \bar{e}(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1})}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

いま、入射光線群 ($\boldsymbol{\alpha}_n$ に沿う光線) によってできる円すいを考え、の中心軸に沿う単位ベクトルを \mathbf{v}_n とすると、

$$\boldsymbol{\alpha}_n \cdot \mathbf{v}_n = \cos \theta_n \quad (\text{一定}) \tag{4.83}$$

ただし、 θ_n は円すいの半頂角を示す。一方、これら入射光線群が鏡面で反射した後、反射光線群 ($\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ に沿う光線) によって円すいができる、その中心軸に沿う単位ベクトルを \mathbf{v}_{n+1} とすると、

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot \mathbf{v}_{n+1} = \cos \theta_{n+1} \quad (\text{一定}) \tag{4.84}$$

まず、式 (4.79) の両辺に \mathbf{v}_n のスカラ積をとると、

$$R_n \left\{ \cos \theta_n - (\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot \mathbf{v}_n) \right\} = \frac{L}{\bar{e}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_n) \tag{4.85}$$

上式に式 (4.81) を代入して R_n を消去し、さらに、式 (4.80) を代入して \mathbf{x} も消去すると、

$$\begin{aligned}
&- \frac{L}{2\bar{e}} \cdot \frac{\bar{e}^2 + 1 + 2\bar{e}(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1})}{1 + \bar{e}(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1})} \left\{ \cos \theta_n - (\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot \mathbf{v}_n) \right\} \\
&= \frac{L}{\bar{e}} (\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \bar{e}\mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{v}_n
\end{aligned} \tag{4.86}$$

両辺に $-\frac{2\bar{e}}{L} \{1 + \bar{e}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{a}_{r2})\}$ を乗じて、

$$\begin{aligned}
&\left\{ \bar{e}^2 + 1 + 2\bar{e}(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) \right\} \left\{ \cos \theta_n - (\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot \mathbf{v}_n) \right\} \\
&= -2 \left\{ 1 + \bar{e}(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) \right\} (\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \bar{e}\mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{v}_n
\end{aligned} \tag{4.87}$$

単位ベクトル \mathbf{a}_{r2} に関して整理すると,

$$\begin{aligned} & \left\{ (\bar{e}^2 - 1) \mathbf{v}_n - 2\bar{e}^2 \mathbf{k}_n (\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{v}_n) - 2\bar{e} \mathbf{k}_n \cos \theta_n \right\} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \\ &= 2\bar{e} (\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{v}_n) + (\bar{e}^2 + 1) \cos \theta_n \end{aligned} \quad (4.88)$$

上式の両辺に $\frac{1}{\bar{e}^2 - 1}$ を乗じて,

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{v}_n - \frac{2\bar{e}^2}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n (\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{v}_n) - \frac{2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n \cos \theta_n \right\} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \\ &= \frac{2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} (\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{v}_n) + \frac{\bar{e}^2 + 1}{\bar{e}^2 - 1} \cos \theta_n \end{aligned} \quad (4.89)$$

ここで,

$$\mathbf{K}_{n+1} \equiv \mathbf{v}_n - \frac{2\bar{e}^2}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n (\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{v}_n) - \frac{2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n \cos \theta_n \quad (4.90)$$

とおくと (\mathbf{K}_{n+1} は定ベクトル),

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot \mathbf{K}_{n+1} = \frac{2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} (\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{v}_n) + \frac{\bar{e}^2 + 1}{\bar{e}^2 - 1} \cos \theta_n \quad (4.91)$$

ここでは, $\boldsymbol{\alpha}_n \cdot \mathbf{v}_n = \cos \theta_n$ (一定) より, 定ベクトル \mathbf{v}_n (単位ベクトル) とスカラ積をとつて一定値となるから, 単位ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_n$ は円すいに沿う入射光線群である. 鏡面で反射した光線群も円すいに沿う単位ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ であり, これとスカラ積をとつて一定値となる式 (4.91) より, \mathbf{K}_{n+1} は円すいの中心軸に沿う方向である. そこで, $\mathbf{K}_{n+1} \equiv C \mathbf{v}_{n+1}$ とおくと, 円すいの中心軸方向の単位ベクトル \mathbf{v}_{n+1} は,

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{\mathbf{K}_{n+1}}{C} = \frac{1}{C} \left\{ \mathbf{v}_n - \frac{2\bar{e}^2}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n (\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{v}_n) - \frac{2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n \cos \theta_n \right\} \quad (4.92)$$

いま, $\theta_n = 0$ として, 中心軸のみで入射光線, 反射光線を考えると,

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{R_n}{R_{n+1}} \mathbf{v}_n - \frac{L}{R_{n+1}} \mathbf{k}_n \quad (4.93)$$

上式を式 (4.92) と比較すると次の関係が得られる.

$$\text{sign}(C) = \text{sign} \left(\frac{R_n}{R_{n+1}} \right) = p \quad (4.94)$$

これより,

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{p}{|C|} \left\{ \left(\bar{\mathbf{I}} - \frac{2\bar{e}^2}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n \mathbf{k}_n \right) \cdot \mathbf{v}_n + \left(\frac{-2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n \right) \cos \theta_n \right\} \quad (4.95)$$

ただし, $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ は恒等ダイディクスを示す.

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}} = \mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k} \quad (4.96)$$

ここで,

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}_n \equiv p \left(\bar{\bar{\mathbf{I}}} - \frac{2\bar{e}^2}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n \mathbf{k}_n \right) \quad (4.97)$$

$$\mathbf{b}_n \equiv p \frac{-2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n \quad (4.98)$$

$$z_n \equiv |C| \quad (4.99)$$

とおくと, 単位ベクトル \mathbf{v}_{n+1} は,

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{1}{z_n} \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}_n \cdot \mathbf{v}_n + \mathbf{b}_n \cos \theta_n \right) \quad (4.100)$$

式 (4.91) より,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot \mathbf{v}_{n+1} &= \cos \theta_{n+1} \\ &= \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot \frac{\mathbf{K}_{n+1}}{C} \\ &= \frac{p}{|C|} \left\{ \left(\frac{2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n \right) \cdot \mathbf{v}_n + \left(\frac{\bar{e}^2 + 1}{\bar{e}^2 - 1} \right) \cos \theta_n \right\} \end{aligned} \quad (4.101)$$

ここで,

$$\mathbf{a}_n \equiv p \frac{2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n = -\mathbf{b}_n \quad (4.102)$$

$$b_n \equiv p \frac{\bar{e}^2 + 1}{\bar{e}^2 - 1} \quad (4.103)$$

$$z_n = |C| \quad (4.104)$$

とおくと, $\cos \theta_{n+1}$ は,

$$\cos \theta_{n+1} = \frac{1}{z_n} (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v}_n + b_n \cos \theta_n) \quad (4.105)$$

行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{n+1} \\ \cos \theta_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{z_n} \begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathbf{A}}}_n & \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n \\ \cos \theta_n \end{pmatrix} \quad (4.106)$$

このとき, 次のような関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} b_n^2 &= \left(p \frac{\bar{e}^2 + 1}{\bar{e}^2 - 1} \right)^2 \\ &= \frac{(\bar{e}^2 + 1)^2}{(\bar{e}^2 - 1)^2} \end{aligned} \quad (4.107)$$

これより,

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_n^2 &= \mathbf{b}_n \cdot \mathbf{b}_n \\
&= \left(p \frac{-2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n \right) \cdot \left(p \frac{-2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{k}_n \right) \\
&= \frac{4\bar{e}^4}{(\bar{e}^2 - 1)^2} \\
&= \frac{(\bar{e}^2 + 1)^2 - (\bar{e}^2 - 1)^2}{(\bar{e}^2 - 1)^2} \\
&= \frac{(\bar{e}^2 + 1)^2}{(\bar{e}^2 - 1)^2} - 1 \\
&= b_n^2 - 1
\end{aligned} \tag{4.108}$$

また,

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\mathbf{A}}}_n &= p \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \bar{e} \mathbf{b}_n \mathbf{k}_n \\
&= p \bar{\bar{\mathbf{I}}} - \bar{e} \mathbf{a}_n \mathbf{k}_n
\end{aligned} \tag{4.109}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_n \cdot \bar{\bar{\mathbf{A}}}_n &= -\mathbf{a}_n \cdot \left(p \bar{\bar{\mathbf{I}}} - \bar{e} \mathbf{a}_n \mathbf{k}_n \right) \\
&= -p \mathbf{a}_n + \bar{e} \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_n \mathbf{k}_n \\
&= p \left(-1 + \bar{e} \frac{2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} \right) \mathbf{a}_n \\
&= p \frac{\bar{e}^2 + 1}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{a}_n \\
&= b_n \mathbf{a}_n
\end{aligned} \tag{4.110}$$

ここで, $\bar{\bar{\mathbf{A}}}_n = \bar{\bar{\mathbf{A}}}_n^t$ より ($\bar{\bar{\mathbf{A}}}_n^t$ は $\bar{\bar{\mathbf{A}}}_n$ の転置),

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_n \cdot \bar{\bar{\mathbf{A}}}_n &= \bar{\bar{\mathbf{A}}}_n^t \cdot \mathbf{b}_n \\
&= \bar{\bar{\mathbf{A}}}_n \cdot \mathbf{b}_n \\
&= b_n \mathbf{a}_n \\
&= \mathbf{a}_n b_n
\end{aligned} \tag{4.111}$$

また,

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\mathbf{A}}}{}_n^t \cdot \bar{\bar{\mathbf{A}}}{}_n &= \bar{\bar{\mathbf{A}}}{}_n \cdot \bar{\bar{\mathbf{A}}}{}_n \\
&= \left(p \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \bar{e} \mathbf{b}_n \mathbf{k}_n \right) \cdot \left(p \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \bar{e} \mathbf{b}_n \mathbf{k}_n \right) \\
&= \bar{\bar{\mathbf{I}}} + 2\bar{e} \mathbf{b}_n \mathbf{k}_n + \bar{e} \mathbf{b}_n \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{b}_n \mathbf{k}_n \\
&= \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \left(2 \frac{-2\bar{e}^2}{\bar{e}^2 - 1} + \frac{(-2\bar{e}^2)^2}{(\bar{e}^2 - 1)^2} \right) \mathbf{k}_n \mathbf{k}_n \\
&= \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \frac{(-2\bar{e})^2}{(\bar{e}^2 - 1)^2} \mathbf{k}_n \mathbf{k}_n \\
&= \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \mathbf{b}_n \mathbf{b}_n \\
&= \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n
\end{aligned} \tag{4.112}$$

まとめると,

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}{}_n^t \cdot \bar{\bar{\mathbf{A}}}{}_n = \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n = \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \mathbf{b}_n \mathbf{b}_n \tag{4.113}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}{}_n \cdot \mathbf{b}_n = \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n \tag{4.114}$$

$$\mathbf{b}_n^2 = b_n^2 - 1 \tag{4.115}$$

ただし, $\bar{\bar{\mathbf{A}}}{}_n^t$ は $\bar{\bar{\mathbf{A}}}{}_n$ の転置を示す.

入射および反射光線からなる円すいの半頂角 θ_n , θ_{n+1} の関係をさらに考えていく.

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta_{n+1} &= 1 - \cos^2 \theta_{n+1} \\
&= \mathbf{v}_{n+1}^2 - (\mathbf{v}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1})^2
\end{aligned} \tag{4.116}$$

ここで, 式を再記して,

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{1}{z_n} (\bar{\bar{\mathbf{A}}}{}_n \cdot \mathbf{v}_n + \mathbf{b}_n \cos \theta_n) \tag{4.117}$$

$$\begin{aligned}
\cos \theta_{n+1} &= \mathbf{v}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \\
&= \frac{1}{z_n} (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v}_n + b_n \cos \theta_n)
\end{aligned} \tag{4.118}$$

これより,

$$\sin^2 \theta_{n+1} = \frac{1}{z_n^2} (\bar{\bar{\mathbf{A}}}{}_n \cdot \mathbf{v}_n + \mathbf{b}_n \cos \theta_n)^2 - \frac{1}{z_n^2} (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v}_n + b_n \cos \theta_n)^2 \tag{4.119}$$

整理して,

$$\begin{aligned}
& z_n^2 \sin^2 \theta_{n+1} \\
&= \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}_n \cdot \mathbf{v}_n \right) \cdot \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}_n \cdot \mathbf{v}_n \right) + 2 \left(\bar{\bar{\mathbf{A}}}_n \cdot \mathbf{v}_n \right) \cdot \mathbf{b}_n \cos \theta_n \\
&\quad + \mathbf{b}_n \cdot \mathbf{b}_n \cos^2 \theta_n - (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v}_n)^2 - 2 (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v}_n) b_n \cos \theta_n - b_n^2 \cos^2 \theta_n \\
&= \left\{ \mathbf{v}_n \cdot \bar{\bar{\mathbf{A}}}_n^t \cdot \bar{\bar{\mathbf{A}}}_n \cdot \mathbf{v}_n - (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v}_n)^2 \right\} \\
&\quad + 2 \left\{ \mathbf{b}_n \cdot \bar{\bar{\mathbf{A}}}_n \cdot \mathbf{v}_n - (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v}_n) b_n \right\} \cos \theta_n \\
&\quad + (\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{b}_n - b_n^2) \cos^2 \theta_n
\end{aligned} \tag{4.120}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_n \cdot \bar{\bar{\mathbf{A}}}_n^t \cdot \bar{\bar{\mathbf{A}}}_n \cdot \mathbf{v}_n &= \mathbf{v}_n \cdot \left(\bar{\bar{\mathbf{I}}} + \mathbf{b}_n \mathbf{b}_n \right) \cdot \mathbf{v}_n \\
&= 1 + (\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{v}_n)^2 \\
&= 1 + (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v}_n)^2 \mathbf{b}_n \cdot \bar{\bar{\mathbf{A}}}_n \cdot \mathbf{v}_n \\
&= b_n \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v}_n
\end{aligned} \tag{4.121}$$

これより,

$$\begin{aligned}
& z_n^2 \sin^2 \theta_{n+1} \\
&= \left\{ 1 + (\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{v}_n)^2 - (\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{v}_n)^2 \right\} \\
&\quad + 2 \{ (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v}_n) b_n - (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v}_n) b_n \} \cos \theta_n \\
&\quad + (b_n^2 - 1 - b_n^2) \cos^2 \theta_n \\
&= 1 - \cos^2 \theta_n \\
&= \sin^2 \theta_n
\end{aligned} \tag{4.122}$$

このとき, $\theta_n \geq 0$, $\theta_{n+1} \geq 0$, $z_n = |C| > 0$ より, $\sin \theta_{n+1}$ は,

$$\sin \theta_{n+1} = \frac{1}{z_n} \sin \theta_n \tag{4.123}$$

$\theta_n = 0$ のときの z_n を z_0 とおくと,

$$z_0 = z_n \Big|_{\theta_n=0} = \left| \frac{R_{n+1}}{R_n} \right| \tag{4.124}$$

入射および反射光線の方向 α_n , α_{n+1} の関係は, 式 (4.92), 式 (4.105) において $\theta_n = 0$ とおき ($\cos \theta_n = 1$), $\mathbf{v}_n = \alpha_n$, $\mathbf{v}_{n+1} = \alpha_{n+1}$ とすれば,

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{z_0} (\bar{\bar{\mathbf{A}}}_n \cdot \alpha_n + \mathbf{b}_n) \tag{4.125}$$

$$z_0 = \mathbf{a}_n \cdot \alpha_n + b_n \tag{4.126}$$

ここで,

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}_1 = p \left(\bar{\bar{\mathbf{I}}} - \frac{2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{l} \mathbf{l} \right) \quad (4.127)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}} = \mathbf{i} \mathbf{i} + \mathbf{j} \mathbf{j} + \mathbf{k} \mathbf{k} \quad (4.128)$$

$$\mathbf{b}_1 = p \frac{-2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{l} \quad (4.129)$$

$$\mathbf{a}_1 = p \frac{2\bar{e}}{\bar{e}^2 - 1} \mathbf{l} \quad (4.130)$$

$$b_1 = p \frac{\bar{e}^2 + 1}{\bar{e}^2 - 1} \quad (4.131)$$

4.1.13 多重反射鏡の表示式

鏡面が多数ある場合, $m - 1$ 枚目の鏡面による反射波について^{*1},

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{v}_m \\ \cos \theta_m \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{z_{m-1}} \begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{m-1} & \mathbf{b}_{m-1} \\ \mathbf{a}_{m-1} & b_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{m-1} \\ \cos \theta_{m-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{z_{m-1}} \begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{m-1} & \mathbf{b}_{m-1} \\ \mathbf{a}_{m-1} & b_{m-1} \end{pmatrix} \frac{1}{z_{m-2}} \begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{m-2} & \mathbf{b}_{m-2} \\ \mathbf{a}_{m-2} & b_{m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{m-2} \\ \cos \theta_{m-2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{z_{m-1}} \dots \frac{1}{z_1} \begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{m-1} & \mathbf{b}_{m-1} \\ \mathbf{a}_{m-1} & b_{m-1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathbf{A}}}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathbf{A}}} & \mathbf{b} \\ \mathbf{a} & b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{m-1} & \mathbf{b}_{m-1} \\ \mathbf{a}_{m-1} & b_{m-1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathbf{A}}}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_1 & b_1 \end{pmatrix} \quad (4.132)$$

$$z \equiv z_{m-1} z_{m-2} \dots z_1 \quad (4.133)$$

これより,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_m \\ \cos \theta_m \end{pmatrix} = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathbf{A}}} & \mathbf{b} \\ \mathbf{a} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad (4.134)$$

よって, 最終段 (m 番目) の鏡面が回転放物面のとき, この鏡面に入射する光線の沿う円すいを示す \mathbf{v}_m , θ_m と, 最初の円すいホーンの中心軸に沿う単位ベクトル \mathbf{v}_1 , θ_1 の間には次

^{*1} 水沢丕雄, 片木孝至, "多重反射鏡形アンテナの等価パラボラ表示とその応用," 三菱電機技報, vol.49, no.11, pp.729-732 (1975).

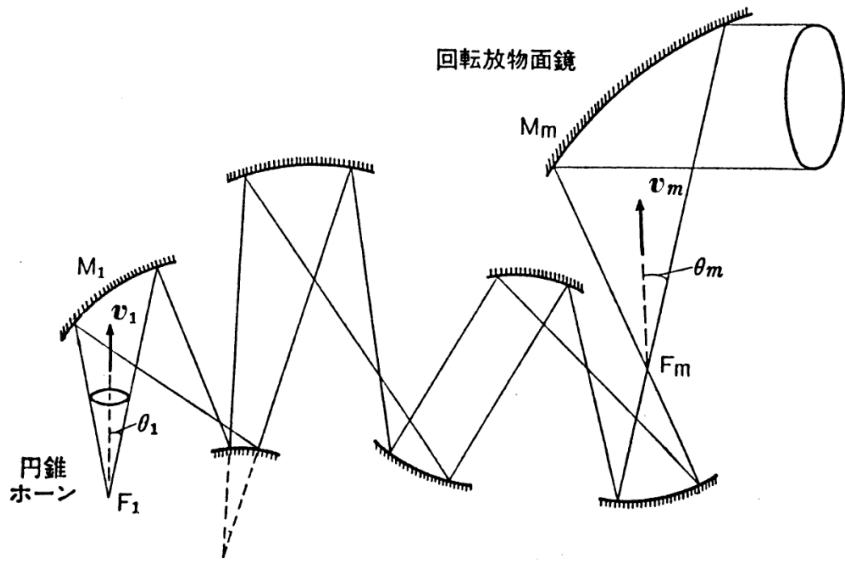


図 4.9. 多重反射鏡

のような関係が得られる。

$$\mathbf{v}_m = \frac{1}{z} (\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{b} \cos \theta_1) \quad (4.135)$$

$$\cos \theta_m = \frac{1}{z} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{b} \cos \theta_1) \quad (4.136)$$

$$\sin \theta_m = \frac{1}{z} \sin \theta_1 \quad (4.137)$$

ここで、式を再記して、

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{b} \\ \mathbf{a} & b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{m-1} & \mathbf{b}_{m-1} \\ \mathbf{a}_{m-1} & b_{m-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_1 & b_1 \end{pmatrix} \quad (4.138)$$

$$z \equiv z_{m-1} z_{m-2} \cdots z_1 \quad (4.139)$$

最終段のパラボラ開口面（円形）の半径 r_a 、中心 \mathbf{P} は、

$$r_a = 2f_m \frac{\sin \theta_m}{\cos \theta_m - (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{k}_m)} \quad (4.140)$$

$$\mathbf{P} = 2f_m \frac{\mathbf{v}_m - (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{k}_m) \mathbf{k}_m}{\cos \theta_m - (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{k}_m)} \quad (4.141)$$

上式に式 (4.135), 式 (4.136), 式 (4.137) を代入すると \mathbf{v}_m , $\cos \theta_m$, $\sin \theta_m$ を消去でき, 初段の 2 次曲面鏡の \mathbf{v}_1 , $\cos \theta_1$, $\sin \theta_1$ を用いて,

$$\begin{aligned} r_a &= 2f_m \frac{\sin \theta_1}{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_1 + b \cos \theta_1) - (\bar{\bar{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{v}_1 + \bar{\mathbf{b}} \cos \theta_1) \cdot \mathbf{k}_m} \\ &= 2f_m \frac{\sin \theta_1}{(b - \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{k}_m) \cos \theta_1 - \{\mathbf{k}_m \cdot (\bar{\bar{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{v}_1) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_1\}} \\ &= 2 \frac{f_m}{b - \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{k}_m} \cdot \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1 - \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_1} \end{aligned} \quad (4.142)$$

ここで,

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{k}_m \cdot \bar{\bar{\mathbf{A}}} - \mathbf{a}}{b - (\bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{k}_m)} \quad (4.143)$$

さらに, 最終段の回転放物面鏡の焦点距離 f の代わりに, 等価パラボラの焦点距離 f_m を求めることができる.

$$f = \frac{f_m}{b - (\bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{k}_m)} \quad (4.144)$$

等価パラボラを見込む円すいの中心軸の方向を \mathbf{v} とすると,

$$\begin{aligned} r_a &= 2f_m \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1 - \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_1} \\ &\equiv 2f_m \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_m} \end{aligned} \quad (4.145)$$

いま, $\mathbf{v} = \bar{\bar{\mathbf{L}}}_c \cdot \mathbf{v}_1$ より, ダイアディクス $\bar{\bar{\mathbf{L}}}_c = \mathbf{k}_m \mathbf{c}$ を導入すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_m &= (\bar{\bar{\mathbf{L}}}_c \cdot \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{k}_m \\ &= \mathbf{k}_m \cdot \bar{\bar{\mathbf{L}}}_c \cdot \mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{k}_m \cdot (\mathbf{k}_m \mathbf{c}) \cdot \mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_1 \end{aligned} \quad (4.146)$$

半頂角 θ_1 は不变であるが, 等価パラボラの焦点位置 f_m と円すいの中心軸の方向 \mathbf{v} が得られる. さらに, 等価パラボラの開口の中心の位置ベクトル \mathbf{p} は, 次のようになる.

$$\mathbf{p} = 2f \left\{ \frac{\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_m) \mathbf{k}_m}{\cos \theta_1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_m)} + \mathbf{d} \right\} \quad (4.147)$$

等価パラボラの焦点位置は最終段のパラボラとは異なり, \mathbf{d} は,

$$\mathbf{d} = \mathbf{b} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{k}_m) \mathbf{k}_m \quad (4.148)$$

また, \mathbf{v} は円すいの中心軸方向に沿う単位ベクトルを示し,

$$\mathbf{v} = \bar{\bar{\mathbf{L}}} \cdot \mathbf{v}_1 \quad (4.149)$$

ここで, $\bar{\bar{\mathbf{L}}}$ はダイアディクスであり,

$$\bar{\bar{\mathbf{L}}} = (\bar{\bar{\mathbf{I}}} - \mathbf{k}_m \mathbf{k}_m) \cdot (\bar{\bar{\mathbf{A}}} + \mathbf{b} \mathbf{c}) + \mathbf{k}_m \mathbf{c} \quad (4.150)$$

このとき,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_m \cdot \bar{\bar{\mathbf{L}}} &= \mathbf{k}_m \cdot \left\{ (\bar{\bar{\mathbf{I}}} - \mathbf{k}_m \mathbf{k}_m) \cdot (\bar{\bar{\mathbf{A}}} + \mathbf{b} \mathbf{c}) + \mathbf{k}_m \mathbf{c} \right\} \\ &= (\mathbf{k}_m - \mathbf{k}_m) \cdot (\bar{\bar{\mathbf{A}}} + \mathbf{b} \mathbf{c}) + \mathbf{c} \\ &= \mathbf{c} = \mathbf{k}_m \cdot \bar{\bar{\mathbf{L}}}_c \end{aligned} \quad (4.151)$$

このとき, 次式が成り立つ.

$$\bar{\bar{\mathbf{L}}}^t \cdot \bar{\bar{\mathbf{L}}} = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \quad (4.152)$$

上式より, $\bar{\bar{\mathbf{L}}}$ は直交変換を示すダイアディクスであるから, 単位ベクトル \mathbf{v}_1 を直交変換した \mathbf{v} も単位ベクトルである.

