

電波伝送回路の基礎理論と設計

出口 博之

同志社大学

2025年9月19日

目次

第1章 伝送回路の基礎	1
1.1 アドミタンス行列	1
1.1.1 定電圧源を接続した線型受動回路	1
1.1.2 短絡駆動点アドミタンス	3
1.1.3 短絡伝達アドミタンス	3
1.1.4 アドミタンス行列の対称性	4
1.1.5 2端子対回路	4
1.1.6 多端子対回路	4
1.2 インピーダンス行列	5
1.2.1 定電圧源を接続した線型受動回路	5
1.2.2 開放駆動点インピーダンス	6
1.2.3 開放伝達インピーダンス	6
1.2.4 インピーダンス行列の対称性	6
1.2.5 多端子対回路のインピーダンス行列	7
1.2.6 Y行列とZ行列の関係	7
1.2.7 基本行列（伝送行列, 縦続行列）	8
1.2.8 四端子定数	9
1.2.9 短絡, 開放した入力インピーダンス	9
1.2.10 Y行列, Z行列と基本行列の関係	10
1.3 影像パラメータ	11
1.3.1 負荷と入力インピーダンスの関係について	11
1.3.2 影像パラメータの定義	12
1.3.3 影像パラメータを用いた基本行列表示	13
1.3.4 整合回路の縦続接続	15
1.3.5 軸対称回路	15
1.3.6 影像パラメータを表す別の公式	17

1.4	格子形回路	18
1.5	対称格子形回路	20
1.5.1	ブリッジ回路	20
1.5.2	対称格子形回路の基本行列	21
1.6	信号源および終端抵抗のある回路	22
1.7	理想変成器	24
1.7.1	基本行列	24
1.7.2	インピーダンス整合	24
1.8	軸対称回路	25
1.8.1	中心線で切断された回路	25
1.8.2	インピーダンス行列要素	27
1.9	伝送回路パラメータ	28
1.9.1	動作伝送係数	28
1.9.2	挿入伝送係数	29
1.9.3	挿入伝達係数	30
1.9.4	基本行列との関係	30
1.9.5	インピーダンス行列との関係	32
1.9.6	反射係数	32
第2章	方形導波管	33
2.1	スカラーヘルムホルツ方程式 (直角座標系)	33
2.2	方形導波管の TE モード	34
2.2.1	境界条件	34
2.2.2	TE モード	34
2.2.3	モード関数	36
2.3	方形導波管の TE モードの正規化	36
2.3.1	磁界モード関数の正規化条件	36
2.3.2	スカラ関数を用いた正規化	38
2.4	方形導波管の TE モードの例	38
2.4.1	TE ₁₀ モード	38
2.4.2	TE ₁₁ モード	39
2.4.3	TE ₂₁ モード	40
2.5	方形導波管の TM モードの正規化	41
2.6	方形導波管の TM モードの例	42
2.6.1	TM ₁₁ モード	42

2.6.2	TM ₂₁ モード	43
2.6.3	TM ₂₂ モード	44
2.7	標準的な方形導波管	44
2.7.1	方形導波管の主な寸法規格	45
2.7.2	方形導波管の遮断波長の例	45
第3章	円形導波管	47
3.1	スカラーヘルムホルツ方程式 (円筒座標系)	47
3.2	円形導波管の TE モード	48
3.2.1	境界条件	48
3.2.2	TE モード	48
3.2.3	モード関数	49
3.3	円形導波管の TE モードの正規化	49
3.3.1	磁界モード関数の正規化条件	50
3.3.2	ベッセル関数の積分	50
3.3.3	正規化係数	51
3.4	円形導波管の TE モードの例	51
3.4.1	TE ₁₁ モード	51
3.4.2	TE ₂₁ モード	52
3.4.3	TE ₀₁ モード	52
3.4.4	TE ₁₂ モード	52
3.5	円形導波管の TM モードの正規化	53
3.6	円形導波管の TM モードの例	55
3.6.1	TM ₀₁ モード	55
3.6.2	TM ₁₁ モード	56
3.6.3	TM ₂₁ モード	56
3.6.4	TM ₁₂ モード	56
3.7	円形導波管モードの遮断波数	57
第4章	スミス図表	59
4.1	スミス図表とは	59
4.1.1	複素平面上の電圧反射係数	59
4.1.2	定在波の最大・最小について	60
4.1.3	規格化入力インピーダンス, 規格化入力アドミタンスの図表	61
4.1.4	定抵抗円と定リアクタンス円	61