4.2 平均放射パターン

4.2.1 位相誤差のある開口面分布による指向性関数

位相が一様の開口面分布 E_a に位相誤差 δ があるとき, 円形開口の指向性関数 $g(\Theta, \Phi)$ は,

$$g(\Theta, \Phi) = \iint_A E_a e^{j\delta} e^{jk \cdot \rho} dA \quad (4.153)$$

開口面を円形とすると, 開口面分布に位相誤差の項 $e^{j\delta}$ を乗じて次のようになる.

$$g(\Theta, \Phi) = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 E_a e^{j\delta} e^{j u \rho' \cos(\Phi - \phi)} \rho' d\rho' d\phi \quad (4.154)$$

いま, この開口面を半径方向に N 分割, 周方向に K_n 分割して微小なゾーンを定義し, 位相誤差がこれらゾーン毎に独立に正規分布 (平均値を 0, rms 値 (標準偏差) を σ) に従うものとすると[†],

$$g(\Theta, \Phi) = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{K_n} \int_{a_{n-1}}^{a_n} \int_{\phi_{n,j-1}}^{\phi_{n,j}} E_a e^{j\delta} e^{j u \rho' \cos(\Phi - \phi)} \rho' d\rho' d\phi \quad (4.155)$$

ただし, ゾーン内では位相誤差は一定とする. 第 (n, j) 番目のゾーンの位相誤差を $\delta_{n,j}$ とおけば,

$$g(\Theta, \Phi) = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{K_n} e^{j\delta_{n,j}} E_{n,j} \quad (4.156)$$

ここで,

$$E_{n,j} \equiv \int_{a_{n-1}}^{a_n} \int_{\phi_{n,j-1}}^{\phi_{n,j}} E_a e^{j u \rho' \cos(\Phi - \phi)} \rho' d\rho' d\phi \quad (4.157)$$

放射電力については, $|g|^2$ を求めればよく,

$$\begin{aligned} |g|^2 &= gg^* = \left(\frac{D}{2}\right)^4 \left(\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{K_n} e^{j\delta_{n,j}} E_{n,j} \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^{K_m} e^{-j\delta_{m,l}} E_{m,l}^* \right) \\ &= \left(\frac{D}{2}\right)^4 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{K_n} \sum_{l=1}^{K_m} E_{n,j} E_{m,l}^* e^{j(\delta_{n,j} - \delta_{m,l})} \end{aligned} \quad (4.158)$$

4.2.2 平均的な放射電力

放射電力として最も起こり得る値は, 平均的な放射電力であるので, $|g|^2$ の平均値 $\overline{|g|^2}$ を求めると次のような.

$$\overline{|g|^2} = \left(\frac{D}{2}\right)^4 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{K_n} \sum_{l=1}^{K_m} E_{n,j} E_{m,l}^* \overline{e^{j(\delta_{n,j} - \delta_{m,l})}} \quad (4.159)$$

ここで, δ の確立密度関数 $f(\delta)$ は, 正規分布ゆえ,

$$f(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\delta}{\sigma})^2} \quad (4.160)$$

で与えられるから, ゾーン (n, j) と (m, l) が異なる場合,

$$\begin{aligned} \overline{e^{j(\delta_{n,j}-\delta_{m,l})}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\delta_{n,j}-\delta_{m,l})} f(\delta_{n,j}) f(\delta_{m,l}) d\delta_{n,j} d\delta_{m,l} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\delta_{n,j}} f(\delta_{n,j}) d\delta_{n,j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\delta_{m,l}} f(\delta_{m,l}) d\delta_{m,l} \\ &= \overline{e^{j\delta_{n,j}}} \cdot \overline{e^{-j\delta_{m,l}}} \end{aligned} \quad (4.161)$$

ここで,

$$\overline{e^{j\delta_{n,j}}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\delta_{n,j}} f(\delta_{n,j}) d\delta_{n,j} \quad (4.162)$$

$$\overline{e^{-j\delta_{m,l}}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\delta_{m,l}} f(\delta_{m,l}) d\delta_{m,l} \quad (4.163)$$

これらの積分は,

$$\begin{aligned} \overline{e^{\pm j\delta}} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\delta} f(\delta) d\delta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \delta f(\delta) d\delta \pm j \int_{-\infty}^{\infty} \sin \delta f(\delta) d\delta \\ &= 2 \int_0^{\infty} \cos \delta f(\delta) d\delta \\ &= 2 \int_0^{\infty} \cos \delta \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\delta}{\sigma})^2} \right) d\delta \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \cos \delta d\delta \end{aligned} \quad (4.164)$$

上式の積分は, 次の **Laplace の積分**を用いている.

$$\int_0^{\infty} e^{-bx^2} \cos(2ax) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{a^2}{b}} \quad (4.165)$$

これより, $b \rightarrow \frac{1}{2\sigma^2}$, $2a \rightarrow 1$, $\delta \rightarrow x$ とおけば,

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \cos \delta d\delta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \quad (4.166)$$

両辺に $\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ を乗じて,

$$\overline{e^{\pm j\delta}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \cos \delta d\delta = e^{-0.5\sigma^2} \quad (4.167)$$

したがって,

$$\begin{aligned}
 \overline{e^{j(\delta_{n,j}-\delta_{m,l})}} &= \overline{e^{j\delta_{n,j}}} \cdot \overline{e^{-j\delta_{m,l}}} \\
 &= e^{-0.5\sigma^2} \cdot e^{-0.5\sigma^2} \\
 &= e^{-\sigma^2}
 \end{aligned} \tag{4.168}$$

一方, ヴーン (n, j) と (m, l) が同じ場合 $(n = m, j = l)$, $\delta_{n,j} = \delta_{m,l}$ のとき,

$$\overline{e^{j(\delta_{n,j}-\delta_{m,l})}} = e^0 = 1 \tag{4.169}$$

これらの結果より, $|g|^2$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 \overline{|g|^2} &= \left(\frac{D}{2}\right)^4 \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{K_n} \sum_{l=1}^{K_m} E_{n,j} E_{m,l}^* \cdot e^{-\sigma^2} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{K_n} E_{n,j} E_{n,j}^* \right) \\
 &= \left(\frac{D}{2}\right)^4 \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{K_n} \sum_{l=1}^{K_m} E_{n,j} E_{m,l}^* \cdot e^{-\sigma^2} \right. \\
 &\quad \left. + (1 - e^{-\sigma^2}) \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{K_n} E_{n,j} E_{n,j}^* \right) \\
 &= \left(\frac{D}{2}\right)^4 \left(e^{-\sigma^2} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{K_n} E_{n,j} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^{K_m} E_{m,l}^* \right. \\
 &\quad \left. + (1 - e^{-\sigma^2}) \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{K_n} E_{n,j} E_{n,j}^* \right) \tag{4.170}
 \end{aligned}$$

ここで, 位相誤差のないときの指向性関数を g_0 とおくと,

$$\overline{|g|^2} = e^{-\sigma^2} \cdot g_0 \cdot g_0^* + (1 - e^{-\sigma^2}) \left(\frac{D}{2}\right)^4 \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{K_n} E_{n,j} E_{n,j}^* \tag{4.171}$$

4.2.3 鏡面ひずみによる利得低下量

位相誤差が大きくなっている場合を考えると, 正面方向 $u = 0$ では, 上式の第1項は第2項に比べて十分大きくなり, 近似して,

$$\overline{|g(0)|^2} \simeq e^{-\sigma^2} |g_0(0)|^2 \tag{4.172}$$

平均的な利得低下量 $\overline{\Delta G}$ [dB] を求めると,

$$\begin{aligned}
 \overline{\Delta G} &= 10 \log_{10} \left(\frac{\overline{|g(0)|^2}}{|g_0(0)|^2} \right) \\
 &= 10 \log_{10} (e^{-\sigma^2}) \\
 &= -\sigma^2 (10 \log_{10} e) \\
 &= -4.343\sigma^2
 \end{aligned} \tag{4.173}$$

反射鏡の鏡面誤差（鏡面ひずみ、凹凸）の rms 値を ε とすると、位相誤差の rms 値 σ は、

$$\sigma \simeq k \cdot 2\varepsilon = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) 2\varepsilon = \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda} \tag{4.174}$$

このとき、利得低下量 $\overline{\Delta G}$ [dB] は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \overline{\Delta G} &= - \left(\frac{4\pi\varepsilon}{\lambda} \right)^2 (10 \log_{10} e) \\
 &= - (160\pi^2 \log_{10} e) \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^2 \\
 &\simeq -686 \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^2
 \end{aligned} \tag{4.175}$$

4.3 軸対称複反射鏡アンテナの最適開口面分布

カセグレンアンテナは、副反射鏡によって開口面の中心部分の電波が遮へいされ、サイドローブレベルが高くなってしまう。そこで、与えられたサイドローブレベルで開口能率を最大にする開口面分布が2次計画法によって求められている^{*2}。

副反射鏡による遮へい領域を開口面（直径 D ）と同心円（副反射鏡に対応）とし、その半径を $\alpha D/2$ ($0 < \alpha < 1$) とする。いま、半径方向座標成分 ρ を開口半径 $D/2$ で規格化した $\bar{\rho} = 2\rho/D$ を定義し、開口面分布 E_a を $\bar{\rho}$ の関数（位相一様、つまり実数）として、次のように表すことにする。

$$E_a(\bar{\rho}) = \sum_{j=1}^M x_j J_0(b_j \bar{\rho}) \quad (4.176)$$

ただし、 J_0 は0次の第1種ベッセル関数、 b_j ($0 = b_1 < b_2 < \dots$) は1次の第1種ベッセル関数の零点 ($J_1(b_j) = 0$) を示す。開口面法より、ユニバーサル放射パターン $E_p(u)$ は、

$$E_p(u) = 2 \int_{\alpha}^1 E_a(\bar{\rho}) J_0(\bar{\rho}u) \bar{\rho} d\bar{\rho} \quad (4.177)$$

ここで、

$$u = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta \quad (4.178)$$

上式に、 $E_a(\bar{\rho})$ を代入して積分すると、

$$E_p(u) = \sum_{j=1}^M x_j f_j(u) \quad (4.179)$$

$$f_j(u) = 2 \frac{u J_1(u) J_0(b_j) - \alpha u J_1(\alpha u) J_0(\alpha b_j) + \alpha b_j J_1(\alpha b_j) J_0(\alpha u)}{u^2 - b_j^2} \quad (4.180)$$

このとき、ピーク方向 $u = 0$ の利得 $g(0)$ は、

$$g(0) = \frac{4\pi |KE_p(0)|^2}{P_t} \quad (4.181)$$

ただし、 K は定数、 P_t はトータル電力を示す。また、 $E_a(p)$ 、 $E_p(u)$ ともに係数 x_j による線型結合の式で表されている。いま、 $E_p(0) \equiv 1$ とすると、利得を最大にするには、 P_t を最小にすればよい。このとき、トータル電力 P_t は開口面分布関数 E_a から求められ、 E_a^2 の

^{*2} 後藤尚久、渡辺文夫、”与えられたサイドローブを持つカセグレンアンテナの最大開口能率,” 信学論, vol.J61-B, pp.321-326 (1978).

積分は次のようになる。

$$\begin{aligned}
F &= \int_{\alpha}^1 E_a^2 \bar{\rho} d\bar{\rho} \\
&= \int_{\alpha}^1 \left(\sum_{n=1}^N x_n J_0(b_n \bar{\rho}) \right) \left(\sum_{m=1}^N x_m J_0(b_m \bar{\rho}) \right) \bar{\rho} d\bar{\rho} \\
&= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N x_n x_m \int_{\alpha}^1 J_0(b_n \bar{\rho}) J_0(b_m \bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho}
\end{aligned} \tag{4.182}$$

ベッセル関数の不定積分公式より, $\alpha \neq \beta$ のとき,

$$\int J_{\nu}(\alpha z) J_{\nu}(\beta z) z dz = \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ \beta J_{\nu}(\alpha z) J'_{\nu}(\beta z) - \alpha J'_{\nu}(\alpha z) J_{\nu}(\beta z) \right\} \tag{4.183}$$

よって, $b_n \neq b_m$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha}^1 J_0(b_n \bar{\rho}) J_0(b_m \bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \\
&= \left[\frac{\bar{\rho}}{b_n^2 - b_m^2} \left\{ b_m J_0(b_n \bar{\rho}) J'_0(b_m \bar{\rho}) - b_n J'_0(b_n \bar{\rho}) J_0(b_m \bar{\rho}) \right\} \right]_{\alpha}^1
\end{aligned} \tag{4.184}$$

ここで, $J'_0(z) = -J_1(z)$ より,

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha}^1 J_0(b_n \bar{\rho}) J_0(b_m \bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \\
&= \frac{1}{b_n^2 - b_m^2} \left[\left\{ -b_m J_0(b_n) J_1(b_m) + b_n J_1(b_n) J_0(b_m) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \alpha \left\{ -b_m J_0(b_n \alpha) J_1(b_m \alpha) + b_n J_1(b_n \alpha) J_0(b_m \alpha) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{4.185}$$

さらに, $J_1(b_n) = 0, J_1(b_m) = 0$ より,

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha}^1 J_0(b_n \bar{\rho}) J_0(b_m \bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \\
&= \frac{\alpha}{b_n^2 - b_m^2} \left\{ b_m J_0(b_n \alpha) J_1(b_m \alpha) - b_n J_1(b_n \alpha) J_0(b_m \alpha) \right\} \\
&\equiv \frac{H_{nm}}{2} \quad (n \neq m)
\end{aligned} \tag{4.186}$$

また, ベッセル関数の不定積分公式より,

$$\int J_{\nu}^2(\alpha z) z dz = \frac{1}{2} \left\{ z^2 J_{\nu}^{\prime 2}(\alpha z) + \left(z^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2} \right) J_{\nu}^2(\alpha z) \right\} \tag{4.187}$$

よって, $b_n = b_m$ のとき,

$$\int_{\alpha}^1 J_0^2(b_n \bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} = \left[\frac{\bar{\rho}^2}{2} \left\{ J_0^{\prime 2}(b_n \bar{\rho}) + J_0^2(b_n \bar{\rho}) \right\} \right]_{\alpha}^1 \tag{4.188}$$

ここで, $J'_0(z) = -J_1(z)$ より,

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^1 J_0^2(b_n \bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} \\
&= \left[\frac{\bar{\rho}^2}{2} \left\{ J_1^2(b_n \bar{\rho}) + J_0^2(b_n \bar{\rho}) \right\} \right]_{\alpha}^1 \\
&= \frac{1}{2} \left[\left\{ J_1^2(b_n) + J_0^2(b_n) \right\} - \alpha^2 \left\{ J_1^2(b_n \alpha) + J_0^2(b_n \alpha) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{4.189}$$

さらに, $J_1(b_n) = 0$ より,

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^1 J_0^2(b_n \bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} &= \frac{1}{2} \left[J_0^2(b_n) - \alpha^2 \left\{ J_1^2(b_n \alpha) + J_0^2(b_n \alpha) \right\} \right] \\
&\equiv \frac{H_{nn}}{2}
\end{aligned} \tag{4.190}$$

これより,

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}) &= \int_{\alpha}^1 E_a^2 pdp \\
&= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N x_n x_m \frac{H_{nm}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}^t [H] \mathbf{x}
\end{aligned} \tag{4.191}$$

ここで,

$$\mathbf{x} = (x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_n \ \cdots)^t \tag{4.192}$$

したがって, 与えられたサイドローブレベルなどの制約条件のもとで開口能率が最大となるように最適化問題を解くことによって, x_n を求めるこにする. そこで, x_n を要素とする列ベクトル \mathbf{x} を最適化変数とし, 評価関数が次のように 2 次式となる.

$$\min_{(\mathbf{x})} \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^t [H] \mathbf{x} \right) \tag{4.193}$$

このとき, 制約条件は,

- 等式制約条件: $E_p(0) = 1$
- 不等式制約条件: $-R \leq E_p(u) \leq R$ ($u_0 \leq u \leq u_e$)

これらは 1 次式で表されたため, 2 次計画問題として解けばよい. ただし, R はサイドローブレベル, u_0 は主ビームより広角で, かつ第 1 サイドローブレベルまでの方向とし, u_e はある程度のサイドローブ数を含む角度までとする. このとき, 2 次形式の評価関数における $[H]$ は, $M \times M$ の行列で要素は H_{nm} である. また, \mathbf{c} はゼロである. 一方, 等式

制約条件

$$[A_{eq}]^t \mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq} \quad (4.194)$$

における $[A_{eq}]^t$ および \mathbf{b}_{eq} (実際には要素は 1 つしかないのでスカラー) は,

$$[A_{eq}]^t = (f_1(0) \quad f_2(0) \quad \cdots) \quad (4.195)$$

$$\mathbf{b}_{eq} = 1 \quad (4.196)$$

また, 不等式制約条件を u_i ($i = 1, 2, \dots, N_{ineq}$) について定義すると,

$$[A_{ineq}]^t \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{ineq} \quad (4.197)$$

における $[A_{ineq}]^t$ および \mathbf{b}_{ineq} は,

$$[A_{ineq}]^t = \begin{pmatrix} [A_s]^t \\ -[A_s]^t \end{pmatrix} \quad (4.198)$$

$$\mathbf{b}_{ineq} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \quad (4.199)$$

ここで, 行列 $[A_s]^t$ および列ベクトル \mathbf{R} は,

$$[A_s]^t = \begin{pmatrix} f_1(u_1) & f_2(u_1) & \cdots \\ f_1(u_2) & f_2(u_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.200)$$

$$\mathbf{R} = (R \quad R \quad \cdots)^t \quad (4.201)$$

4.4 軸対称カセグレンアンテナの鏡面修整法

2枚鏡形式の反射鏡アンテナでは、主反射鏡の開口面分布の主偏波成分を所望の振幅分布でかつ一様な位相分布となるよう主・副反射鏡を修整することによって、高能率・低サイドローブ化が可能となる。ここでは、図に示すような軸対称カセグレンアンテナを取り上げ、幾何光学を基にした鏡面修整法について説明する。なお、軸対称であるので、円柱座標系 (ρ, ϕ, z) において、 (ρ, z) を考え、図に示している。

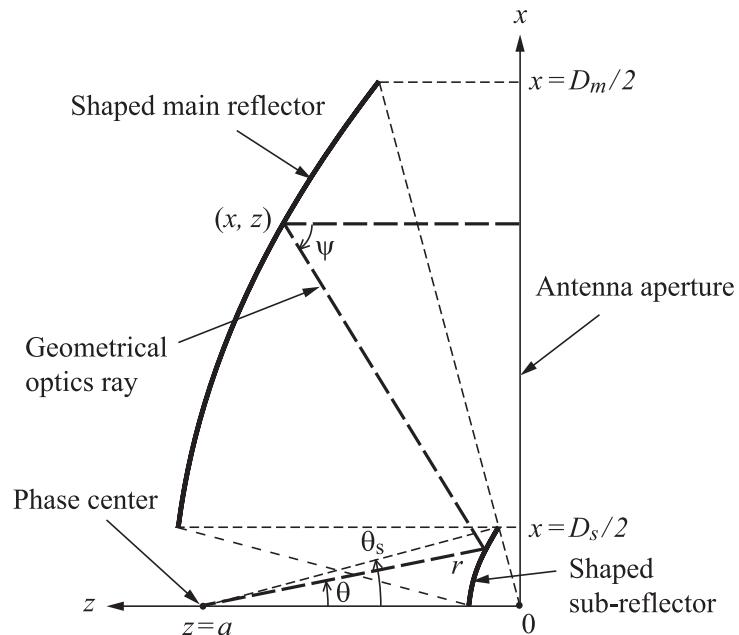


図 4.10. 軸対称カセグレンアンテナ

4.4.1 軸対称2枚修整鏡面系における光路長一定の条件

一次放射器の位相中心を $z = a$ 、位相中心から副反射鏡までの距離を r 、角度を θ とする、副反射鏡上の点 (ρ_s, z_s) は、

$$\rho_s = r \sin \theta \quad (4.202)$$

$$z_s = a - r \cos \theta \quad (4.203)$$

また、主反射鏡上の点 (ρ, z) は、

$$\begin{aligned} \tan \psi &= \frac{\rho - \rho_s}{z - z_s} \\ &= \frac{\rho - r \sin \theta}{z - (a - r \cos \theta)} \end{aligned} \quad (4.204)$$

副反射鏡から主反射鏡までの距離 l_{sm} は,

$$\begin{aligned} l_{sm} &= \frac{z - z_s}{\cos \psi} \\ &= \frac{z - (a - r \cos \theta)}{\cos \psi} \end{aligned} \quad (4.205)$$

開口面位相分布を一様にするための条件は, 一次放射器の位相中心から主反射鏡の開口面 ($z = 0$) までの光路長 l_0 を一定とすることで,

$$\begin{aligned} l_0 &= r + l_{sm} + z \\ &= r + \frac{z - a + r \cos \theta}{\cos \psi} + z \quad (\text{一定}) \end{aligned} \quad (4.206)$$

4.4.2 反射の法則

位相中心に原点をとり, $-z$ 方向を極軸方向にとった球座標系 (r, θ, ϕ') を考え, 副反射鏡の座標を $\mathbf{r}_s = r\mathbf{a}_r$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial \phi'} &= \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \mathbf{a}_r + r \mathbf{a}_\theta \right) \times r \sin \theta \mathbf{a}_{\phi'} \\ &= \left(-\frac{\partial r}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + r \mathbf{a}_r \right) r \sin \theta \end{aligned} \quad (4.207)$$

より, 副反射鏡の法線ベクトル \mathbf{n}_s は (\mathbf{a}_θ は θ 方向に沿う単位ベクトル),

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_s &= \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial \phi'}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial \phi'} \right|} \\ &= \frac{-\frac{\partial r}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + r \mathbf{a}_r}{\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + r^2}} \end{aligned} \quad (4.208)$$

反射光線に沿う単位ベクトル \mathbf{s} は, 反射の法則より,

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_r - 2(\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{n}_s) \mathbf{n}_s \quad (4.209)$$

両辺に \mathbf{n}_s のスカラ積をとり, 先に求めた法線ベクトル \mathbf{n}_s を代入して,

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_s = -\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{n}_s \quad (4.210)$$

$$\mathbf{s} \cdot \left(-\frac{\partial r}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + r \mathbf{a}_r \right) = -r \quad (4.211)$$

ここで,

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}_\theta = \sin(\theta + \psi) \quad (4.212)$$

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}_r = -\cos(\theta + \psi) \quad (4.213)$$

より,

$$-\frac{\partial r}{\partial \theta} \sin(\theta + \psi) + r(-\cos(\theta + \psi)) = -r \quad (4.214)$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= r \frac{1 - \cos(\theta + \psi)}{\sin(\theta + \psi)} \\ &= r \frac{2 \sin^2\left(\frac{\theta + \psi}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta + \psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \psi}{2}\right)} \\ &= r \tan\left(\frac{\theta + \psi}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.215)$$

一方, 主反射鏡上の点 (ρ, ϕ, z) の位置ベクトル $\mathbf{r}_m(\rho, \phi)$ は,

$$\mathbf{r}_m = \rho \mathbf{a}_\rho(\phi) + z(\rho) \mathbf{a}_z \quad (4.216)$$

これより, 主反射鏡の法線ベクトル \mathbf{n}_m は,

$$\mathbf{n}_m = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \phi} \right|} \quad (4.217)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \phi} &= \left(\mathbf{a}_\rho + \frac{\partial z}{\partial \rho} \mathbf{a}_z \right) \times \rho \mathbf{a}_\phi \\ &= \left(\mathbf{a}_z - \frac{\partial z}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho \right) \rho \end{aligned} \quad (4.218)$$

主反射鏡による反射光線の方向は $-\mathbf{a}_z$ 方向ゆえ, 反射の法則より,

$$-\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{n}_m = -\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_m \quad (4.219)$$

先に求めた法線ベクトル \mathbf{n}_m を代入して,

$$-\mathbf{a}_z \cdot \left(\mathbf{a}_z - \frac{\partial z}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho \right) = -\mathbf{s} \cdot \left(\mathbf{a}_z - \frac{\partial z}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho \right) \quad (4.220)$$

$$\begin{aligned}
-1 &= -\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}_z + \frac{\partial z}{\partial \rho} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}_\rho) \\
&= -\cos \psi + \frac{\partial z}{\partial \rho} \sin \psi
\end{aligned} \tag{4.221}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \rho} &= \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \\
&= -\frac{1 - \cos \psi}{\sin \psi} \\
&= -\tan \frac{\psi}{2}
\end{aligned} \tag{4.222}$$

よって,

$$\frac{dz}{d\theta} = -\frac{d\rho}{d\theta} \tan \frac{\psi}{2} \tag{4.223}$$

したがって, 各鏡面の座標は, 式 (4.215), (4.223) の連立常微分方程式を光路長一定の条件のもとで解けば求められる.

4.4.3 幾何光学におけるエネルギー保存の法則

開口面振幅分布 (位相一様の条件はすでに考慮されている) と 1 次パターンを与えて設計するので, ここでは, $d\rho/d\theta$ を両者のエネルギー保存の法則より求めていく. まず, 1 次パターンを $E_p(\theta)$, 開口面振幅分布を $E_d(\rho)$ とすると, 幾何光学におけるエネルギー保存の法則より,

$$|E_p(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = |E_d(\rho)|^2 \rho d\rho \tag{4.224}$$

いま, A_p , A_q を定数として,

$$E_p(\theta) \equiv A_p e_p(\theta) \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_s) \tag{4.225}$$

$$E_d(\rho) \equiv A_d e_d(\rho) \quad (D_s/2 \leq \rho \leq D_m/2) \tag{4.226}$$

とおくと, 全電力は等しいので,

$$\int_{D_s/2}^{D_m/2} |E_d(\rho)|^2 \rho d\rho = \int_{\theta_0}^{\theta_s} |E_p(\theta)|^2 \sin \theta d\theta \tag{4.227}$$

が成り立つ. これより, 定数を消去して,

$$\frac{|e_p(\theta)|^2}{\int_{\theta_0}^{\theta_s} |E_p(\theta)|^2 \sin \theta d\theta} \sin \theta d\theta = \frac{|e_d(\rho)|^2}{\int_{D_s/2}^{D_m/2} |E_d(\rho)|^2 \rho d\rho} \rho d\rho \tag{4.228}$$

したがって、相対的な分布 $e_p(\theta)$, $e_d(\rho)$ を用いて、 $d\rho/d\theta$ は次のように表される。

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{|e_p(\theta)|^2 \sin \theta}{|e_d(\rho)|^2 \rho} \frac{\int_{D_s/2}^{D_m/2} |e_d(\rho)|^2 \rho d\rho}{\int_{\theta_0}^{\theta_s} |e_p(\theta)|^2 \sin \theta d\theta} \quad (4.229)$$

このとき、副反射鏡の座標の角度成分 θ を与えて、主反射鏡を表わす座標成分 $\rho = \rho(\theta)$ を求める必要がある。そこで、任意の1次パターン $e_p(\theta)$ が与えられた場合、

$$f(\rho, \theta) \equiv \frac{\int_{D_s/2}^{\rho} e_d^2(\rho) \rho d\rho}{\int_{D_s/2}^{D_m/2} e_d^2(\rho) \rho d\rho} - \frac{I(\theta)}{I(\theta_s)} \quad (4.230)$$

$$I(\theta) = \int_0^{\theta} e_p^2(\theta) \sin \theta d\theta \quad (4.231)$$

を定義し、 θ を与えたときに $f(\rho, \theta) = 0$ を満たす解 ρ を数値的に求めることにする。これより、 $\rho = \rho(\theta)$ が決まれば、 $d\rho/d\theta$ は得られた式を用いて求められ、主反射鏡および副反射鏡の設計が行えることになる。

CHAPTER 5

指向性合成と波源分布の最適化

アンテナの指向性（電波の放射パターン）を設計・制御するための複数の数学的手法について解説する。特に、特定の形状のビーム（成形ビーム）を形成すること、そしてサイドローブ（主ビーム以外の不要な放射）のレベルを抑制する効果的な方法を取り上げ説明していく。まず、簡単な方法として、複数の基本的なビームを重ね合わせることで所望の指向性を合成するウッドワード・ローソン法について解説する。また、フーリエ級数展開を用いた開口面における波源分布と電界指向性の関係を示し、より高度な制御を可能にするレメッツのアルゴリズムと二次計画法の応用について紹介する。これらの方法を用いれば、主ビームの形状やサイドローブレベルを詳細に制御し、アンテナの効率（開口能率）を最適化できることを示している。

5.1 ウッドワード・ローソン法

成形ビームなどの主ビームの指向性合成として、一つの開口において複数の波源分布を異なる方向に共相励振して所定の指向性を合成する**ウッドワード・ローソン法** (Woodward-Lawson method) がある。これはビーム方向を変化させた複数の指向性関数の重ね合わせによってビームを成形しようというもので、共相励振の方向は他の指向性のヌル点と一致させ、かつ各々の指向性のヌル点も一致させる。簡単のため振幅は全て一様とすると、指向性関数は sinc 関数で表されるから、 θ_m 方向の指向性のヌル点は、

$$\frac{\pi D}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_m) = m\pi \quad (5.1)$$

を満たす方向 θ である。なお、ビームの方向は対称に配置するものとする。よって、ビームの数が奇数 ($2M + 1$)、および偶数 ($2M$) のとき、各々、共相励振の方向 θ_m は次のような

関係になる。

$$\sin \theta_m = \begin{cases} m \frac{\lambda}{D} & (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, M (2M+1 : \text{odd})) \\ \frac{2m \mp 1}{2} \frac{\lambda}{D} & (m = \pm 1, \pm 2, \dots, M (2M : \text{even})) \end{cases} \quad (5.2)$$

ビームの数が奇数 $(2M+1)$ のとき、指向性関数 $g(u)$ は、

$$\begin{aligned} g(u) &= \sum_{m=-M}^M c_m \frac{\sin v_m}{v_m} \\ &= \sum_{m'=1}^M c_{-m'} \frac{\sin v_{-m'}}{v_{-m'}} + c_0 \frac{\sin v_0}{v_0} + \sum_{m=1}^M c_m \frac{\sin v_m}{v_m} \\ &= c_0 \frac{\sin v_0}{v_0} + \sum_{m=1}^M c_m \left(\frac{\sin v_{-m}}{v_{-m}} + \frac{\sin v_m}{v_m} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

ここで、 $\theta_{-m} = -\theta_m$ より、

$$\begin{aligned} v_{\pm m} &= \frac{\pi D}{\lambda} (\sin \theta + \sin \theta_{-m}) \\ &= \frac{\pi D}{\lambda} (\sin \theta \pm \sin \theta_m) \\ &= u \pm \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta_m \end{aligned} \quad (5.4)$$

このとき、波源分布 $e(\bar{x})$ は、 $A_m(\bar{x}) = 1$ として、

$$\begin{aligned} e(\bar{x}) &= \sum_{m=-M}^M c_m \left\{ A_m(\bar{x}) e^{j\psi_m(\bar{x})} \right\} \\ &= \sum_{m=-M}^M c_m e^{-\frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta_m \cdot \bar{x}} \\ &= c_0 + \sum_{m=1}^M 2c_m \cos \left(\frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta_m \cdot \bar{x} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

ビームの数が偶数 $(2M)$ のとき、指向性関数 $g(u)$ および波源分布 $e(\bar{x})$ は、上式において $c_0 = 0$ とする。さらに、係数を全て等しく $c_m = 1$ おけば、ウッドワード・ローソン法による成形ビームが得られる。ビーム数 $M = 5, 6$ の計算例を、図 5.1, 図 5.2 に示す。同図において、左上の図では、合成する全てのビームのアレーファクタを点線、合成したビームのアレーファクタを実線で示し（下の図は dB 値の放射パターン），このような指向性から求めた波源分布を右上の図に示している。簡単な方法であるが、主ビームのリップルやサイドローブレベル（左上の図では赤、下の図では緑のプロットの点のピーク値）などの制御はできない。

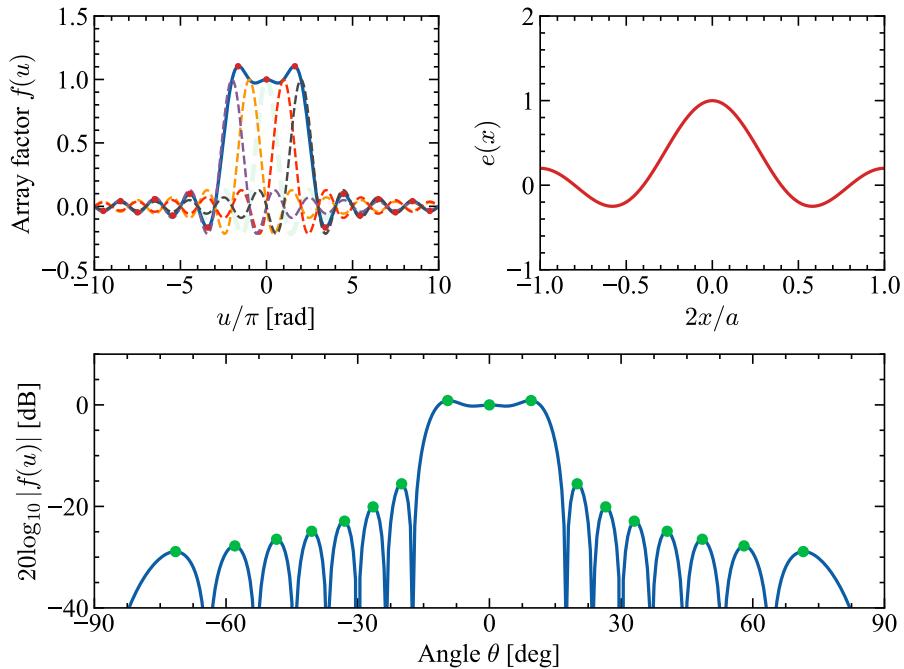


図 5.1. ウッドワード・ローソン法による成形ビーム ($D = 10\lambda$, $M = 5$)

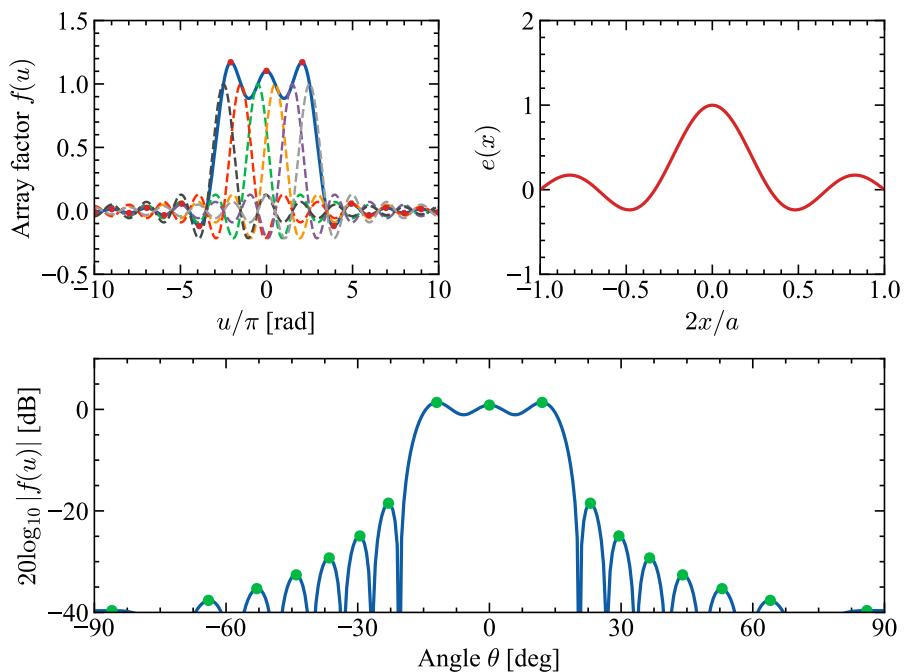


図 5.2. ウッドワード・ローソン法による成形ビーム ($D = 10\lambda$, $M = 6$)

5.2 波源分布のフーリエ級数展開

5.2.1 開口面分布と電界指向性との関係

直角座標系 (x_1, x_2, x_3) において, $x_3 = 0$ における開口面 A の電界分布のスカラー成分 $E_a(x_1, x_2)$ を逆フーリエ変換すると, フラウンホーファ領域電界指向性のスカラー成分 (ユニバーサル電界パターン) $g(k_1, k_2)$ が求められ, 次のようになる.

$$g(k_1, k_2) = \iint_A E_a(x_1, x_2) e^{j(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_1 dx_2 \quad (5.6)$$

ただし, k_1, k_2 は波数ベクトルの x_1, x_2 成分を示す. 開口面 A の外側をゼロとして $e(x_1, x_2)$ を定義すれば積分範囲を拡張でき, 逆変換が行える. したがって, 開口面分布 $e(x_1, x_2)$ と電界指向性 $g(k_1, k_2)$ は, 次のようにフーリエ変換対で表される.

$$g(k_1, k_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} e(x_1, x_2) e^{j(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_1 dx_2 \quad (5.7)$$

$$e(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g(k_1, k_2) e^{-j(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dk_1 dk_2 \quad (5.8)$$

ここで,

$$k_1 = k \sin \theta \cos \phi \quad (5.9)$$

$$k_2 = k \sin \theta \sin \phi \quad (5.10)$$

なお, 2次元フーリエ変換対の係数の積は $1/(2\pi)^2$ である.

5.2.2 変数分離された開口面分布

開口面分布が変数分離形 $e(x_1, x_2) = e_1(x_1)e_2(x_2)$ のとき,

$$\begin{aligned} g(k_1, k_2) &= \iint_{-\infty}^{\infty} e_1(x_1)e_2(x_2) e^{jk_1 x_1} e^{jk_2 x_2} dx_1 dx_2 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e_1(x_1) e^{jk_1 x_1} dx_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e_2(x_2) e^{jk_2 x_2} dx_2 \right) \\ &\equiv g_1(k_1)g_2(k_2) \end{aligned} \quad (5.11)$$

ここで, $D_1 \times D_2$ の方形開口の場合,

$$g_1(k_1) = \int_{-\infty}^{\infty} e_1(x_1) e^{jk_1 x_1} dx_1 = \int_{-\frac{D_1}{2}}^{\frac{D_1}{2}} e_1(x_1) e^{jk_1 x_1} dx_1 \quad (5.12)$$

$$g_2(k_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e_2(x_2) e^{jk_2 x_2} dx_2 = \int_{-\frac{D_2}{2}}^{\frac{D_2}{2}} e_2(x_2) e^{jk_2 x_2} dx_2 \quad (5.13)$$

逆に,

$$\begin{aligned}
 e(x_1, x_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(k_1) g_2(k_2) e^{-j(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dk_1 dk_2 \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(k_1) e^{-jk_1 x_1} dk_1 \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(k_2) e^{-jk_2 x_2} dk_2 \right) \\
 &\equiv e_1(x_1) e_2(x_2)
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

ここで,

$$e_1(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(k_1) e^{-jk_1 x_1} dk_1 \tag{5.15}$$

$$e_2(x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(k_2) e^{-jk_2 x_2} dk_2 \tag{5.16}$$

5.2.3 座標系の正規化

正規化した直角座標 (\bar{x}_1, \bar{x}_2) を考え,

$$x_1 \equiv \frac{D_1}{2} \bar{x}_1 \tag{5.17}$$

$$x_2 \equiv \frac{D_2}{2} \bar{x}_2 \tag{5.18}$$

いま, $\phi = 0$ とおけば, $x_1 x_3$ 面の波源分布 $e_1(x_1)$ と電界指向性 $g_1(x_1)$ の関係は,

$$k_1 = k \sin \theta \cos 0 = k \sin \theta \tag{5.19}$$

$$u_1 \equiv k \frac{D_1}{2} \sin \theta = \frac{\pi D_1}{\lambda} \sin \theta \tag{5.20}$$

より,

$$\begin{aligned}
 g_1(k_1) &= \int_{-\frac{D_1}{2}}^{\frac{D_1}{2}} e_1(x_1) e^{jk_1 x_1} dx_1 \\
 &= \frac{D_1}{2} \int_{-1}^1 e_1(\bar{x}) e^{ju_1 \bar{x}_1} d\bar{x}_1 = g_1(u_1)
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
 e_1(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(k_1) e^{-jk_1 x_1} dk_1 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{2}{D_1} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(u_1) e^{-ju_1 \bar{x}_1} du_1
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

また, $\phi = \pi/2$ とおけば, $x_2 x_3$ 面の波源分布 $e_2(x_2)$ と電界指向性 $g_2(x_2)$ の関係は,

$$k_2 = k \sin \theta \sin \frac{\pi}{2} = k \sin \theta \tag{5.23}$$

$$u_2 \equiv k \frac{D_2}{2} \sin \theta = \frac{\pi D_2}{\lambda} \sin \theta \tag{5.24}$$

より,

$$\begin{aligned} g_2(k_2) &= \int_{-\frac{D_2}{2}}^{\frac{D_2}{2}} e_2(x_2) e^{jk_2 x_2} dx_2 \\ &= \frac{D_2}{2} \int_{-1}^1 e_2(\bar{x}_2) e^{ju_2 \bar{x}_2} d\bar{x}_2 = g_2(u_2) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} e_2(x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(k_2) e^{-jk_2 x_2} dk_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2}{D_2} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(u_2) e^{-ju_2 \bar{x}_2} du_2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

5.2.4 1次元フーリエ変換対

$x_1 x_3$ 面と $x_2 x_3$ 面の関係を一つにまとめ, $x_i x_3$ 面 ($i = 1, 2$) に対する関係を,

$$x_i = \frac{D_i}{2} \bar{x}_i, \quad u_i = \frac{\pi D_i}{\lambda} \sin \theta \quad (5.27)$$

として,

$$\begin{aligned} g_i(u_i) &= \int_{-\frac{D_i}{2}}^{\frac{D_i}{2}} e_i(x_i) e^{ju_i \frac{2}{D_i} x_i} dx_i \\ &= \frac{D_i}{2} \int_{-1}^1 e_i(\bar{x}_i) e^{ju_i \bar{x}_i} d\bar{x}_i \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$e_i(\bar{x}_i) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{D_i} \int_{-\infty}^{\infty} g_i(u_i) e^{-ju_i \bar{x}_i} du_i \quad (5.29)$$

添字 i を省略して簡略化して

$$x = \frac{D}{2} \bar{x}, \quad u = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta \quad (5.30)$$

とすると,

$$\begin{aligned} g(u) &= \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e(x) e^{ju \frac{2}{D} x} dx \\ &= \frac{D}{2} \int_{-1}^1 e(\bar{x}) e^{ju \bar{x}} d\bar{x} \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$e(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{D} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-ju \bar{x}} du \quad (5.32)$$

5.2.5 波源分布のフーリエ級数展開

1次元波源分布 $e(\bar{x})$ ($-1 \leq \bar{x} \leq 1$) を、複素フーリエ級数で展開すると、

$$e(\bar{x}) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{-jn\pi\bar{x}} \quad (5.33)$$

いま、 $e(\bar{x})$ ($-1 \leq \bar{x} \leq 1$) が与えられれば (周期 $T = 2$)、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-1}^1 e(\bar{x}) e^{jm\pi\bar{x}} d\bar{x} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\sum_{n=-N}^N a_n e^{-jn\pi\bar{x}} \right) e^{jm\pi\bar{x}} d\bar{x} \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{a_n}{2} \int_{-1}^1 e^{j(m-n)\pi\bar{x}} d\bar{x} \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{a_n}{2} \left[\frac{e^{j(m-n)\pi\bar{x}}}{j(m-n)\pi} \right]_{-1}^1 \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{a_n}{2} \cdot \frac{e^{j(m-n)\pi} - e^{-j(m-n)\pi}}{j(m-n)\pi} \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{a_n}{2} \cdot \frac{j2 \sin(m-n)\pi}{j(m-n)\pi} \\ &= \sum_{n=-N}^N a_n \cdot \frac{\sin(m-n)\pi}{(m-n)\pi} \end{aligned} \quad (5.34)$$

ここで、

$$\frac{\sin(m-n)\pi}{(m-n)\pi} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} = \delta_{m,n} \quad (5.35)$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e(\bar{x}) e^{jm\pi\bar{x}} d\bar{x} &= \sum_{n=-N}^N a_n \delta_{m,n} = a_m \\ \therefore a_m &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e(\bar{x}) e^{jn\pi\bar{x}} d\bar{x} \end{aligned} \quad (5.36)$$

5.2.6 実数係数で展開された開口面分布

複素波源分布 $e(\bar{x})$ の複素共役 $e^*(\bar{x})$ は、

$$e^*(\bar{x}) = \left(\sum_{n=-N}^N a_n e^{-jn\pi\bar{x}} \right)^* = \sum_{n=-N}^N a_n^* e^{jn\pi\bar{x}} \quad (5.37)$$

また,

$$e(-\bar{x}) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{-jn\pi(-\bar{x})} = \sum_{n=-N}^N a_n e^{jn\pi\bar{x}} \quad (5.38)$$

展開係数 a_n が実数のとき, $a_n = a_n^*$ より, 次式が成り立つ.

$$e^*(\bar{x}) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{jn\pi\bar{x}} = e(-\bar{x}) \quad (5.39)$$

いま, 複素波源分布 $e(\bar{x}) \equiv E(\bar{x})e^{j\varphi(\bar{x})}$ (E, φ は実数) とおくと,

$$\begin{aligned} e^*(\bar{x}) &= (E(\bar{x})e^{j\varphi(\bar{x})})^* \\ &= E(\bar{x})e^{j\{-\varphi(\bar{x})\}} \\ &= e(-\bar{x}) \\ &= E(-\bar{x})e^{j\varphi(-\bar{x})} \end{aligned} \quad (5.40)$$

これより,

$$E(\bar{x}) = E(-\bar{x}) \quad (5.41)$$

$$-\varphi(\bar{x}) = \varphi(-\bar{x}) \quad (5.42)$$

つまり, 展開係数 a_n が実数のとき, 複素波源分布 $e(\bar{x})$ の振幅は偶関数, 位相は奇関数となる.