4.1.5	スミス図表	63
4.2	スミス図表の使い方	64
4.2.1	伝送線路上の入力インピーダンス	67
4.2.2	損失のある伝送線路	69
4.3	1/4 波長の伝送線路	70
4.4	入力インピーダンスと電圧定在波比	71
4.5	アドミタンス図表	72
4.5.1	電圧反射係数と入力アドミタンス	72
4.5.2	アドミタンス図表	74
4.6	イミタンス図表	77
第 5 章	伝送特性の測定評価	79
5.1	伝送特性の計測誤差	79
5.1.1	測定誤差の要因	79
5.1.2	スカラー誤差補正	80
5.1.3	ベクトル誤差補正	80
5.1.4	1 ポート校正	80
5.1.5	2 ポート校正	80
5.1.6	ネットワークアナライザの基本構成	80
5.1.7	誤差回路	81
5.1.8	ディエンベッディング	82
5.2	シグナルフローラフの応用	82
5.2.1	誤差回路と DUT	82
5.2.2	順方向伝送・反射	83
5.2.3	逆方向伝送・反射	84
5.3	1 ポート校正	84
5.3.1	SOL 校正	85
5.3.2	左右対称 TM 校正	86
5.4	2 ポート校正	86
5.4.1	SOLT 校正	86
5.4.2	TRL 校正	87
5.4.3	TLS 校正 (TSD 校正)	88
5.5	TRL 校正の詳細	88
5.5.1	スルー (Through)	88
5.5.2	伝送線路 (Line)	88

5.5.3	行列のトレース	89
5.5.4	伝送線路の電気長	90
5.5.5	誤差回路の S パラメータ	90
5.5.6	反射器 (Reflect)	93
第 6 章	フィルタ合成のための特性関数	95
6.1	2 端子対リアクタンス回路	95
6.2	フィルタの特性関数	97
6.3	入力インピーダンスの性質	98
6.3.1	フーリエ変換	98
6.3.2	入力インピーダンスの偶・奇特性	100
6.4	無損失回路の性質	101
6.4.1	無損失回路のインピーダンス行列	102
6.4.2	無損失回路のアドミタンス行列	102
6.4.3	無損失回路の基本行列	102
6.5	動作パラメータの性質	103
6.5.1	動作伝送関数と S パラメータの関係	103
6.5.2	無損失回路	103
6.5.3	特性関数	104
6.5.4	基本行列と動作伝送関数, 特性関数の関係	105
6.5.5	入力インピーダンスと特性関数の関係	106
6.5.6	インピーダンス行列と特性関数の関係	107
6.5.7	アドミタンス行列と特性関数の関係	108
6.5.8	終端開放, 終端短絡	108
6.6	特性関数と散乱行列の関係	109
6.7	特性関数と入力インピーダンスの関係	110
6.8	伝送特性	111
6.8.1	挿入損失, 反射損失	111
6.8.2	位相特性	111
6.8.3	群遅延特性	111
第 7 章	最平坦特性を有するフィルタ	113
7.1	最平坦 (Maximally-flat) 特性	113
7.1.1	最平坦特性の特性関数	113
7.1.2	特性関数の零点	114