5.2.7 対称な波源分布

波源分布 $e(\bar{x})$ が原点に対して対称な場合, $e(-\bar{x}) = e(\bar{x})$ より ($n' = -n$),

$$\begin{aligned} e(-\bar{x}) &= \sum_{n=-N}^N a_n e^{-jn\pi(-\bar{x})} \\ &= \sum_{n=-N}^N a_n e^{-j(-n)\pi\bar{x}} \\ &= \sum_{n'=-N}^N a_{-n'} e^{-jn'\pi\bar{x}} \end{aligned} \quad (5.43)$$

よって,

$$a_{-n} = a_n \quad (5.44)$$

これより、対称な開口面分布 $e(\bar{x})$ は、

$$\begin{aligned}
 e(\bar{x}) &= \sum_{n'=1}^N a_{-n'} e^{-j(-n')\pi\bar{x}} + a_0 + \sum_{n=1}^N a_n e^{-jn\pi\bar{x}} \\
 &= a_0 + \sum_{n=1}^N a_n (e^{jn\pi\bar{x}} + e^{-jn\pi\bar{x}}) \\
 &= a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\pi\bar{x})
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

5.2.8 波源分布の逆フーリエ変換

1次元波源（電界）分布 $e(\bar{x})$ ($-1 \leq \bar{x} \leq 1$) を ($x = \frac{D}{2}\bar{x}$),

$$\begin{aligned}
 e(\bar{x}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{D} \sum_{n=-N}^N a_n e^{-jn\pi\bar{x}} \\
 &= \frac{1}{D} \sum_{n=-N}^N a_n e^{-jn\pi\bar{x}}
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

とおき、逆フーリエ変換すると電界指向性 $g(u)$ は ($u = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta$),

$$\begin{aligned}
 g(u) &= \frac{D}{2} \int_{-1}^1 e(\bar{x}) e^{ju\bar{x}} d\bar{x} \\
 &= \frac{D}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{D} \sum_{n=-N}^N a_n e^{-jn\pi\bar{x}} \right) e^{ju\bar{x}} d\bar{x} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N a_n \int_{-1}^1 e^{j(u-n\pi)\bar{x}} d\bar{x} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N a_n \left[\frac{e^{j(u-n\pi)\bar{x}}}{j(u-n\pi)} \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N a_n \left\{ \frac{e^{j(u-n\pi)} - e^{-j(u-n\pi)}}{j(u-n\pi)} \right\} \\
 &= \sum_{n=-N}^N a_n \frac{\sin(u-n\pi)}{u-n\pi}
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

ここで、

$$u = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta \tag{5.48}$$

より、可視領域は、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $-\frac{\pi D}{\lambda} \leq u \leq \frac{\pi D}{\lambda}$ となる。不可視領域まで指向性合成を拡大する場合、この u の範囲より十分広くして考えればよい。電界指向性 $g(u)$ を

sinc 関数を用いて表すと次のようになる.

$$\begin{aligned} g(u) &= \sum_{n=-N}^N a_n \frac{\sin(u - n\pi)}{u - n\pi} \\ &= \sum_{n=-N}^N a_n \operatorname{sinc}\left(\frac{u}{\pi} - n\right) \end{aligned} \quad (5.49)$$

あるいは,

$$\begin{aligned} \sin(u - n\pi) &= \sin u \cos(n\pi) - \cos u \sin(n\pi) \\ &= \sin u (-1)^n \end{aligned} \quad (5.50)$$

より,

$$\begin{aligned} \frac{\sin(u - n\pi)}{u - n\pi} &= \frac{(-1)^n \sin u}{u - n\pi} \\ &= \frac{(-1)^n}{1 - \frac{n\pi}{u}} \frac{\sin u}{u} \end{aligned} \quad (5.51)$$

よって,

$$\begin{aligned} g(u) &= \sum_{n=-N}^N a_n \frac{\sin(u - n\pi)}{u - n\pi} \\ &= \sum_{n=-N}^N a_n \frac{(-1)^n}{1 - \frac{n\pi}{u}} \frac{\sin u}{u} \\ &= \sum_{n=-N}^N a_n \frac{(-1)^n}{1 - \frac{n\pi}{u}} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{u}{\pi}\right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

上式において各項は実数であるが, 展開係数 a_n は実数の場合と複素数の場合があろう. a_n が実数の場合, $g(u)$ も実数である. ここで, $u = 0$ とおくと,

$$g(0) = \sum_{n=-N}^N a_n \frac{\sin(0 - n\pi)}{0 - n\pi} = a_0 \quad (5.53)$$

これより, $g(0) = 1$ とおくと, $a_0 = 1$ となる. このとき,

$$e(\bar{x}) = \frac{1}{D} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\pi \bar{x}) \right\} \quad (5.54)$$

また、電界指向性 $g(u)$ も $a_{-n} = a_n$ の関係を用いると、

$$\begin{aligned}
g(u) &= \sum_{n=-N}^N a_n \frac{\sin(u - n\pi)}{u - n\pi} \\
&= \sum_{n=-N}^{-1} a_n \frac{\sin(u - n\pi)}{u - n\pi} + a_0 \frac{\sin(u)}{u} + \sum_{n=1}^N a_n \frac{\sin(u - n\pi)}{u - n\pi} \\
&= \sum_{n'=1}^N a_{-n'} \frac{\sin(u + n'\pi)}{u + n'\pi} + a_0 \frac{\sin(u)}{u} + \sum_{n=1}^N a_n \frac{\sin(u - n\pi)}{u - n\pi} \\
&= a_0 \frac{\sin u}{u} + \sum_{n=1}^N a_n \left\{ \frac{\sin(u + n\pi)}{u + n\pi} + \frac{\sin(u - n\pi)}{u - n\pi} \right\} \\
&= \frac{\sin u}{u} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \frac{2(-1)^n u^2}{u^2 - (n\pi)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{5.55}$$

ここで、

$$\phi_0(u) \equiv \frac{\sin u}{u} \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned}
\phi_n(u) &\equiv \frac{\sin(u - n\pi)}{u - n\pi} + \frac{\sin(u + n\pi)}{u + n\pi} \\
&= \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{2(-1)^n u^2}{u^2 - (n\pi)^2} \quad (n = 1, 2, \dots, N)
\end{aligned} \tag{5.57}$$

とおくと、電界指向性 $g(u)$ は、

$$g(u) = a_0 \phi_0(u) + \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(u) \tag{5.58}$$

さらに、 $a_0 = 1$ のとき、

$$g(u) = \phi_0(u) + \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(u) \tag{5.59}$$

なお、MATLAB の関数 sinc は、

$$\text{sinc } t = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & (t \neq 0) \\ 1 & (t = 0) \end{cases} \tag{5.60}$$

5.2.9 開口能率

開口能率 (aperture efficiency) あるいは利得係数は、一様開口面分布の利得 G_{u0} に対する利得低下量を表し (S は開口面積),

$$\begin{aligned}\eta_a &= \frac{G_0}{G_{u0}} = \frac{G_0}{\frac{4\pi S}{\lambda^2}} \\ &= \frac{\lambda^2}{4\pi S} \cdot \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left|g(0,0)\right|^2}{\iint_A |E_a|^2 dS} \\ &= \frac{\left|\iint_A E_a dS\right|^2}{S \iint_A |E_a|^2 dS} \quad (5.61)\end{aligned}$$

方形開口 ($D_1 \times D_2$) 面上の電界分布が変数分離形 $E_a(x_1, x_2) = e_1(x_1)e_2(x_2)$ のとき, $S = D_1 D_2$, $dS = dx_1 dx_2$ より,

$$\eta_a = \frac{\left|\int_{D_1} e_1(x_1) dx_1\right|^2}{D_1 \int_{D_1} |e_1(x_1)|^2 dx_1} \cdot \frac{\left|\int_{D_2} e_2(x_2) dx_2\right|^2}{D_2 \int_{D_2} |e_2(x_2)|^2 dx_2} \equiv \eta_1 \eta_2 \quad (5.62)$$

変数分離された開口能率 η_i は, $x_i = \frac{D_i}{2} \bar{x}_i$, $dx_i = \frac{D_i}{2} d\bar{x}_i$ ($i = 1, 2$) より,

$$\begin{aligned}\eta_i &= \frac{\left|\int_{-\frac{D_i}{2}}^{\frac{D_i}{2}} e_i(x_i) dx_i\right|^2}{D_i \int_{-\frac{D_i}{2}}^{\frac{D_i}{2}} |e_i(x_i)|^2 dx_i} \\ &= \frac{\left|g_i(0)\right|^2}{\frac{D_i^2}{2} \int_{-1}^1 |e_i(\bar{x}_i)|^2 d\bar{x}_i} \quad (5.63)\end{aligned}$$

ただし, $g_i(0)$ ($i = 1, 2$) は正面方向の電界指向性 $g(0,0)$ ($= g_1 g_2$) を変数分離したもので,

$$\begin{aligned}g_i(0) &= \int_{-\frac{D_i}{2}}^{\frac{D_i}{2}} e_i(x_i) dx_i \\ &= \frac{D_i}{2} \int_{-1}^1 e_i(\bar{x}_i) d\bar{x}_i \quad (5.64)\end{aligned}$$

後述する 1 次元の解析においても添字 i を省略して簡略化していく.

5.2.10 1次元波源分布に対する開口能率

1次元波源分布 $e(\bar{x})$ より、直交性を用いれば、

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 |e(\bar{x})|^2 d\bar{x} &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{D} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\pi\bar{x}) \right\} \right]^2 d\bar{x} \\
 &= \frac{1}{D^2} \left\{ \int_{-1}^1 d\bar{x} + 4 \sum_{n=1}^N a_n^2 \int_{-1}^1 \cos^2(n\pi\bar{x}) d\bar{x} \right\} \\
 &= \frac{1}{D^2} \left\{ 2 + 4 \sum_{n=1}^N 2a_n^2 \int_0^1 \frac{1}{2} \{1 + \cos(2n\pi\bar{x})\} d\bar{x} \right\} \\
 &= \frac{2}{D^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^N a_n^2 \left[x + \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} \right]_0^1 \right\} \\
 &= \frac{2}{D^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^N a_n^2 \right)
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

よって、1次元波源分布に対する(1次元)開口能率 η は、 $g(0) = 1$ より、

$$\eta = \frac{|g(0)|^2}{\frac{D^2}{2} \int_{-1}^1 |e(\bar{x})|^2 d\bar{x}} = \frac{1}{1 + 2 \sum_{n=1}^N a_n^2} \tag{5.66}$$

上式において、展開係数 a_n の項は2次式であり、

$$\sum_{n=1}^N a_n^2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^t \mathbf{2}[U] \mathbf{a} \tag{5.67}$$

ただし、 $[U]$ は $N \times N$ 単位行列、 \mathbf{a}^t は列ベクトル \mathbf{a} の転置を示す。

5.3 レメッツのアルゴリズムによる指向性合成

レメッツのアルゴリズム^{*1}を用いて、サイドローブレベルの最大値が所定の値以下となる1次元開口面分布を求める指向性合成^{*2}の方法は次のとおりである。

1. 抑圧するサイドローブレベルの最大値 ϵ と第1サイドローブから順に抑圧するサイドローブ数 N を与える。
2. 初期値として電界指向性 $g_0(u)$ を与える。例えば、一様開口面分布による電界指向性 (sinc 関数) などが考えられる。
3. サイドローブレベルのピーク方向 $u_n (n = 1, 2, \dots, N)$ を、第1サイドローブから順に N 個求める。
4. サイドローブ領域の電界指向性を $-\epsilon \leq g(u) \leq \epsilon$ とするため、ユニバーサルパラメータ $u = u_n$ での電界指向性のピーク値が $\pm \epsilon$ となるように、次式により係数 $a_n (n = 1, 2, \dots, N)$ を決定する ($g(u) = a_0 = 1$)。

$$g(u_m) = \phi_0(u_m) + \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(u_m) = (-1)^m \epsilon \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (5.68)$$

これらの式を行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} \phi_1(u_1) & \phi_2(u_1) & \cdots & \phi_N(u_1) \\ \phi_1(u_2) & \phi_2(u_2) & \cdots & \phi_N(u_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(u_N) & \phi_2(u_N) & \cdots & \phi_N(u_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi_0(u_1) + (-1)^1 \epsilon \\ -\phi_0(u_2) + (-1)^2 \epsilon \\ \vdots \\ -\phi_0(u_N) + (-1)^N \epsilon \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

よって、未知係数 a_n は、

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(u_1) & \phi_2(u_1) & \cdots & \phi_N(u_1) \\ \phi_1(u_2) & \phi_2(u_2) & \cdots & \phi_N(u_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(u_N) & \phi_2(u_N) & \cdots & \phi_N(u_N) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\phi_0(u_1) + (-1)^1 \epsilon \\ -\phi_0(u_2) + (-1)^2 \epsilon \\ \vdots \\ -\phi_0(u_N) + (-1)^N \epsilon \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

これより、指向性を求め、3, 4 の計算を繰り返し a_n を更新していく。 N 個のサイドローブレベルのピーク値が所定の値となれば反復を終了する。なお、3 では、

- $g'(u_n) = 0$ を満足する u_n を N 個計算する。
- $g(u)$ を細かく計算し、ピーク値を抽出して u_n を決定する。

図 5.3 は一様分布による放射パターン、つまり sinc 関数を示したもので、簡単のため、これを初期値として用いて計算していく。サイドローブレベルの値は、第1から順に、

^{*1} ”アンテナ工学ハンドブック（第2版）,” pp.827-828, オーム社 (2008).

^{*2} 後藤 尚久, ”アンテナ工学入門講座,” pp.108-109, 電波新聞社 (2008).

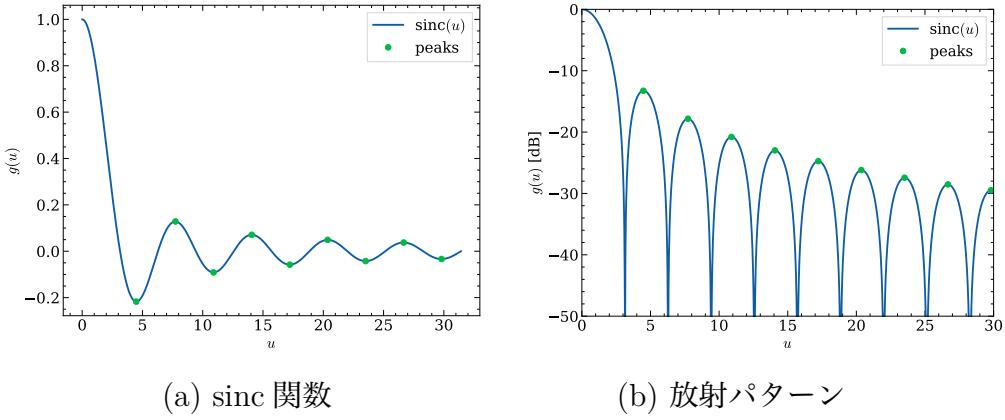


図 5.3. 初期値 (一様分布)

$-32.0, -32.0, -32.0, -34.0, -36.0, -38.0, -40.0, -42.0, -42.0$ [dB] として与え, レメッツのアルゴリズムに基づき繰り返し計算したときの途中過程を図 5.4 に示す. 表 5.1 はこのと

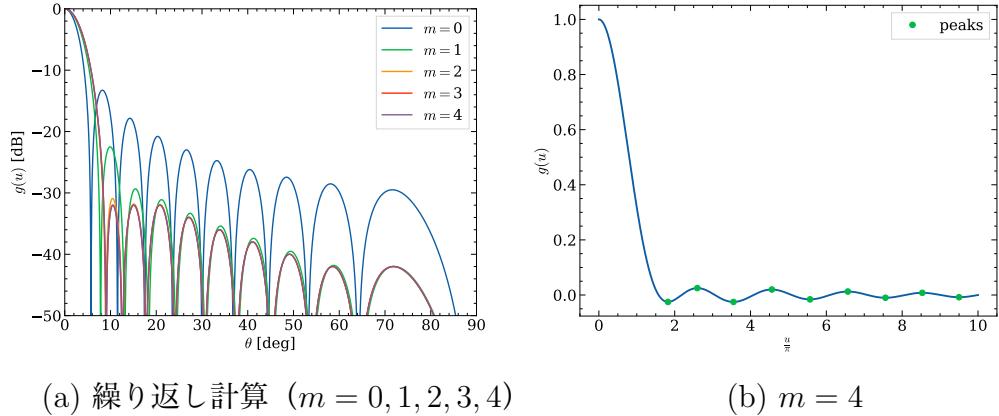


図 5.4. レメッツのアルゴリズムに基づく計算過程. 与えたサイドローブレベルの値は, 第 1 から順に, $-32.0, -32.0, -32.0, -34.0, -36.0, -38.0, -40.0, -42.0, -42.0$ [dB]

きのピークサイドローブレベルの値を示したもので, $m = 0$ は初期値の放射パターンにおける値であり, 繰り返し回数が $m = 4$ のとき早くも与えた値に収束していることがわかる.

表 5.1 サイドローブレベルが収束するまでの計算過程 (サイドローブ数 $N = 9$)

i -th	第 1	第 2	第 3	第 4	第 5	第 6	第 7	第 8	第 9
m	[dB]								
0	-13.262	-17.831	-20.788	-22.985	-24.736	-26.191	-27.437	-28.525	-29.493
1	-22.492	-29.329	-31.099	-33.319	-35.4	-37.403	-39.515	-41.81	-41.979
2	-30.905	-31.814	-31.881	-33.937	-35.964	-37.979	-39.973	-41.977	-41.996
3	-31.987	-32.	-32.	-34.	-36.	-37.999	-40.	-42.	-42.
4	-32.	-32.	-32.	-34.	-36.	-38.	-40.	-42.	-42.

図 5.5 は、収束した繰り返し回数 $m = 4$ のときの放射パターンおよび開口面分布を示したもので、開口能率は 83 % である。開口面分布は単純なテーパ分布に近い。開口能率を高く

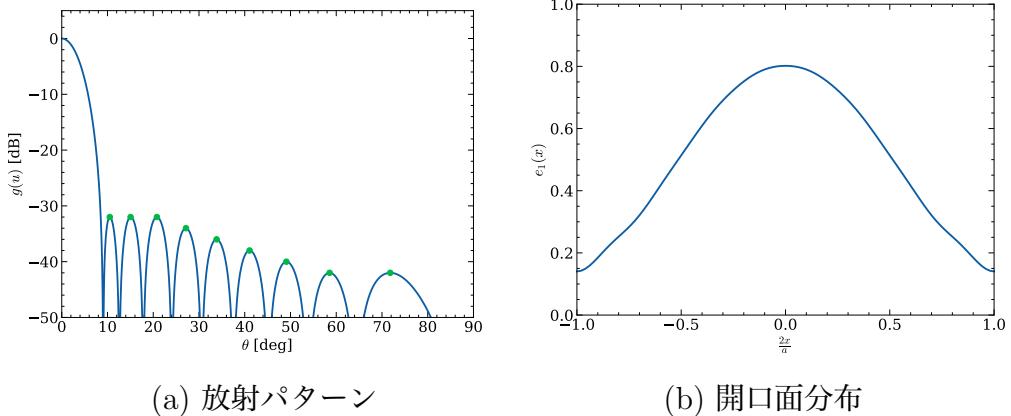


図 5.5. レメッツのアルゴリズムに基づく計算結果（開口能率は 83 %）。与えたサイドローブレベルの値は、第 1 から順に、 $-32.0, -32.0, -32.0, -34.0, -36.0, -38.0, -40.0, -42.0, -42.0$ [dB]

するためには、サイドローブレベルを高くする必要があり、サイドローブレベルの設定を変えた指向性合成も容易に行える。例えば、サイドローブレベルのピーク値を、第 1 から順に、 $-32.0, -32.0, -32.0, -34.0, -36.0, -38.0, -40.0, -42.0, -42.0$ [dB] 以下にすると、図 5.6 に示すようになる。サイドローブレベルを不規則に制御しようとすると、開口面分布も単純なテーパ分布にはならない。

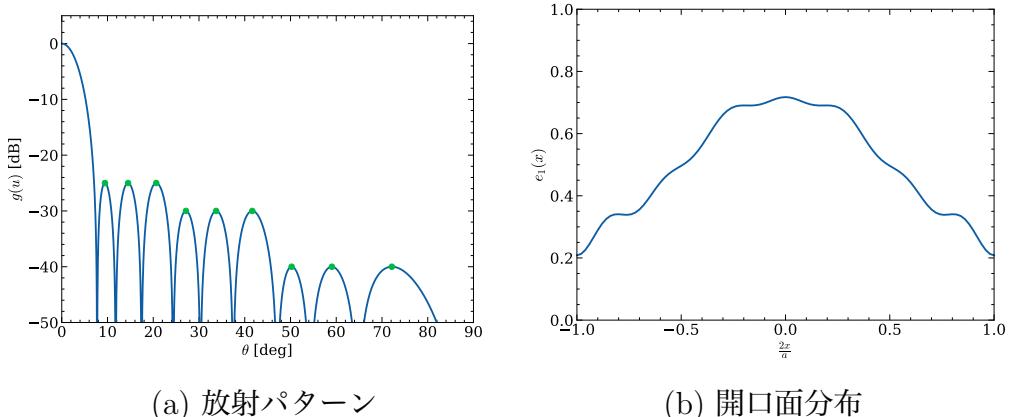


図 5.6. レメッツのアルゴリズムに基づく計算結果（開口能率は 90 %）。与えたサイドローブレベルの値は、第 1 から順に、 $-25.0, -25.0, -25.0, -30.0, -30.0, -30.0, -40.0, -40.0, -40.0$ [dB]

5.4 電界指向性のフーリエ級数展開

指向性関数 $g(u)$ を複素フーリエ級数展開するため,

$$u = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta = \frac{\pi D}{\lambda} w \quad (5.71)$$

$$w = \sin \theta \quad (5.72)$$

とおき, 周期を $T = 2$ として,

$$g(w) = \sum_{n=-N_b}^{N_b} b_n e^{jn\pi w} \quad (5.73)$$

いま, $g(w)$ ($-1 \leq \sin \theta \leq 1$) が与えられれば,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-1}^1 g(w) e^{-jm\pi w} dw &= \sum_{n=-N_b}^{N_b} b_n \frac{\sin(n-m)\pi}{(n-m)\pi} = b_m \\ \therefore b_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(w) e^{-jn\pi w} dw \end{aligned} \quad (5.74)$$

5.4.1 有限範囲で一様な電界指向性

電界指向性 $g(w)$ が対称な場合, $b_{-n} = b_n$ より,

$$\begin{aligned} g(u) &= \sum_{n=-N_b}^{N_b} b_n e^{jn\pi w} \\ &= \sum_{n=-N_b}^{-1} b_n e^{jn\pi w} + b_0 + \sum_{n=1}^{N_b} b_n e^{jn\pi w} \\ &= \sum_{n'=1}^{N_b} b_{-n'} e^{j(-n')\pi w} + b_0 + \sum_{n=1}^{N_b} b_n e^{jn\pi w} \\ &= b_0 + \sum_{n=1}^{N_b} 2b_n \cos(n\pi w) \end{aligned} \quad (5.75)$$

電界指向性が $(-1 <) - \alpha \leq w \leq \alpha (< 1)$ の範囲で $g = 1$ (一定) のとき, 展開係数 b_n は,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(w) e^{-jn\pi w} dw \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-jn\pi w} dw \\ &= \alpha \frac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha} \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$b_0 = \alpha \frac{\sin(0 \cdot \pi\alpha)}{0 \cdot \pi\alpha} = \alpha \quad (5.77)$$

5.4.2 電界指向性のフーリエ変換

電界指向性 $g(u)$ をフーリエ変換すると波源分布 $e(x)$ が得られ,

$$\begin{aligned}
 e(x) &= \frac{1}{\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-j u \bar{x}} du \\
 &= \frac{1}{\pi D} \frac{\pi D}{\lambda} \int_{-1}^1 g(w) e^{-j \frac{\pi D}{\lambda} w \bar{x}} dw \\
 &= \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 \left(\sum_{n=-N_b}^{N_b} b_n e^{j n \pi w} \right) e^{-j \frac{\pi D}{\lambda} w \bar{x}} dw \\
 &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=-N_b}^{N_b} b_n \int_{-1}^1 e^{j(n\pi - \frac{\pi D}{\lambda} \bar{x})w} dw \\
 &= \frac{2}{\lambda} \sum_{n=-N_b}^{N_b} b_n \frac{\sin(n - \frac{D}{\lambda} \bar{x})\pi}{(n - \frac{D}{\lambda} \bar{x})\pi} \\
 &= \frac{2}{\lambda} \sum_{n=-N_b}^{N_b} b_n \frac{\sin(\frac{D}{\lambda} \bar{x} - n)\pi}{(\frac{D}{\lambda} \bar{x} - n)\pi}
 \end{aligned} \tag{5.78}$$

さらに, $b_{-n} = b_n$ のとき,

$$e(x) = \frac{2}{\lambda} \left(b_0 \Phi_0(\bar{x}) + \sum_{n=1}^{N_b} b_n \Phi_n(\bar{x}) \right) \tag{5.79}$$

ここで,

$$\Phi_0(\bar{x}) = \frac{\sin\left(\frac{\pi D}{\lambda} \bar{x}\right)}{\frac{\pi D}{\lambda} \bar{x}} \tag{5.80}$$

$$\Phi_n(\bar{x}) = \frac{\sin(\frac{D}{\lambda} \bar{x} - n)\pi}{(\frac{D}{\lambda} \bar{x} - n)\pi} + \frac{\sin(\frac{D}{\lambda} \bar{x} + n)\pi}{(\frac{D}{\lambda} \bar{x} + n)\pi} \tag{5.81}$$

5.4.3 1次元波源の共相励振

1次元波源分布 $e(\bar{x})$ の振幅を $A(\bar{x})$, 位相を $\psi(\bar{x})$ とおくと, 電界指向性 $g(u)$ は,

$$g(u) = \frac{D}{2} \int_{-1}^1 A(\bar{x}) e^{j\psi(\bar{x})} e^{j u \bar{x}} d\bar{x} \tag{5.82}$$

ここで,

$$u = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta, \quad \bar{x} = \frac{2}{D} x \tag{5.83}$$

より, $\theta = \theta_m$ の方向に共相励振するための位相項の条件は,

$$\begin{aligned}\psi(\bar{x}) + \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta_m \cdot \bar{x} &= 0 \\ \therefore \psi(\bar{x}) &= -\frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta_m \cdot \bar{x}\end{aligned}\tag{5.84}$$

これより, 電界指向性 $g(u)$ は,

$$g(u) = \frac{D}{2} \int_{-1}^1 A(\bar{x}) e^{-j \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta_m \cdot \bar{x}} e^{ju\bar{x}} d\bar{x}\tag{5.85}$$

ここで,

$$\begin{aligned}v_m &\equiv \frac{\pi D}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_m) \\ &= u - \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta_m\end{aligned}\tag{5.86}$$

とおくと,

$$g(u) = \frac{D}{2} \int_{-1}^1 A(\bar{x}) e^{jv_m \bar{x}} d\bar{x}\tag{5.87}$$

振幅が一定のとき, $A(\bar{x}) = A_0$ とおけば,

$$\begin{aligned}g(u) &= \frac{D}{2} A_0 \int_{-1}^1 e^{jv_m \bar{x}} d\bar{x} \\ &= \frac{D}{2} A_0 \frac{2 \sin v_m}{v_m} \\ &= D A_0 \frac{\sin v_m}{v_m}\end{aligned}\tag{5.88}$$

いま, $g(0) = 1$ とすると,

$$g(0) = D A_0 = 1\tag{5.89}$$

よって,

$$\begin{aligned}g(u) &= \frac{\sin v_m}{v_m} \\ &= \frac{\sin \left(u - \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta_m \right)}{u - \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta_m}\end{aligned}\tag{5.90}$$

5.5 レメッツのアルゴリズムによるビーム成形

主ビームの制約条件を加えると、レメッツのアルゴリズムによる成形ビームの指向性合成が行え、サイドローブレベルの制御も同時に可能である。計算方法は次のとおりである。

- 主ビームのリップルの範囲 $(1 \pm \hat{\epsilon})$ とリップルの数 N_i 、抑圧するサイドローブレベルの最大値 ϵ 、第 1 サイドローブから順に抑圧するサイドローブ数 N_s を与える。
- 電界指向性の初期値を設定する。
- 主ビームのリップルの最大、最小の方向 $\hat{u}_i (n = 1, 2, \dots, N_i)$ 、サイドローブレベルのピーク方向 $u_n (n = 1, 2, \dots, N_s)$ を求める。
- 主ビーム領域の電界指向性を $1 - \hat{\epsilon} \leq g(u) \leq 1 + \hat{\epsilon}$ とするため、

$$g(\hat{u}_i) = 1 + (-1)^{N_i-i}\hat{\epsilon} \quad (i = 1, 2, \dots, N_i) \quad (5.91)$$

サイドローブ領域の電界指向性を $-\epsilon \leq g(u) \leq \epsilon$ とするため、

$$g(u_m) = (-1)^m\epsilon \quad (m = 1, 2, \dots, N_s) \quad (5.92)$$

上式を連立して $a_n (n = 1, 2, \dots, N (= N_i + N_s))$ を決定する。

よって、 $a_n (n = 1, 2, \dots, N (= N_i + N_s))$ は、次式を解けばよい。

$$\begin{pmatrix} \phi_1(\hat{u}_1) & \phi_2(\hat{u}_1) & \cdots & \phi_N(\hat{u}_1) \\ \phi_1(\hat{u}_2) & \phi_2(\hat{u}_2) & \cdots & \phi_N(\hat{u}_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(\hat{u}_{N_i}) & \phi_2(\hat{u}_{N_i}) & \cdots & \phi_N(\hat{u}_{N_i}) \\ \phi_1(u_1) & \phi_2(u_1) & \cdots & \phi_N(u_1) \\ \phi_1(u_2) & \phi_2(u_2) & \cdots & \phi_N(u_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(u_{N_s}) & \phi_2(u_{N_s}) & \cdots & \phi_N(u_{N_s}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N_i} \\ a_{N_i+1} \\ a_{N_i+2} \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\phi}_0(\hat{u}_1) + 1 + (-1)^{N_i-1}\hat{\epsilon} \\ -\hat{\phi}_0(\hat{u}_2) + 1 + (-1)^{N_i-2}\hat{\epsilon} \\ \vdots \\ -\hat{\phi}_0(\hat{u}_{N_i}) + 1 + (-1)^0\hat{\epsilon} \\ -\hat{\phi}_0(u_1) + (-1)^1\epsilon \\ -\hat{\phi}_0(u_2) + (-1)^2\epsilon \\ \vdots \\ -\hat{\phi}_0(u_{N_s}) + (-1)^{N_s}\epsilon \end{pmatrix} \quad (5.93)$$

ただし、

$$g(0) = a_0 = 1 + (-1)^{N_i}\hat{\epsilon} \quad (5.94)$$

$$\hat{\phi}_0(u) = a_0\phi_0(u) = \{1 + (-1)^{N_i}\hat{\epsilon}\}\phi_0(u) \quad (5.95)$$

このように指向性を求め、3, 4 の計算を繰り返し a_n を更新する。主ビームのリップル、サイドローブのピーク値が所定の値となれば反復を終了する。電界指向性の初期値は、例えば、

- 有限範囲で一様な電界指向性をフーリエ級数展開したもの
- ウッドワード・ローソン法による指向性合成

などが考えられる。

図 5.7 は方形関数（正面から 35° まで一様）をフーリエ級数展開（展開項数は $N_b = 14$ ）したときの電界指向性および（電力）放射パターンを示したもので、サイドローブレベルは比較的高く、主ビームのリップルは広角になるほど大きくなってしまう。そこで、

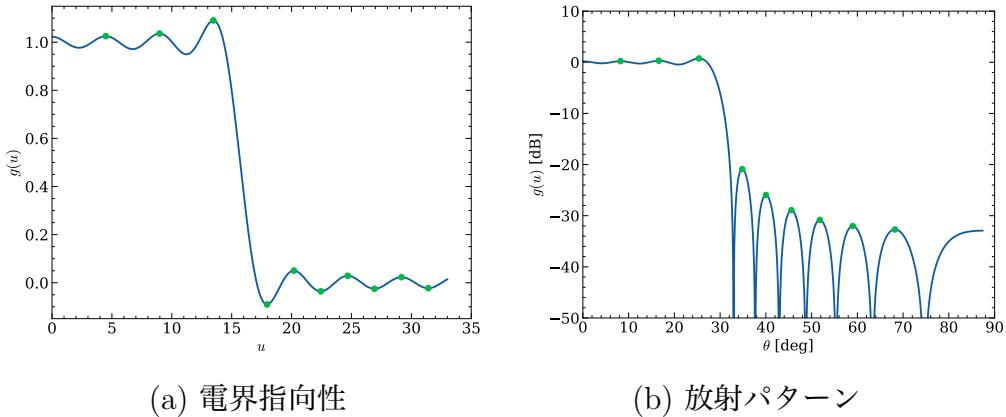


図 5.7. 初期値（方形関数のフーリエ級数展開）

主ビームのリップルは全て 0.1 dB、サイドローブレベルのピーク値は、第 1 から順に、 $-30, -33.75, -37.5, -41.25, -45$ [dB] となるようにレメッツのアルゴリズムに基づき繰り返し計算を行うと、図 5.8 に示すようになる。表 5.2 はこのときのピークサイドローブレベ

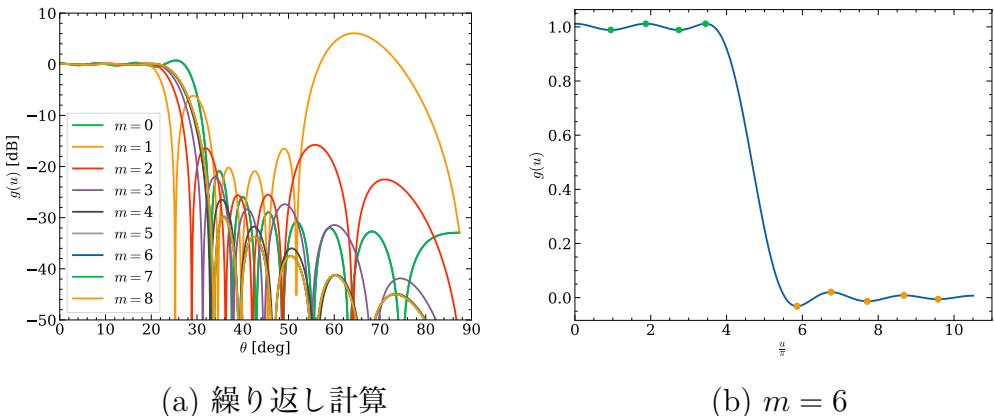


図 5.8. レメッツのアルゴリズムに基づく計算過程。主ビームのリップルは 0.1 dB、与えたサイドローブレベルの値は、第 1 から順に、 $-30, -33.75, -37.5, -41.25, -45$ [dB]

ルの値を示したもので、 $m = 0$ は初期値の放射パターンにおける値であり、繰り返し回数が $m = 6$ のとき収束していることがわかる。図 5.9 は、ビーム成形の放射パターンおよび開口面分布を示したもので、開口面分布は sinc 関数に近い分布である。また、与えたサイドローブレベルの値を全て $-40 - \text{dB}$ とする成形ビームの指向性合成も可能で、図 5.10 にその結果を示す。

表 5.2 所定の値に収束するまでの計算過程 (主ビームのリップル数 $N_i = 4$, サイドローブ数 $N_s = 5$)

i -th	第 1	第 2	第 3	第 4	第 5	第 6	第 7	第 8	第 9
m	[dB]	[dB]	[dB]	[dB]	[dB]	[dB]	[dB]	[dB]	[dB]
0	0.103	-0.142	0.206	-0.349	-20.073	-24.636	-27.22	-28.862	-29.951
1	-0.104	0.115	-0.156	0.221	-27.035	-29.726	-29.422	-24.912	-2.444
2	-0.102	0.106	-0.109	0.101	-26.878	-29.16	-28.472	-19.204	-25.972
3	-0.102	0.101	-0.104	0.114	-26.758	-29.08	-28.61	-32.637	-42.66
4	-0.101	0.101	-0.103	0.103	-27.876	-31.763	-36.312	-41.188	-44.854
5	-0.101	0.1	-0.101	0.1	-29.825	-33.741	-37.493	-41.239	-44.997
6	-0.101	0.1	-0.101	0.1	-30.	-33.75	-37.5	-41.25	-45.
7	-0.101	0.1	-0.101	0.1	-30.	-33.75	-37.5	-41.25	-45.

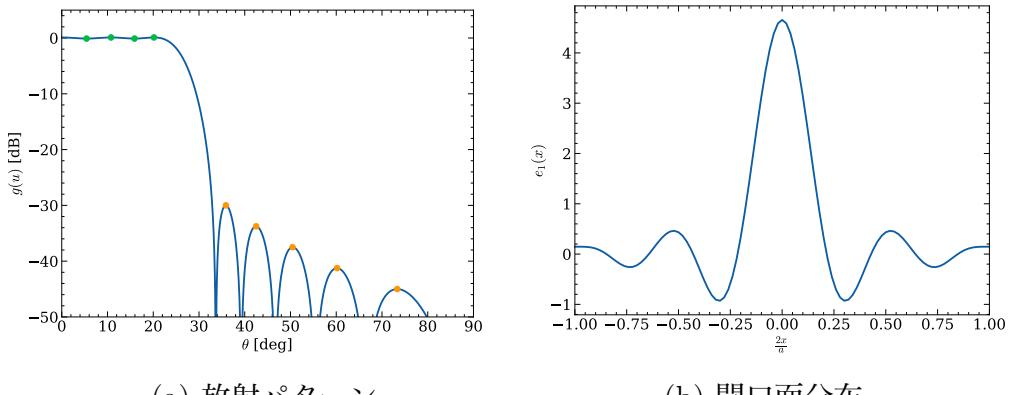


図 5.9. レメッツのアルゴリズムに基づくビーム成形. 主ビームのリップルは 0.1 dB, 与えたサイドローブレベルの値は, 第 1 から順に, $-30, -33.75, -37.5, -41.25, -45$ [dB].

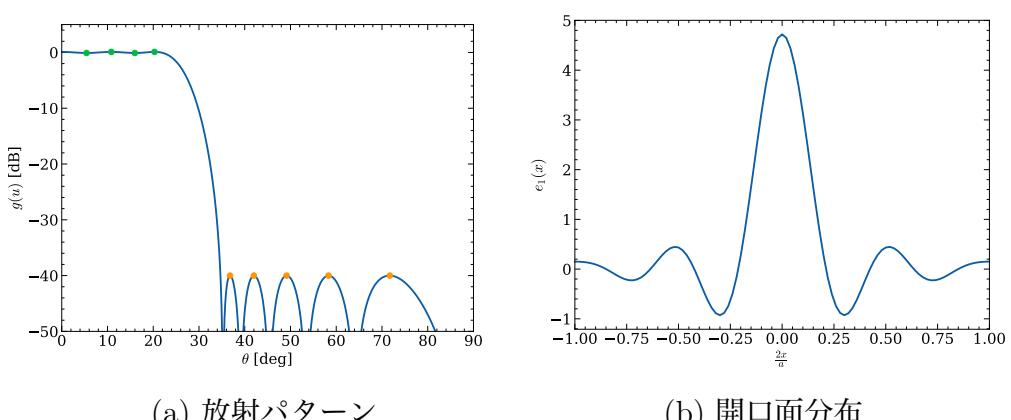


図 5.10. レメッツのアルゴリズムに基づくビーム成形. 主ビームのリップルは 0.1 dB, 与えたサイドローブレベルの値は, 全て -40 dB.

5.6 2次計画法による指向性合成

5.6.1 2次計画法のための定式化

1次元波源分布をフーリエ級数などの多項式で展開したとき、電界指向性は各項のフーリエ逆変換とその展開係数の線型結合で求められる。また、開口能率は展開係数に関する2次式の逆数に比例するので、開口能率を最大にするためには、展開係数に関する2次式を最小化すればよい。このとき、指向性は展開係数に関する1次式で表される。このような関係ゆえ、2次計画法 (quadratic programming, QP)^{*3}を用いれば、1次式で表される指向性（例えば、サイドローブレベル、交差偏波成分など）を制約条件とし、2次式で表される評価関数を最小にするように展開係数を最適化することができる。

ここでは、まずサイドローブレベルのみを制約条件とし、開口能率が最大となる展開係数 a_n を求める方法について説明する。最小化する評価関数（目的関数、objective function）は a_n の関数として、

$$F(a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{n=1}^N a_n^2 \quad (5.96)$$

最適化変数 a_n を要素とする列ベクトルを \mathbf{a} とすると、次のような2次形式で表される（肩文字 t は転置を示す）。

$$\min_{(\mathbf{a})} F(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}^t [\mathbf{H}] \mathbf{a} + \mathbf{c}^t \mathbf{a} \quad (5.97)$$

ただし、

- \mathbf{a} : 変数 a_n ($n = 1, 2, \dots, N$) を要素とする N 次元列ベクトル
- \mathbf{a}^t : 列ベクトル \mathbf{a} の転置
- $[\mathbf{H}]$: 2次の項 (second-order term) の係数からなる $N \times N$ 対称行列
- \mathbf{c} : 1次の項 (first-order term) の係数からなる N 次元列ベクトル
- \mathbf{c}^t : 列ベクトル \mathbf{c} の転置

^{*3} 2次計画法の参考文献は次のとおり。

- IMSL Fortran ライブライ ユーザーガイド Math v7.0, p.8-126. IMSL ルーチン QPROG/DQPROG は、一般線形統合／不等号拘束式に従う凸型 2次計画 (QP) 問題に対する Goldfarb と Idnani (1983 年) の双対 QP アルゴリズムの M. J. D. Powell の手法。
- 荻木 俊秀, 福島 雅夫, "FORTRAN77 最適化プログラミング," 第 4 章, 岩波書店 (1991).
- MATLAB (optimization toolkit) の関数 quadprog
- Python の SciPy の関数 scipy.optimize.minimize

1次元波源分布がフーリエ級数展開されている場合,

$$[H] = 2[U] \quad (5.98)$$

$$\mathbf{c} = (0) \quad (5.99)$$

ただし, $[U]$ は N 行 N 列の単位行列, (0) は要素が全てゼロの N 次元の列ベクトルを示す.