7.1.3	低域通過の最平坦特性	115
7.1.4	低域通過から高域通過への周波数変換	116
7.1.5	低域通過から帯域通過への周波数変換	116
7.1.6	低域通過から帯域阻止への周波数変換	117
7.2	梯子型回路	118
7.3	最平坦特性を持つ 2 段の梯子型回路	119
7.4	最平坦特性を持つ 3 段の梯子型回路	120
7.5	最平坦特性を持つ低域通過梯子型回路の規格化素子値	122
7.6	周波数変換により求めた最平坦特性を持つ高域通過梯子型回路の規格化素子値	125
7.7	周波数変換により求めた最平坦特性を持つ帯域通過梯子型回路の規格化素子値	128
7.8	周波数変換により求めた最平坦特性を持つ帯域阻止梯子型回路の規格化素子値	132
7.9	最平坦特性を有する低域通過梯子型回路の規格化素子値の導出	136
第 8 章	等リップル特性を有するフィルタ	145
8.1	等リップル (Chebyshev) 特性	145
8.1.1	チェビシェフ多項式を用いた特性関数	145
8.1.2	動作伝送関数の因数分解	146
8.1.3	動作伝送関数の零点	148
8.1.4	周波数特性	149
8.2	等リップル特性の周波数変換	152
8.2.1	低域通過から高域通過への周波数変換	152
8.2.2	低域通過から帯域通過への周波数変換	153
8.2.3	低域通過から帯域阻止への周波数変換	155
8.3	等リップル特性を持つ低域通過梯子型回路の規格化素子値	156
8.4	周波数変換により求めた等リップル特性を持つ高域通過梯子型回路の規格化素子値	161
8.5	周波数変換により求めた等リップル特性を持つ帯域通過梯子型回路の規格化素子値	166
8.6	周波数変換により求めた等リップル特性を持つ帯域阻止梯子型回路の規格化素子値	171
参考文献		177

CHAPTER 1

伝送回路の基礎

伝送回路の基礎について広範囲にわたって解説する。まず、アドミタンス行列やインピーダンス行列といった回路網を表現する重要な行列の概念とその導出、物理的意味を説明する。また、基本行列を用いた電圧・電流の関係や、影像パラメータ（影像インピーダンス、影像伝送量）による回路特性の分析についても紹介する。さらに、格子形回路や対称格子形回路の基本行列の求め方、信号源および終端抵抗のある回路における電力伝送係数（動作伝送係数、挿入伝送係数）の計算、そして理想変成器の原理とインピーダンス整合への応用についても詳細に論じている。最終的に、軸対称回路におけるインピーダンス行列要素の導出に加えて、さまざまな伝送回路パラメータ間の関係を包括的に概観する。

1.1 アドミタンス行列

1.1.1 定電圧源を接続した線型受動回路

線形受動回路において、ループ i のループ電流を I_i 、定電圧源を V_i とすると ($i = 1, 2, \dots, N$)、キルヒホッフの電流則より、

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{11}I_1 + \mathcal{Z}_{12}I_2 + \dots + \mathcal{Z}_{1N}I_N &= V_1 \\ \mathcal{Z}_{21}I_1 + \mathcal{Z}_{22}I_2 + \dots + \mathcal{Z}_{2N}I_N &= V_2 \\ &\dots \\ \mathcal{Z}_{N1}I_1 + \mathcal{Z}_{N2}I_2 + \dots + \mathcal{Z}_{NN}I_N &= V_N \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで、 \mathcal{Z}_{ii} はループ i のインピーダンス (self-impedance)、 \mathcal{Z}_{ij} はループ i と j の共通のインピーダンスである。クラメルの公式 (Cramer's rule) より電流について解き、分子の

行列式 Δ_i を第 i 列 ($i = 1, 2, \dots$) で展開すると,

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \left(\Delta_{11}V_1 + \Delta_{21}V_2 + \dots + \Delta_{N1}V_N \right) \quad (1.2)$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \left(\Delta_{12}V_1 + \Delta_{22}V_2 + \dots + \Delta_{N2}V_N \right) \quad (1.3)$$

.....

ここで,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathcal{Z}_{11} & \mathcal{Z}_{12} & \cdots & \mathcal{Z}_{1N} \\ \mathcal{Z}_{21} & \mathcal{Z}_{22} & \cdots & \mathcal{Z}_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{Z}_{N1} & \mathcal{Z}_{N2} & \cdots & \mathcal{Z}_{NN} \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

また,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} V_1 & \mathcal{Z}_{12} & \cdots & \mathcal{Z}_{1N} \\ V_2 & \mathcal{Z}_{22} & \cdots & \mathcal{Z}_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_N & \mathcal{Z}_{N2} & \cdots & \mathcal{Z}_{NN} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathcal{Z}_{11} & V_1 & \cdots & \mathcal{Z}_{1N} \\ \mathcal{Z}_{21} & V_2 & \cdots & \mathcal{Z}_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{Z}_{N1} & V_N & \cdots & \mathcal{Z}_{NN} \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