一方, 制約条件は,

- 等式制約条件: $g(0) = 1$, 正規化条件を用いた場合, $a_0 = 1$.
- 不等式制約条件: $-\epsilon \leq g(u) \leq \epsilon$ ($u_s \leq u \leq u_m$)

ただし, $\epsilon (> 0)$ はサイドローブレベル, u_s は主ビームより広角で, かつ第1サイドローブレベルまでの方向とし, u_m はある程度のサイドローブ数を含む角度までとする. また, 対称な波源分布を考え, 指向性関数 $g(u)$ は,

$$g(u) = \phi_0(u) + \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(u) \quad (5.100)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \phi_0(u) &= \frac{\sin u}{u} \\ &= \text{sinc} \left(\frac{u}{\pi} \right) \\ &= \text{sinc} \left(\frac{D}{\lambda} \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned} \phi_n(u) &= \frac{\sin(u - n\pi)}{u - n\pi} + \frac{\sin(u + n\pi)}{u + n\pi} \\ &= \text{sinc} \left(\frac{u}{\pi} - n \right) + \text{sinc} \left(\frac{u}{\pi} + n \right) \\ &= \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{2(-1)^n u^2}{u^2 - (n\pi)^2} \\ &= \text{sinc} \left(\frac{u}{\pi} \right) \cdot \frac{2(-1)^n u^2}{u^2 - (n\pi)^2} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (5.102)$$

これより, 不等式制約条件 (inequality constraints) は (例えば, MATLAB (optimization toolkit) の関数 quadprog),

$$[A_{ineq}] \mathbf{a} \leq \mathbf{b}_{ineq} \quad (5.103)$$

ここで,

$$[A_{ineq}] = \begin{pmatrix} [A'_s] \\ -[A'_s] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{ineq} = \begin{pmatrix} -\phi \\ \phi \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \mathbf{I}'_s \\ \mathbf{I}'_s \end{pmatrix} \quad (5.104)$$

いま, $u_s \leq u_i^{(s)} < u_m$ の範囲のサンプル点を $u_i^{(s)}$ ($i = 1, 2, \dots, N_s$) とすると, 列ベクトル ϕ は,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_0(u_1^{(s)}) & \phi_0(u_2^{(s)}) & \cdots & \phi_0(u_{N_s}^{(s)}) \end{pmatrix}^t \quad (5.105)$$

また, \mathbf{I}'_s は N_s 列の要素が全て 1 とする列ベクトルを示し,

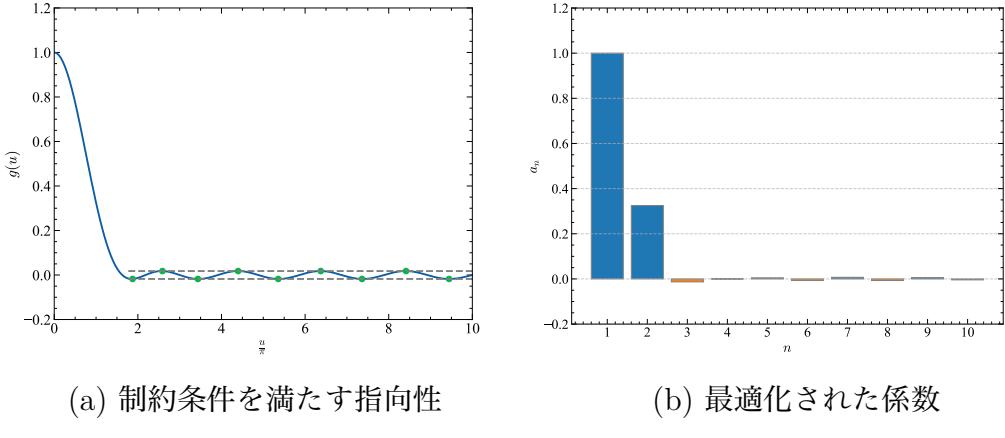
$$\mathbf{I}'_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^t \quad (5.106)$$

行列 $[A'_s]$ はサンプル点 $u_i^{(s)}$ ($i = 1, 2, \dots, N_s$) における計算より, N_s 行 N 列で表され次のようになる (右辺の肩文字 t は転置を示す).

$$[A'_s] = \begin{pmatrix} \phi_1(u_1^{(s)}) & \phi_1(u_2^{(s)}) & \cdots & \phi_1(u_{N_s}^{(s)}) \\ \phi_2(u_1^{(s)}) & \phi_2(u_2^{(s)}) & \cdots & \phi_2(u_{N_s}^{(s)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_N(u_1^{(s)}) & \phi_N(u_2^{(s)}) & \cdots & \phi_N(u_{N_s}^{(s)}) \end{pmatrix}^t \quad (5.107)$$

5.6.2 所定のサイドローブレベル以下で利得最大の指向性合成

図 5.11 はサイドローブレベル -35 dB の制約条件のもとで利得が最大となるように 2 次計画法によって最適化した結果を示したもので, 同図 (a) の電界指向性より, サイドローブレベルの大きさは制約条件を満たしていることが確認できる. 同図 (b) に励振係数 a_n を示し, 高次の係数が小さいことがわかる. また, 図 5.12 は最適化された放射パターンおよび



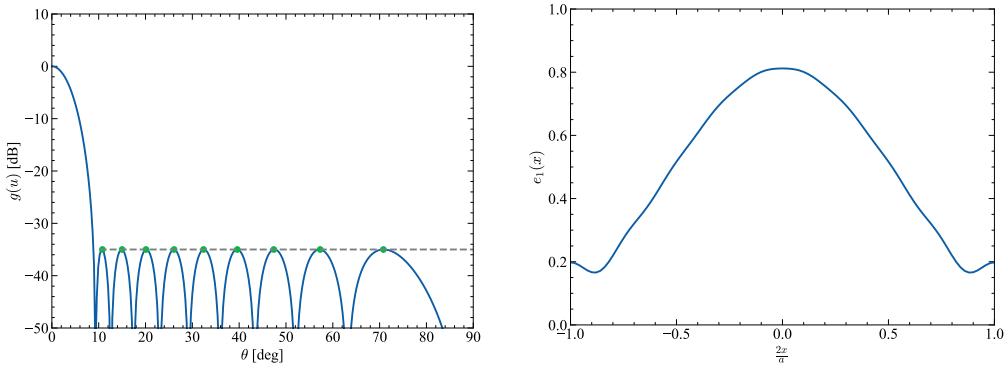
(a) 制約条件を満たす指向性

(b) 最適化された係数

図 5.11. サイドローブレベル -35 dB の制約条件 ($N = 9$)

波源分布を示したもので, 開口能率は 83 % である.

展開項数 N を変えた場合の係数 a_n ($n = 1, 2, \dots, N$) (ただし, $a_0 = 1$) を表に示す (サイドローブレベル -35 dB). 展開項数 N を増やせば開口能率はわずかに高くなっていく.



(a) 放射パターン

(b) 波源分布

図 5.12. 2 次計画法による指向性合成 ($N = 9$)

表 5.3 2 次計画法によって最適化した展開係数 ($a_0 = 1$)

N	1	2	3	5	9
a_1	0.3694	0.3471	0.3381	0.3346	0.3250
a_2	-	-0.0163	-0.0148	-0.0143	-0.0131
a_3	-	-	0.0032	0.0022	-0.0001
a_4	-	-	-	0.0019	0.0049
a_5	-	-	-	-0.0025	-0.0067
a_6	-	-	-	-	0.0072
a_7	-	-	-	-	-0.0070
a_8	-	-	-	-	0.0060
a_9	-	-	-	-	-0.0042
開口能率 η_i [%]	78.6	80.6	81.4	81.7	82.5

5.7 2次計画法によるビーム成形

5.7.1 2次計画法のための定式化

成形ビームの場合、制約条件は、

- 等式制約条件 : $g(u_e) = 1$
- 不等式制約条件 : $1 \leq g(u) \leq 1 + \hat{\epsilon}$ ($0 \leq u \leq u_e$)

ここで、

$$u_e = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta_e \quad (5.108)$$

ただし、カバレッジは $0 \leq u \leq u_e$ 、 θ_e は利得を高くしたいカバレッジ端 (edge of coverage, EOC) 方向を示す。また、指向性関数 $g(u)$ は正規化していないため、 a_0 も最適化変数として扱う。対称な波源分布による電界指向性 $g(u)$ は、

$$\begin{aligned} g(u) &= a_0 \phi_0(u) + \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(u) \\ &= \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(u) \end{aligned} \quad (5.109)$$

これより、まず等式制約条件 (equality constraints)

$$[A_{eq}] \mathbf{a} = \mathbf{b}_{eq} \quad (5.110)$$

における行列 $[A_{eq}]$ および列ベクトル \mathbf{b}_{eq} は、

$$[A_{eq}] = \begin{pmatrix} \phi_0(u_e) & \phi_1(u_e) & \cdots & \phi_N(u_e) \end{pmatrix} \quad (5.111)$$

$$\mathbf{b}_{eq} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad (5.112)$$

最適化変数は (要素数は $N + 1$)、

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_N \end{pmatrix}^t \quad (5.113)$$

また、不等式制約条件 (inequality constraints)

$$[A_{ineq}] \mathbf{a} \leq \mathbf{b}_{ineq} \quad (5.114)$$

は、主ビームの条件より、

$$[A_{ineq}] = \begin{pmatrix} [A_c] \\ -[A_c] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{ineq} = \begin{pmatrix} (1 + \hat{\epsilon}) \mathbf{I}_c \\ -\mathbf{I}_c \end{pmatrix} \quad (5.115)$$

ただし, \mathbf{I}_c は N_c 列の要素が全て 1 となる列ベクトルを示す.

$$\mathbf{I}_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots \end{pmatrix}^t \quad (5.116)$$

行列 $[A_c]$ は, $0 \leq u_i^{(c)} < u_e$ の範囲の点を $u_i^{(c)}$ ($i = 1, 2, \dots, N_c$) とすると,

$$[A_c] = \begin{pmatrix} \phi_0(u_1^{(c)}) & \phi_0(u_2^{(c)}) & \cdots & \phi_0(u_{N_c}^{(c)}) \\ \phi_1(u_1^{(c)}) & \phi_1(u_2^{(c)}) & \cdots & \phi_1(u_{N_c}^{(c)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_N(u_1^{(c)}) & \phi_N(u_2^{(c)}) & \cdots & \phi_N(u_{N_c}^{(c)}) \end{pmatrix}^t \quad (5.117)$$

この場合も所定のサイドローブレベル ϵ 以下にすることが可能で,

- 不等式制約条件: $-\epsilon \leq g(u) \leq \epsilon$ ($u_s \leq u \leq u_m$)

ただし, $\epsilon (> 0)$ はサイドローブレベル, u_s は主ビームより広角で, かつ第 1 サイドローブレベルまでの方向とする. よって,

$$[A_{ineq}] = \begin{pmatrix} [A_c] \\ -[A_c] \\ [A_s] \\ -[A_s] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{ineq} = \begin{pmatrix} (1 + \hat{\epsilon})\mathbf{I}_c \\ -\mathbf{I}_c \\ \epsilon\mathbf{I}_s \\ \epsilon\mathbf{I}_s \end{pmatrix} \quad (5.118)$$

行列 $[A_s]$ はサンプル点 $u_i^{(s)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N_s$) における計算より, N_s 行 ($N + 1$) 列で表され次のようになる.

$$[A_s] = \begin{pmatrix} \phi_0(u_1^{(s)}) & \phi_0(u_2^{(s)}) & \cdots & \phi_0(u_{N_s}^{(s)}) \\ \phi_1(u_1^{(s)}) & \phi_1(u_2^{(s)}) & \cdots & \phi_1(u_{N_s}^{(s)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_N(u_1^{(s)}) & \phi_N(u_2^{(s)}) & \cdots & \phi_N(u_{N_s}^{(s)}) \end{pmatrix}^t \quad (5.119)$$

また, \mathbf{I}_s は N_s 列の要素が全て 1 となる列ベクトルを示す.

$$\mathbf{I}_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots \end{pmatrix}^t \quad (5.120)$$

5.7.2 所定のサイドローブレベル以下を実現する成形ビームの指向性合成

図 5.13 は主ビーム範囲 15° までを 0 dB 以上でリップルを 0.2 dB, カバレッジのエッジ方向の利得 (略して EOC 利得という) に対してサイドローブレベル -35 dB となる制約条件のもとで, EOC 利得が最大となるように 2 次計画法によって最適化した結果を示したもので, 同図 (a) の電界指向性より, 主ビームならびにサイドローブレベルの大きさは制約条件を満たしていることが確認できる. 同図 (b) に励振係数 a_n を示し, 主ビームを制御す

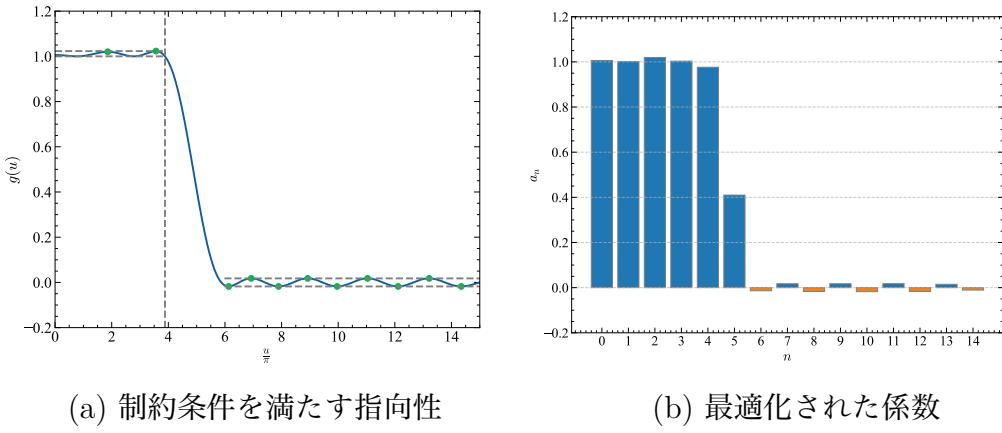


図 5.13. サイドローブレベル -35 dB の制約条件 ($N = 14$)

る場合、高次の係数も大きくなることがわかる。また、この場合、サイドローブレベルのみの指向性合成に比べてより高次の係数が必要となる。また、図 5.14 は EOC 利得に対する相対的な放射パターンおよび波源分布を示したもので、主ビームのリップルの最大値は 0.2 dB、サイドローブピーク値は -35 dB であることが確認できる。同図 (b) より sinc 関数のような波源分布になることもわかる。

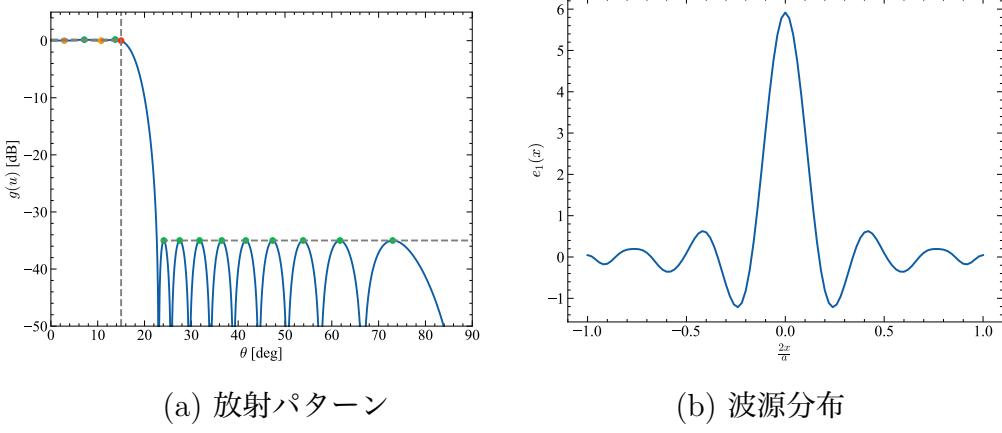


図 5.14. 2 次計画法による指向性合成 ($N = 14$)

CHAPTER A

付録

A.1 ソニンの第1積分

ソニン（ニコライ・ヤコヴレヴィチ・ソニン（ロシアの数学者））の第1積分（Sonine's first finite integral）^{*1}は

$$J_{\mu+\nu+1}(z) = \frac{z^{\nu+1}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\mu(z \sin \theta) \sin^{\mu+1} \theta \cos^{2\nu+1} \theta d\theta \quad (\text{A.1})$$

上式において、

$$z \rightarrow x, \quad \sin \theta \rightarrow t, \quad \mu \rightarrow n, \quad \nu \rightarrow m - n - 1 \quad (\text{A.2})$$

とすると、 $\cos \theta d\theta = dt$ より、ソニンの積分（Sonine's integral）は、

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{x^{m-n}}{2^{m-n-1} \Gamma(m-n)} \int_0^1 J_n(xt) t^{n+1} (1-t^2)^{m-n-1} dt \\ &= \frac{2x^{m-n}}{2^{m-n} \Gamma(m-n)} \int_0^1 J_n(xt) t^{n+1} (1-t^2)^{m-n-1} dt \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$n = 0$ のとき、

$$J_m(x) = \frac{x^m}{2^{m-1} \Gamma(m)} \int_0^1 J_0(xt) t (1-t^2)^{m-1} dt \quad (\text{A.4})$$

$m \rightarrow m+1$ とすると、

$$J_{m+1}(x) = \frac{x^{m+1}}{2^m \Gamma(m+1)} \int_0^1 J_0(xt) t (1-t^2)^m dt \quad (\text{A.5})$$

^{*1} G. N. Watson, "Theory of Bessel Functions," 2d ed., p.373, Macmillan, New York (1945).

よって、次式が得られる。

$$\int_0^1 (1-t^2)^m J_0(xt) t dt = \frac{2^m \Gamma(m+1) J_{m+1}(x)}{x^{m+1}} \quad (\text{A.6})$$

ただし、 $\Gamma(m+1)$ はガンマ関数を示し、 m が正整数のとき、

$$\Gamma(m+1) = m! \quad (\text{A.7})$$

A.2 Laplace の積分

積分 $I(a)$

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-bx^2} \cos(2ax) dx \quad (\text{A.8})$$

を a について微分すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dI}{da} &= \frac{d}{da} \left(\int_0^\infty e^{-bx^2} \cos(2ax) dx \right) \\ &= \int_0^\infty (-2xe^{-bx^2}) \sin(2ax) dx \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

部分積分より、

$$\begin{aligned} \frac{dI}{da} &= \left[\frac{e^{-bx^2}}{b} \cdot \sin(2ax) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-bx^2}}{b} \cdot 2a \cos(2ax) dx \\ &= -\frac{2a}{b} \int_0^\infty e^{-bx^2} \cos(2ax) dx \\ &= -\frac{2a}{b} I \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

したがって、次の微分方程式を a について解けばよいことになる。

$$\frac{dI(a)}{da} = -\frac{2a}{b} I(a) \quad (\text{A.11})$$

これより、

$$\int \frac{dI}{I} = -\frac{2}{b} \int a da \quad (\text{A.12})$$

この不定積分を実行すると、

$$\log_e I = -\frac{2}{b} \frac{a^2}{2} + C' = -\frac{a^2}{b} + C' \quad (\text{A.13})$$

よって、 $I(a)$ は次のようになる (C' および C は積分定数)。

$$I(a) = Ce^{-\frac{a^2}{b}} \quad (\text{A.14})$$

いま、 $a = 0$ とおくと、

$$I(0) = C \quad (\text{A.15})$$

ゆえ、 $I(0)$ より C が決まる。

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-bx^2} dx = \int_0^\infty e^{-by^2} dy \quad (\text{A.16})$$

これより, $I^2(0)$ を求めると次のようになる.

$$\begin{aligned} I^2(0) &= \left(\int_0^\infty e^{-bx^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-by^2} dy \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-b(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

ただし, $0 \leq x \leq \infty$, $0 \leq y \leq \infty$. また,

$$x \equiv r \cos \theta \quad (\text{A.18})$$

$$y \equiv r \sin \theta \quad (\text{A.19})$$

とおいて変数変換すると,

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{A.20})$$

$$dxdy = r dr d\theta \quad (\text{A.21})$$

より,

$$\begin{aligned} I^2(0) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-br^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty e^{-br^2} r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-br^2} r dr \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

さらに, $r^2 \equiv t$ とおいて,

$$2rdr = dt \quad (\text{A.23})$$

より, 変数変換すると,

$$\begin{aligned} I^2(0) &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-bt} \frac{1}{2} dt = \frac{\pi}{4} \left[-\frac{1}{b} e^{-bt} \right]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{4b} \left(-\frac{1}{e^\infty} + e^0 \right) \\ &= \frac{\pi}{4b} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

よって,

$$C = I(0) = \int_0^\infty e^{-bx^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \quad (\text{A.25})$$

これより, $I(a)$ は次のようになる.

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-bx^2} \cos(2ax) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{a^2}{b}} \quad (\text{A.26})$$

これを, **Laplace の積分**という.

A.3 三角関数の公式

A.3.1 三角関数の積和公式

三角関数の積和公式（積 → 和・差）を求めるため、

$$\begin{aligned} & e^{j(\alpha+\beta)} + e^{j(\alpha-\beta)} \\ &= e^{j\alpha}(e^{j\beta} + e^{-j\beta}) \\ &= (\cos \alpha + j \sin \alpha)2 \cos \beta \\ &= 2 \cos \alpha \cos \beta + j2 \sin \alpha \cos \beta \\ &= \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} + j \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

同様にして、

$$\begin{aligned} & e^{j(\alpha+\beta)} - e^{j(\alpha-\beta)} \\ &= e^{j\alpha}(e^{j\beta} - e^{-j\beta}) \\ &= (\cos \alpha + j \sin \alpha)j2 \sin \beta \\ &= j2 \cos \alpha \sin \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \\ &= \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} + j \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

これより、

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \quad (\text{A.29})$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \quad (\text{A.30})$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \quad (\text{A.31})$$

$$- 2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \quad (\text{A.32})$$

A.3.2 三角関数の和積公式

三角関数の和積公式（和・差 → 積）は、

$$A = \alpha + \beta \quad (\text{A.33})$$

$$B = \alpha - \beta \quad (\text{A.34})$$

において、

$$\alpha = \frac{A+B}{2} \quad (\text{A.35})$$

$$\beta = \frac{A-B}{2} \quad (\text{A.36})$$

より、

$$\begin{aligned} e^{jA} + e^{jB} &= e^{j\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right)} + e^{j\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right)} \\ &= e^{j\frac{A+B}{2}} \left(e^{j\frac{A+B}{2}} + e^{j\frac{A-B}{2}} \right) \\ &= \left\{ \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) + j \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \right\} 2 \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\ &= \cos A + \cos B + j(\sin A + \sin B) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} e^{jA} - e^{jB} &= e^{j\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right)} - e^{j\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right)} \\ &= e^{j\frac{A+B}{2}} \left(e^{j\frac{A+B}{2}} - e^{j\frac{A-B}{2}} \right) \\ &= \left\{ \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) + j \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \right\} j 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \\ &= \cos A - \cos B + j(\sin A - \sin B) \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

これより、

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (\text{A.39})$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (\text{A.40})$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (\text{A.41})$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (\text{A.42})$$

A.4 離散フーリエ変換

■ **離散フーリエ変換対** 時間 t 領域と周波数 f 領域とのフーリエ変換対は,

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (\text{A.43})$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi f t} df \quad (\text{A.44})$$

時間領域のサンプル間隔を $\Delta t \equiv T$, 周波数領域のサンプル間隔を $\Delta f \equiv \frac{1}{NT}$ とおくと, 離散フーリエ変換対は次のようになる.

$$G(n\Delta f) = \sum_{m=0}^{N-1} g(m\Delta t) e^{-j2\pi nm/N} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{A.45})$$

$$g(m\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} G(n\Delta f) e^{j2\pi nm/N} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{A.46})$$

ただし,

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} \quad (\text{A.47})$$

■ **単一のインパルスのフーリエ変換** ここでは, フーリエ変換対の離散化の詳細について説明する. 時間 t 領域と周波数 f 領域とのフーリエ変換対を再記して,

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt, \quad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi f t} df \quad (\text{A.48})$$

関数 $h(t)$ として, 時間領域における単一のインパルスを考えると,

$$h(t) = \delta(t - t') \quad (\text{A.49})$$

ただし, $\delta(t)$ はデルタ関数であり, 次式を満足する.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) \quad (\text{A.50})$$

これをフーリエ変換した $H(f)$ は,

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t'} \quad (\text{A.51})$$

逆フーリエ変換した $h(t)$ は,

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t'} e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-t')} df = \delta(t - t') \quad (\text{A.52})$$

同様に関数 $H(f)$ として、周波数領域における单一のインパルスを考えると、

$$H(f) = \delta(f - f') \quad (\text{A.53})$$

これを逆フーリエ変換した $h(t)$ は、

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f') e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f' t} \quad (\text{A.54})$$

フーリエ変換した $H(f)$ は、

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f(f-f')} dt = \delta(f - f') \quad (\text{A.55})$$

■ インパルス列のフーリエ変換 関数 $h(t)$ として、時間領域におけるインパルス列（周期 T ）を考えると、

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (\text{A.56})$$

このような周期関数は、フーリエ級数で表すことができ、

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \quad (\text{A.57})$$

ここで、 c_k はフーリエ係数を示し、 $h(t)$ の任意の一周期より求めると、

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{nT-\Delta T}^{(n+1)T-\Delta T} h(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt \quad (\text{A.58})$$

これより、 $h(t)$ は、

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t' - nT) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t'} dt' \right\} e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \quad (\text{A.59})$$

これをフーリエ変換した $H(f)$ は、

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t' - nT) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t'} dt' \right\} e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \right] e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{A.60})$$

いま、

$$\bar{t} \equiv t' - nT - t \quad (\text{A.61})$$

とおき, t' を \bar{t} に変数変換すると,

$$\begin{aligned}
H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{t} + t) e^{-j2\pi\frac{k}{T}(\bar{t}+nT)} d\bar{t} e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{t} + t) e^{-j2\pi f t} dt \right) e^{-j2\pi\frac{k}{T}(\bar{t}+nT)} d\bar{t} \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f \bar{t}} e^{-j2\pi\frac{k}{T}\bar{t}} d\bar{t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(f - \frac{k}{T})\bar{t}} d\bar{t} \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{k}{T} \right)
\end{aligned} \tag{A.62}$$

■ 時間領域における標本化 時間領域の関数 $h(t)$ の標本化 (サンプリング) を, 次の周期 T のインパルス列 $\Delta_0(t)$

$$\Delta_0(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT) \tag{A.63}$$

より行う (図 A.1(b) 左参照). 標本化の結果 (図 A.1(c) 左参照),

$$h(t)\Delta_0(t) = h(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(mT) \delta(t - mT) \tag{A.64}$$

このとき, インパルス列 $\Delta_0(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{\Delta}_0(f)$ は (図 A.1(b) 右参照),

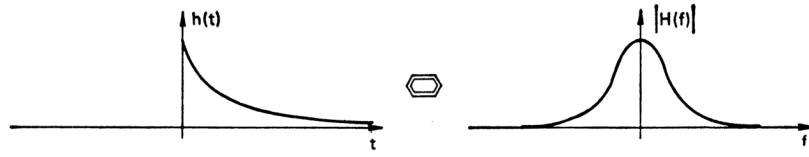
$$\tilde{\Delta}_0(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{k}{T} \right) \tag{A.65}$$

よって, $h(t)\Delta_0(t)$ のフーリエ変換は, $H(f)$ と $\tilde{\Delta}_0(f)$ の畠み込み積分で求められ, 次のようになる (図 A.1(c) 右参照).

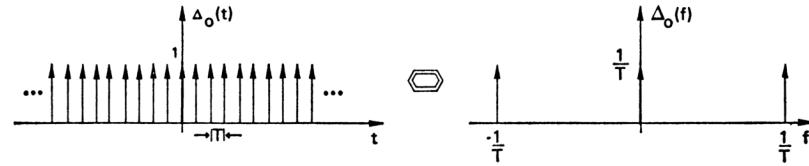
$$\begin{aligned}
H(f) * \tilde{\Delta}_0(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f') \tilde{\Delta}_0(f - f') df' = \int_{-\infty}^{\infty} H(f') \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - f' - \frac{k}{T} \right) df' \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(f') \delta \left(f - f' - \frac{k}{T} \right) df' = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H \left(f - \frac{k}{T} \right)
\end{aligned} \tag{A.66}$$

■ 時間領域における打ち切り 次に, 時間領域の幅 T_0 の方形関数 $x(t)$

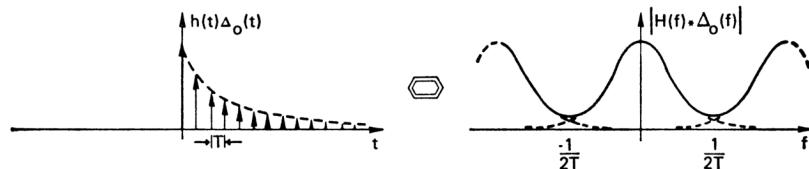
$$x(t) = \begin{cases} 1 & \left(-\frac{T}{2} < t < T_0 - \frac{T}{2} \right) \\ 0 & \text{(それ以外)} \end{cases} \tag{A.67}$$



(a) 連続フーリエ変換対



(b) インパルス列のフーリエ変換対



(c) インパルス列による時間領域の標本化

図 A.1. 離散フーリエ変換対を求める過程 (時間領域における標本化)

より (図 A.2(a) 左参照), 時間領域における打ち切りを行うと (図 A.2(b) 左参照),

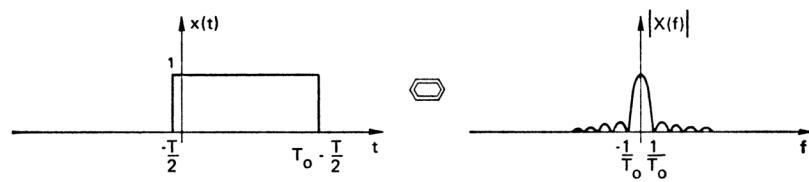
$$\begin{aligned}
 h(t)\Delta_0(t)x(t) &= \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(mT)\delta(t-mT) \right\} x(t) \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} h(mT)\delta(t-mT) \equiv h_0(t)
 \end{aligned} \tag{A.68}$$

ただし, $N (= T_0/T)$ はサンプル点数を示す. このとき, 方形関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(f)$ は (図 A.2(a) 右参照),

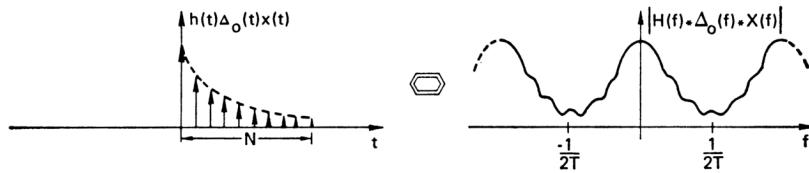
$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{T_0-\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft}dt = \left[\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right]_{-\frac{T}{2}}^{T_0-\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{e^{-j2\pi f(T_0-\frac{T}{2})} - e^{j2\pi f\frac{T}{2}}}{-j2\pi f} = e^{-j\pi f(T_0-\frac{T}{2})} \frac{e^{-j\pi f(T_0-\frac{T}{2})} - e^{j\pi f(T_0-\frac{T}{2})}}{-j2\pi f} \\
 &= \left(T_0 - \frac{T}{2} \right) e^{-j\pi f(T_0-\frac{T}{2})} \frac{\sin\left(\pi f\left(T_0 - \frac{T}{2}\right)\right)}{\pi f\left(T_0 - \frac{T}{2}\right)}
 \end{aligned} \tag{A.69}$$

また, $h_0(t)$ のフーリエ変換 $H_0(f)$ は (図 A.2(b) 右参照).

$$\begin{aligned}
 H_0(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} h(mT) \delta(t - mT) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} h(mT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) e^{-j2\pi f t} dt = \sum_{m=0}^{N-1} h(mT) e^{-j2\pi f mT}
 \end{aligned} \tag{A.70}$$



(a) 時間領域の方形関数とそのフーリエ変換



(b) 時間領域での打ち切りとそのフーリエ変換

図 A.2. 離散フーリエ変換対を求める過程 (時間領域における打ち切り)

■ **周波数領域における標本化** 周波数領域における標本化を行えば, 離散フーリエ変換対が得られる. このとき, 先に示したように周波数領域におけるインパルス列の逆フーリエ変換もまた, インパルス列 $\Delta_1(t)$ となり (図 A.3(a) 左参照)

$$\Delta_1(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t - rT_0) \tag{A.71}$$

で表すと, 時間領域では次のように $h_0(t)$ と $\Delta_1(t)$ の畳込み積分となる.

$$\begin{aligned}
 h_0(t) * \Delta_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau) \Delta_1(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau) \left(T_0 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(t - sT_0 - \tau) \right) d\tau \\
 &= T_0 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau) \delta(t - sT_0 - \tau) d\tau = T_0 \sum_{s=-\infty}^{\infty} h_0(t - sT_0) \\
 &= T_0 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{N-1} h(mT) \delta(t - sT_0 - mT) \right) \equiv h_{\sim}(t)
 \end{aligned} \tag{A.72}$$

さらに、これをフーリエ変換すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 H_{\sim}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{\sim}(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} T_0 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{N-1} h(mT) \delta(t - sT_0 - mT) \right) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= T_0 \sum_{m=0}^{N-1} h(mT) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(t - sT_0 - mT) \right\} e^{-j2\pi f t} dt
 \end{aligned} \tag{A.73}$$

変数変換 $t' \equiv t - mT$ より、

$$\begin{aligned}
 H_{\sim}(f) &= T_0 \sum_{m=0}^{N-1} h(mT) e^{-j2\pi f mT} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(t' - sT_0) \right\} e^{-j2\pi f t'} dt' \\
 &= T_0 \sum_{m=0}^{N-1} h(mT) e^{-j2\pi f mT} \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)
 \end{aligned} \tag{A.74}$$

ここで、 $T_0 = NT$ より、

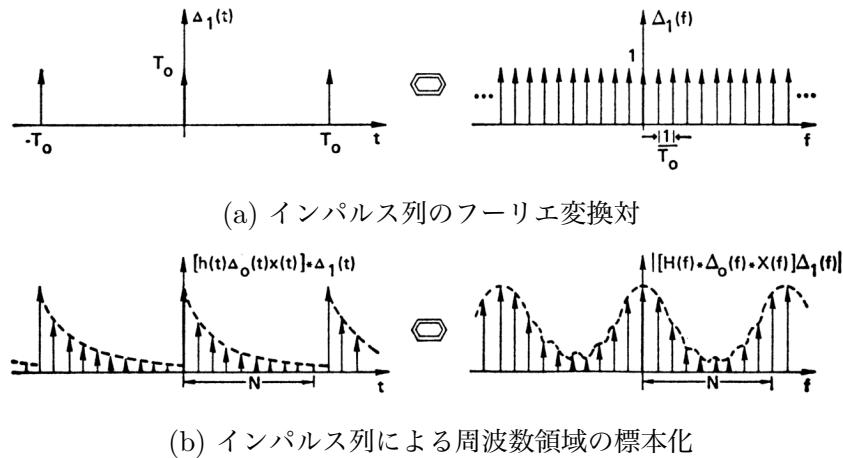


図 A.3. 離散フーリエ変換対を求める過程（周波数領域における標本化）

$$\begin{aligned}
 H_{\sim}(f) &= \sum_{m=0}^{N-1} h(mT) e^{-j2\pi f mT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{NT}\right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} h(mT) e^{-j2\pi \frac{n}{NT} mT} \delta\left(f - \frac{n}{NT}\right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{N-1} h(mT) e^{-j2\pi nm/N} \delta\left(f - \frac{n}{NT}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{A.75}$$

いま、

$$f = \frac{n'}{NT} \quad (n' = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty) \tag{A.76}$$

のとき,

$$H_{\sim} \left(\frac{n'}{NT} \right) = \sum_{m=0}^{N-1} h(mT) e^{-j2\pi n' m/N} \quad (n' = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty) \quad (\text{A.77})$$

■ **離散フーリエ変換対** いま, $n' \equiv n'' + lN$ ($n'' = 0, 1, \dots, N-1$), ($l = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$) とおくと,

$$\begin{aligned} H_{\sim} \left(\frac{n'' + lN}{NT} \right) &= \sum_{m=0}^{N-1} h(mT) e^{-j2\pi(n'' + lN)m/N} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h(mT) e^{-j2\pi n'' m/N} e^{-j2\pi l m} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h(mT) e^{-j2\pi n'' m/N} = H_{\sim} \left(\frac{n''}{NT} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

これが、**離散フーリエ変換**である。同様に離散フーリエ逆変換は（導出省略），

$$h_{\sim}(mT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H \left(\frac{n}{NT} \right) e^{j2\pi nm/N} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{A.79})$$

これより、時間領域のサンプル間隔を $\Delta t \equiv T$ 、周波数領域のサンプル間隔を $\Delta f \equiv \frac{1}{NT}$ とおくと、離散フーリエ変換対は次のようになる。

$$G(n\Delta f) = \sum_{m=0}^{N-1} g(m\Delta t) e^{-j2\pi nm/N} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{A.80})$$

$$g(m\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} G(n\Delta f) e^{j2\pi nm/N} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{A.81})$$

ただし，

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} \quad (\text{A.82})$$

■ **MATLAB** MATLAB の 1 次元高速フーリエ変換 (FFT) の場合, $\bar{n} \equiv n+1$, $\bar{m} \equiv m+1$ のときの離散データを $g_{\bar{m}}$, $G_{\bar{n}}$ で表わすと，

$$G_{\bar{n}} = \Delta t \sum_{\bar{m}=1}^N g_{\bar{m}} \omega_N^{(\bar{n}-1)(\bar{m}-1)}, \quad g_{\bar{m}} = \Delta f \sum_{\bar{n}=1}^N G_{\bar{n}} \omega_N^{-(\bar{n}-1)(\bar{m}-1)} \quad (\text{A.83})$$

ただし (N はサンプル点数)，

$$\omega_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (\text{A.84})$$

- フーリエ変換: $G = \text{fft}(g)$, $G = \text{fft}(g, N)$

- 逆フーリエ変換: $g = \text{ifft}(G)$, $g = \text{ifft}(G, N)$

MATLAB の 2 次元高速フーリエ変換 (FFT) の場合,

- 2 次元フーリエ変換: $G = \text{fft2}(g)$, $G = \text{fft2}(g, N)$
- 2 次元逆フーリエ変換: $g = \text{ifft2}(G)$, $g = \text{ifft2}(G, N)$

ただし, N はサンプル点数を示す.

関連する MATLAB 関数は,

- DC 成分をスペクトルの中心に移動: $Y = \text{fftshift}(X)$
- 上の逆のシフト: $Y = \text{ifftshift}(X)$
- 指定した値 m 以上の最小の 2 のべき乗値 n : $n = \text{nextpow2}(m)$

MATLAB 関数 $\text{fftshift}(X)$ より, ベクトル X (1 次元) の右半分と左半分を入れ替え, あるいは行列 X (2 次元) の第 1 象限と第 3 象限を, 第 2 象限と第 4 象限を入れ替えることができる.

■ 例題 方形関数 (1 次元) $h(t)$ を高速フーリエ変換せよ. また, 方形関数の連続フーリエ変換 $H(f)$ も計算し, 比較せよ.

(略解) 時間領域の方形関数 $h(t)$ として, $-T_r \leq t \leq T_r$ で大きさ A (定数) の方形関数を考え, フーリエ変換すると,

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T_r}^{T_r} Ae^{-j2\pi ft} dt = A \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \right]_{-T_r}^{T_r} \\ &= A \frac{e^{-j2\pi f T_r} - e^{j2\pi f T_r}}{-j2\pi f} = A \frac{-j2 \sin(2\pi f T_r)}{-j2\pi f} = 2AT_r \frac{\sin(2\pi f T_r)}{2\pi f T_r} \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

■ フーリエ変換対の別の形 角周波数 $\omega (= 2\pi f)$ を用いて連続フーリエ変換対を表わすと, $d\omega = 2\pi df$ より,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\text{A.86})$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{A.87})$$

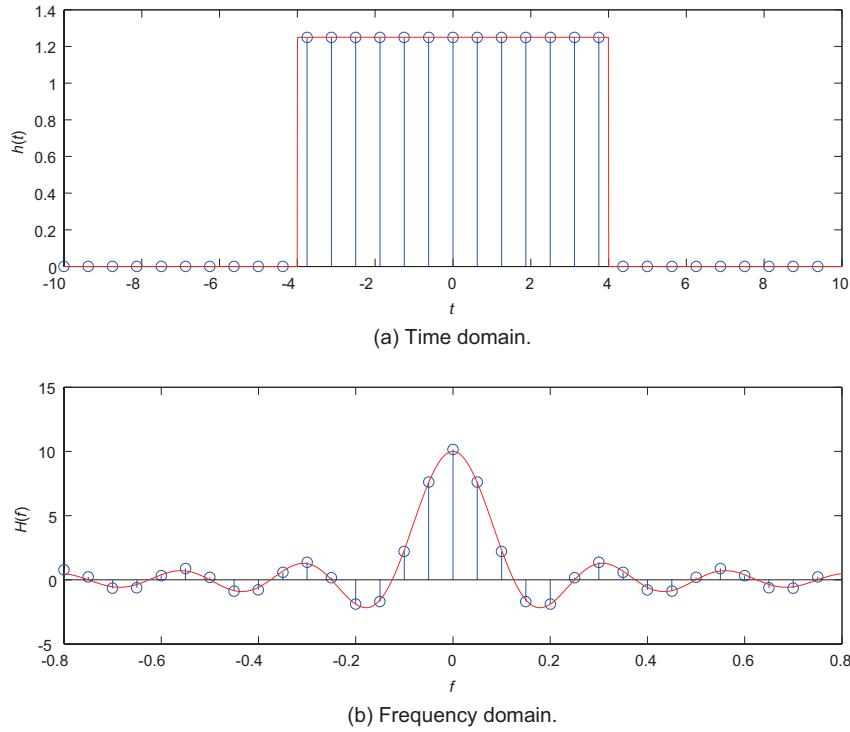


図 A.4. 高速フーリエ変換および連続フーリエ変換による計算結果

あるいは、次のようなフーリエ変換対も考えられる.

$$H(\omega) = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (A.88)$$

$$h(t) = a_2 \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (A.89)$$

ただし、 a_1 、 a_2 は任意ではない.

$a_1 a_2$ を求めるため、フーリエ変換対の第 1 式の $H(\omega)$ を第 2 式に代入すると、

$$\begin{aligned} h(\tau) &= a_2 \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = a_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(a_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= a_1 a_2 \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(\tau-t)} d\omega \right) dt \end{aligned} \quad (A.90)$$

ここで、デルタ関数の公式を $\omega = 2\pi f$ で変数変換すると、 $d\omega = 2\pi df$ より、

$$\delta(\tau - t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(\tau-t)} df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(\tau-t)} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (A.91)$$

よって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(\tau-t)} d\omega = 2\pi \delta(\tau - t) \quad (A.92)$$

これより、

$$h(\tau) = a_1 a_2 \int_{-\infty}^{\infty} h(t) 2\pi \delta(\tau - t) dt = a_1 a_2 h(\tau) 2\pi \quad (\text{A.93})$$

したがって、

$$a_1 a_2 = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{A.94})$$

このとき、離散フーリエ変換対は次のようになる。

$$G(n\Delta\omega) = a_1 \sum_{m=0}^{N-1} g(m\Delta t) e^{-jnm/N} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{A.95})$$

$$g(m\Delta t) = \frac{a_2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G(n\Delta\omega) e^{jnm/N} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{A.96})$$

ただし、

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t} \quad (\text{A.97})$$

A.5 直交曲線座標系

A.5.1 はじめに

電磁気学等において、問題に応じて座標系（円筒・球座標など）を使い分けることは不可欠です。しかしながら、直角座標系以外では場所によって単位ベクトルの向きが変わるため、計算が複雑になります。ここでは、直交曲線座標系によって統一的に扱う方法を説明します。これにより、あらゆる座標系の演算（grad, div, rot）を体系的に導出できるようになります。

A.5.2 直交曲線座標の定義

任意の直交曲線座標系を記述するため、位置ベクトル、基底ベクトル、単位ベクトルを定義し、それらの大きさを特徴づけるスケールファクター（計量係数）を導入します。

■ **位置ベクトルと変位ベクトル** 3次元空間内的一点を、一般的な直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) で指定する。まず、原点からこの点への位置ベクトルを $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ とする。この点から座標が微小量 (du_1, du_2, du_3) だけ変化した近傍の点 $(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$ の位置ベクトル点 $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ を考える。この二点間の変位ベクトル $d\mathbf{r}$ は、 \mathbf{r} の全微分として次のように表される。

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 \quad (\text{A.98})$$

ここで、各座標軸 u_i に沿った基底ベクトル \mathbf{a}_i を次のように定義する。

$$\mathbf{a}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.99})$$

これにより、変位ベクトル $d\mathbf{r}$ は基底ベクトルを用いて次のように表現できる。

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i du_i \quad (\text{A.100})$$

■ **スケールファクターと単位ベクトル** 基底ベクトル \mathbf{a}_i は、座標成分 u_i に沿うベクトルであり、直交性

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

が成り立つものとして直交曲線座標系を考えていく。まず、大きさを 1 として単位ベクトル \mathbf{i}_i を

$$\mathbf{i}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_i|} = \frac{\mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i}} \quad (\text{A.101})$$

で定義する。これらの単位ベクトルは互いに直交し、正規直交基底を形成する。この正規直交性は、クロネッカーデルタ δ_{ij} を用いて次のように表される。

$$\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} = 1 \text{ if } i = j, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ if } i \neq j) \quad (\text{A.102})$$

また、基底ベクトル \mathbf{a}_i の大きさ h_i を「スケールファクター (scale factor)」または「計量係数」と呼び、次のように定義する ($i = 1, 2, 3$)。

$$h_i = |\mathbf{a}_i| = \sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}} \quad (\text{A.103})$$

これより、 $\mathbf{a}_i = h_i \mathbf{i}_i$ 。

■ **ベクトル積** 直交単位ベクトル \mathbf{i}_i ($i = 1, 2, 3$) に関するベクトル積は明らかに、

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \quad (\text{A.104})$$

$$\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \quad (\text{A.105})$$

$$\mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \quad (\text{A.106})$$

これより、 \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$) に関するベクトル積は、

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = h_1 \mathbf{i}_1 \times h_2 \mathbf{i}_2 = h_1 h_2 \mathbf{i}_3 \quad (\text{A.107})$$

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = h_2 \mathbf{i}_2 \times h_3 \mathbf{i}_3 = h_2 h_3 \mathbf{i}_1 \quad (\text{A.108})$$

$$\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = h_3 \mathbf{i}_3 \times h_1 \mathbf{i}_1 = h_3 h_1 \mathbf{i}_2 \quad (\text{A.109})$$

A.5.3 積分の積素

スケールファクターと単位ベクトルを用いて、直交曲線座標系における微小な長さ（線素）、面積（面素）、体積（体積素）を計算するための要素を導出する。これらは、ベクトル解析における線積分、面積分、体積積分で用いる要素となる。

■ **線要素** 変位ベクトル $d\mathbf{r}$ は、 $\mathbf{a}_i = h_i \mathbf{i}_i$ の関係を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= h_1 \mathbf{i}_1 du_1 + h_2 \mathbf{i}_2 du_2 + h_3 \mathbf{i}_3 du_3 = \sum_{i=1}^3 h_i \mathbf{i}_i du_i \\ &= \sum_{i=1}^3 d\mathbf{s}_i \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

上式の $d\mathbf{s}_i$ はベクトル線要素 $d\mathbf{s}_i$ を示し、その大きさであるスカラー線要素 ds_i ($i = 1, 2, 3$) は

$$ds_i = |d\mathbf{s}_i| = h_i du_i \quad (\text{A.111})$$

これより、

$$ds_i = h_i \mathbf{i}_i du_i \equiv \mathbf{i}_i ds_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.112})$$

また、

$$ds_1 = h_1 du_1, \quad ds_2 = h_2 du_2, \quad ds_3 = h_3 du_3 \quad (\text{A.113})$$

微小変位ベクトルの大きさ（線素）の2乗 ds^2 は、 $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ を計算することで得られ、各スカラー線要素の2乗和となる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2 \\ &= ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 = \sum_{i=1}^3 ds_i^2 \end{aligned} \quad (\text{A.114})$$

■ **面要素** 微小な面要素は、2つのベクトル線要素のベクトル積として定義される。例えば、 u_1 座標が一定の面に直交する（すなわち \mathbf{i}_1 方向を向く）ベクトル面要素 $d\mathbf{a}_1$ は、ベクトル線要素 ds_2 と ds_3 のベクトル積で与えられる。

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_1 &= ds_2 \times ds_3 = h_2 \mathbf{i}_2 du_2 \times h_3 \mathbf{i}_3 du_3 \\ &= h_2 h_3 \mathbf{i}_1 du_2 du_3 \equiv da_1 \mathbf{i}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.115})$$

同様にして、ベクトル面要素 $d\mathbf{a}_2$, $d\mathbf{a}_3$ は、

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_2 &= ds_3 \times ds_1 = h_3 \mathbf{i}_3 du_3 \times h_1 \mathbf{i}_1 du_1 \\ &= h_3 h_1 \mathbf{i}_2 du_3 du_1 \equiv da_2 \mathbf{i}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.116})$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_3 &= ds_1 \times ds_2 = h_1 \mathbf{i}_1 du_1 \times h_2 \mathbf{i}_2 du_2 \\ &= h_1 h_2 \mathbf{i}_3 du_1 du_2 \equiv da_3 \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.117})$$

よって、各ベクトル面要素の大きさであるスカラ一面要素 da_i ($i = 1, 2, 3$) は、次のようになる。

$$da_1 = h_2 h_3 du_2 du_3 \quad (\text{A.118})$$

$$da_2 = h_3 h_1 du_3 du_1 \quad (\text{A.119})$$

$$da_3 = h_1 h_2 du_1 du_2 \quad (\text{A.120})$$

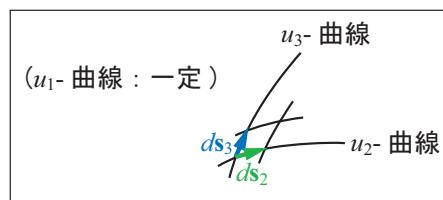


図 A.5. ベクトル線要素

■ **体積要素** 微小体積要素 dv は、3つのベクトル線要素 $d\mathbf{s}_1, d\mathbf{s}_2, d\mathbf{s}_3$ が張る微小な平行六面体の体積に等しい。これは、これらのベクトルのスカラー三重積によって次のように計算できる。

$$\begin{aligned} dv &= d\mathbf{s}_1 \cdot (d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{s}_3) = h_1 \mathbf{i}_1 du_1 \cdot h_2 h_3 \mathbf{i}_1 du_2 du_3 \\ &= h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \end{aligned} \quad (\text{A.121})$$

A.5.4 ベクトル演算子

いま、直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) の各成分が、直角座標系 (x, y, z) の各成分の関数として次のように与えられている場合を考える。

$$u_1 = f_1(x, y, z) \quad (\text{A.122})$$

$$u_2 = f_2(x, y, z) \quad (\text{A.123})$$

$$u_3 = f_3(x, y, z) \quad (\text{A.124})$$

(x, y, z) の代わりに (x_1, x_2, x_3) とすると、

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{A.125})$$

$$u_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{A.126})$$

$$u_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{A.127})$$

逆の関係が次のように一価関数として

$$x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3) \quad (\text{A.128})$$

$$x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3) \quad (\text{A.129})$$

$$x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3) \quad (\text{A.130})$$

で与えられているとき、位置ベクトル \mathbf{r} は、

$$\mathbf{r} = x_1(u_1, u_2, u_3)\mathbf{i} + x_2(u_1, u_2, u_3)\mathbf{j} + x_3(u_1, u_2, u_3)\mathbf{k}$$

ただし、 \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} は、 x_1 , x_2 , x_3 方向の単位ベクトル（定ベクトル）を各々示す。これより、 u_i ($i = 1, 2, 3$) で微分すると、

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = \frac{\partial x_1}{\partial u_i} \mathbf{i} + \frac{\partial x_2}{\partial u_i} \mathbf{j} + \frac{\partial x_3}{\partial u_i} \mathbf{k} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.131})$$

したがって、 h_i ($i = 1, 2, 3$) は、

$$h_i = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}} = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_i} \right)^2} \quad (\text{A.132})$$

■ **勾配 (gradient)** 勾配は、スカラ場の変化の割合をベクトルで表したもので、スカラ関数を Φ とすると、 $\nabla\Phi$ あるいは $\text{grad } \Phi$ と書く。この $\nabla\Phi$ の方向は、スカラ関数の変化の割合が最大となる向きを示し、これはスカラ関数を等高線表示したとき、その等高線に垂直にとった方向のことである。また、大きさは、その変化の割合の最大値を意味している。

直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) の関数としてスカラ $\Phi = \Phi(u_1, u_2, u_3)$ が与えられているとき、 $d\mathbf{r}$ だけ微小変位したときの Φ の微小変化 $d\Phi$ は、

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}du_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial u_i}du_i \quad (\text{A.133})$$

一方、勾配 (gradient) の定義より、 $d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r}$ 。よって、

$$\nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial u_i}du_i \quad (\text{A.134})$$

ところで、 $d\mathbf{r}$ は、式 (A.110) より、

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 h_i \mathbf{i}_i du_i \quad (\text{A.135})$$

両辺に \mathbf{i}_j のスカラ積をとると、

$$\mathbf{i}_j \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{i}_j \cdot \sum_{i=1}^3 h_i \mathbf{i}_i du_i = h_j du_j \quad (\text{A.136})$$

これより、 du_i は、

$$du_i = \frac{\mathbf{i}_i \cdot d\mathbf{r}}{h_i} \quad (\text{A.137})$$

したがって、

$$\nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} \frac{\mathbf{i}_i \cdot d\mathbf{r}}{h_i} \quad (\text{A.138})$$

$$\therefore \left(\nabla\Phi - \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{i}_i}{h_i} \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} \right) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (\text{A.139})$$

上式が任意の $d\mathbf{r}$ に対して成り立つためには、

$$\nabla\Phi - \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{i}_i}{h_i} \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} = 0 \quad (\text{A.140})$$

したがって、スカラ関数 Φ の勾配 $\nabla\Phi$ は、

$$\nabla\Phi = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} \mathbf{i}_i \quad (\text{A.141})$$

■ **発散 (divergence)** 発散は、ベクトル場の源 (source) がどのように分布しているかを表す目安で、ベクトル関数を \mathbf{F} とすると、 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ あるいは $\operatorname{div} \mathbf{F}$ と書く。発散の定義式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.142})$$

で与えられ、単位体積当たり閉曲面の表面を通り抜ける正味の flux の量 (流束) を求めるものである。ただし、 \mathbf{n} は曲面の法線ベクトル、積分記号 \iint は面積分を閉曲面 S にわたつて行うことを表している。

いま、次のようなベクトル \mathbf{F} が与えられているとする。

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i}_1 + F_2 \mathbf{i}_2 + F_3 \mathbf{i}_3 = \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{i}_i \quad (\text{A.143})$$

ここで、 \mathbf{i}_i ($i = 1, 2, 3$) は直交曲線座標系の単位ベクトルを示し、 u_1 -曲面 (u_1 一定)、 u_2 -曲面 (u_2 一定)、 u_3 -曲面 (u_3 一定) で囲まれる微小体積から出る \mathbf{F} の流束を考える。

u_2 曲面上の面要素から出るベクトル \mathbf{F} の流束は、

$$\begin{aligned} & \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \Big|_{u_2+du_2} + \mathbf{F} \cdot (-d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \Big|_{u_2} \\ & \simeq \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \Big|_{u_2} + \frac{\partial}{\partial u_2} \{ \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \} du_2 - \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \Big|_{u_2} \\ & = \frac{\partial}{\partial u_2} \{ \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \} du_2 \end{aligned} \quad (\text{A.144})$$

ただし、 du_2 は座標の増分を意味する (直接、線要素になるわけではない)。ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) &= \left\{ \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{i}_i \right\} \cdot (h_3 h_1 \mathbf{i}_2 du_3 du_1) \\ &= F_2 h_3 h_1 du_3 du_1 \end{aligned} \quad (\text{A.145})$$

これより、

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \{ \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \} du_2 = \frac{\partial}{\partial u_2} \{ F_2 h_3 h_1 \} du_1 du_2 du_3 \quad (\text{A.146})$$

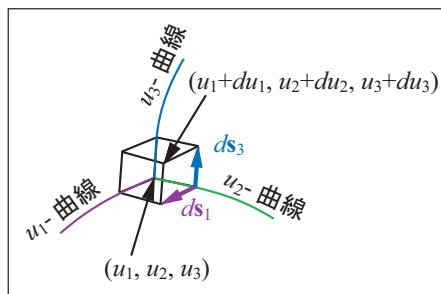


図 A.6. 体積要素

同様にして, u_3 曲面上の面要素から出るベクトル \mathbf{F} の流束は,

$$\frac{\partial}{\partial u_3} \{F_3 h_1 h_2\} du_1 du_2 du_3$$

u_1 曲面上の面要素から出るベクトル \mathbf{F} の流束は,

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \{F_1 h_2 h_3\} du_1 du_2 du_3$$

よって, u_1 -曲面, u_2 -曲面, u_3 -曲面で囲まれる微小体積から出るベクトル \mathbf{F} の流束は, これらの総和をとって,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \{h_2 h_3 F_1\} + \frac{\partial}{\partial u_2} \{h_3 h_1 F_2\} + \frac{\partial}{\partial u_3} \{h_1 h_2 F_3\} \right] \cdot du_1 du_2 du_3 \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \{h_2 h_3 F_1\} + \frac{\partial}{\partial u_2} \{h_3 h_1 F_2\} + \frac{\partial}{\partial u_3} \{h_1 h_2 F_3\} \right] dv \end{aligned} \quad (\text{A.147})$$

したがって,

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \frac{1}{dv} \cdot \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \{h_2 h_3 F_1\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u_2} \{h_3 h_1 F_2\} + \frac{\partial}{\partial u_3} \{h_1 h_2 F_3\} \right] dv \end{aligned} \quad (\text{A.148})$$

発散の定義より,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \{h_2 h_3 F_1\} + \frac{\partial}{\partial u_2} \{h_3 h_1 F_2\} + \frac{\partial}{\partial u_3} \{h_1 h_2 F_3\} \right] \quad (\text{A.149})$$

■ ラプラシアン $\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi$ の ∇^2 (ラプラシアン) を考える. いま, $\nabla \Phi$ をベクトル \mathbf{F}' とみなすと,

$$\nabla \Phi = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \mathbf{i}_i \equiv \sum_{i=1}^3 F'_i \mathbf{i}_i \equiv \mathbf{F}' \quad (\text{A.150})$$

ベクトル \mathbf{F}' の成分 F'_i は,

$$F'_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.151})$$

このとき, ベクトル \mathbf{F}' の発散を求めれば,

$$\nabla \cdot \mathbf{F}' = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \{h_2 h_3 F'_1\} + \frac{\partial}{\partial u_2} \{h_3 h_1 F'_2\} + \frac{\partial}{\partial u_3} \{h_1 h_2 F'_3\} \right] \quad (\text{A.152})$$

したがって,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}' &= \nabla \cdot \nabla \Phi \\ &= \nabla^2 \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.153})$$

■ **回転 (rotation)** 回転は、ベクトル関数を \mathbf{F} とすると、 $\nabla \times \mathbf{F}$, $\text{rot } \mathbf{F}$ あるいは $\text{curl } \mathbf{F}$ と書き、単位面積当たりの最大の回転量（渦）を与える面に垂直な方向をもち、回転量の最大値を大きさとするベクトルである。周回積分路 C でできる面の法線単位ベクトルを \mathbf{n} とおくと、

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A.154})$$

で与えられる。ここで、 $\nabla \times \mathbf{F}$ を次のようにおく。

$$\nabla \times \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \{(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i}_i\} \mathbf{i}_i \quad (\text{A.155})$$

$\nabla \times \mathbf{F}$ の各成分は、次のように \mathbf{i}_i に直交する微小面 S_i の周回積分路 C_i に沿った計算を行えば得られる。

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i}_i = \lim_{\Delta C_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.156})$$

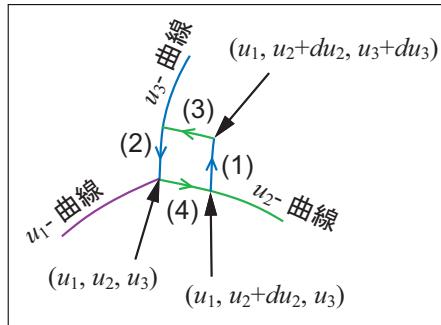


図 A.7. 面要素周りの微小周回積分路

そこで、まず、 $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i}_1$ について求めることにする。このとき、周回積分路 C_1 のうち、同図の (1) の $(u_1, u_2 + du_2, u_3)$ から $(u_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$ までの線積分 (u_3 -曲線上) は、線要素 $ds_3 = h_3 du_3$ より、

$$F_3 ds_3 \Big|_{u_2+du_2} \simeq F_3 h_3 du_3 + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_3 h_3 du_3) du_2$$

また、同図の (2) の $(u_1, u_2, u_3 + du_3)$ から (u_1, u_2, u_3) までの線積分 (u_3 -曲線上) は、

$$-F_3 ds_3 \Big|_{u_2} = -F_3 h_3 du_3$$

同図の (3) の $(u_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$ から $(u_1, u_2, u_3 + du_3)$ までの線積分 (u_2 -曲線上) は、線要素 $ds_2 = h_2 du_2$ より、

$$-F_2 ds_2 \Big|_{u_3+du_3} \simeq -F_2 h_2 du_2 - \frac{\partial}{\partial u_3} (F_2 h_2 du_2) du_3$$

そして、同図の(4)の (u_1, u_2, u_3) から $(u_1, u_2 + du_2, u_3)$ までの線積分(u_2 -曲線上)は、

$$F_2 ds_2 \Big|_{u_3} = F_2 h_2 du_2$$

これらの総和をとれば、 C_1 の周回積分は、

$$\left\{ \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_3} \right\} du_2 du_3 \quad (\text{A.157})$$

また、 C_1 に囲まれた面積は、面要素 da_1 に対応し、再記すると、 $da_1 = h_2 h_3 du_2 du_3$ 。したがって、

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i}_1 = \frac{\left\{ \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_3} \right\} du_2 du_3}{h_2 h_3 du_2 du_3} = \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_3} \right\} \quad (\text{A.158})$$

同様にして、

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i}_2 = \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_1} \right\} \quad (\text{A.159})$$

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i}_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_2} \right\} \quad (\text{A.160})$$

よって、 $\nabla \times \mathbf{F}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_3} \right\} \mathbf{i}_1 \\ &\quad + \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_1} \right\} \mathbf{i}_2 \\ &\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_2} \right\} \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.161})$$

あるいは、

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i}_1 & h_2 \mathbf{i}_2 & h_3 \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.162})$$

A.5.5 具体的な座標系への応用

■ **球座標系** 球座標系 (r, θ, φ) では、

$$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = \varphi \quad (\text{A.163})$$

とおくと, 位置ベクトル \mathbf{r}

$$\mathbf{r} = r \{ \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + \cos \theta \mathbf{k} \} \quad (\text{A.164})$$

および各導関数は,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + \cos \theta \mathbf{k} \quad (\text{A.165})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \{ \cos \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) - \sin \theta \mathbf{k} \} \quad (\text{A.166})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r \sin \theta (-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}) \quad (\text{A.167})$$

よって, h_1, h_2, h_3 は,

$$h_1 = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}} = 1 \quad (\text{A.168})$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}} = r \quad (\text{A.169})$$

$$h_3 = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}} = r \sin \theta \quad (\text{A.170})$$

r, θ に沿う単位ベクトル $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi$ を求めると,

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + \cos \theta \mathbf{k} \quad (\text{A.171})$$

$$\mathbf{u}_\theta = \mathbf{i}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \cos \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) - \sin \theta \mathbf{k} \quad (\text{A.172})$$

$$\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{i}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \quad (\text{A.173})$$

そして, 任意のスカラ関数 Φ について次式が成立つ.

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi \quad (\text{A.174})$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (\text{A.175})$$

また, ベクトル関数 \mathbf{F} を,

$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{u}_r + F_\theta \mathbf{u}_\theta + F_\varphi \mathbf{u}_\varphi \quad (\text{A.176})$$

とおくと, \mathbf{F} の発散は,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 F_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{A.177})$$

また, \mathbf{F} の回転は,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & r \sin \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & r \sin \theta F_\varphi \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\varphi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right\} \mathbf{u}_r \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rF_\varphi) \right\} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right\} \mathbf{u}_\varphi \quad (\text{A.178})\end{aligned}$$

■ 円筒座標系 円筒座標系 (ρ, ϕ, z) では,

$$u_1 = \rho, \quad u_2 = \phi, \quad u_3 = z \quad (\text{A.179})$$

とおくと, 位置ベクトル \mathbf{r} , および各導関数,

$$\mathbf{r} = \rho(\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) + z \mathbf{k} \quad (\text{A.180})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j} \quad (\text{A.181})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \rho(-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) \quad (\text{A.182})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k} \quad (\text{A.183})$$

よって, h_1, h_2, h_3 は,

$$h_1 = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}} = 1 \quad (\text{A.184})$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}} = \rho \quad (\text{A.185})$$

$$h_3 = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}} = 1 \quad (\text{A.186})$$

また, ρ, ϕ, z に沿う単位ベクトルを各々 $\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_z$ とおき, 上の結果を基にして各単位ベクトル求める

$$\mathbf{u}_\rho = \mathbf{i}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j} \quad (\text{A.187})$$

$$\mathbf{u}_\phi = \mathbf{i}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j} \quad (\text{A.188})$$

$$\mathbf{u}_z = \mathbf{i}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k} \quad (\text{A.189})$$

そして、任意のスカラ関数 Φ について次式が成立つ。

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad (\text{A.190})$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (\text{A.191})$$

また、ベクトル関数 \mathbf{F} を、

$$\mathbf{F} = F_\rho \mathbf{u}_\rho + F_\phi \mathbf{u}_\phi + F_z \mathbf{u}_z \quad (\text{A.192})$$

とおくと、 \mathbf{F} の発散および回転は、

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{A.193})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho \mathbf{u}_\phi & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{u}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{u}_\phi + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\phi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right\} \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (\text{A.194})$$

■ **直角座標系** 直角座標系 (x, y, z) では、

$$u_1 = x, \quad u_2 = y, \quad u_3 = z \quad (\text{A.195})$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1 \quad (\text{A.196})$$

より、任意のスカラ関数 Φ について次のようになる。

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad (\text{A.197})$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \quad (\text{A.198})$$

また、 $\mathbf{F} = F_x \mathbf{u}_x + F_y \mathbf{u}_y + F_z \mathbf{u}_z$ に対して、 \mathbf{F} の発散および回転は、

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{A.199})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (\text{A.200})$$