ただし, Δ_{ji} は行列式 Δ における \mathcal{Z}_{ji} の余因子を示す. いま, 次の左図のようにループ 1 にのみ定電圧源を接続 ($V_2 = V_3 = \dots = V_N = 0$) すると電流 I'_1 , I'_2 は,

$$I'_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} V_1, \quad I'_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} V_1 \quad (1.6)$$

また, 右図のようにループ 2 にのみ定電圧源を接続 ($V_1 = V_3 = \dots = V_N = 0$) すると I''_1 , I''_2 は,

$$I''_1 = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} V_2, \quad I''_2 = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} V_2 \quad (1.7)$$

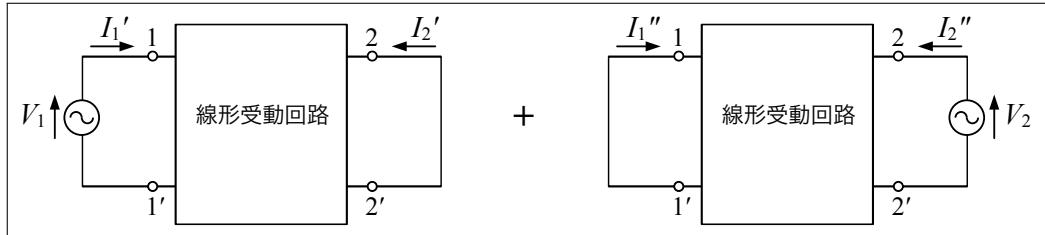


図 1.1. 定電圧源を接続した回路

これより, 上の二つを重ね合わせると,

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} V_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} V_2 \equiv Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \quad (1.8)$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} V_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} V_2 \equiv Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \quad (1.9)$$

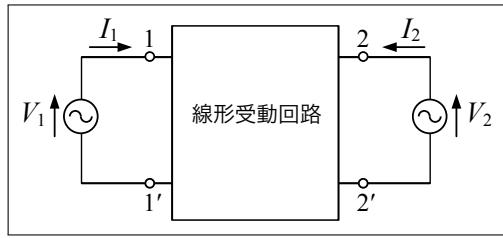


図 1.2. 重ね合わせた回路

行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

あるいは, もっと簡略に

$$\mathbf{I} = [Y]\mathbf{V} \quad (1.11)$$

ここで,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad [Y] = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

上式の $[Y]$ を**アドミタンス行列** (admittance matrix), または**Y行列** (Y-matrix) という.

1.1.2 短絡駆動点アドミタンス

アドミタンス行列要素の物理的意味について考えよう. まず,

$$\left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \left. \frac{Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = Y_{11} \quad (1.13)$$

$$\left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = \left. \frac{Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = Y_{22} \quad (1.14)$$

ここで, Y_{11} , Y_{22} を**短絡駆動点アドミタンス** (short-circuit driving point admittance) という. **駆動点アドミタンス** (driving point admittance) は単にアドミタンスと言ってもよく, 一つのポートにおける $Y = V/I$ によって定義される.

1.1.3 短絡伝達アドミタンス

また,

$$\left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = \left. \frac{Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = Y_{12} \quad (1.15)$$

$$\left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = \left. \frac{Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = Y_{21} \quad (1.16)$$

ここで, Y_{12} , Y_{21} を**短絡伝達アドミタンス** (short-circuit transfer admittance) という. 四端子回路網におけるこのような異なる 2 つのポート間の電圧, 電流の関係を表す係数の総称が**伝達関数** (transfer function) である.

1.1.4 アドミタンス行列の対称性

線形受動回路 (passive linear network) では, **相反定理** (reciprocity theorem) (可逆定理) が成立するから,

$$Y_{12} = Y_{21} \quad (1.17)$$

すなわち $[Y]$ は対称行列で, 転置行列 (transposed matrix) を $[Y]^T$ とすると,

$$[Y] = [Y]^T \quad (1.18)$$

1.1.5 2 端子対回路

次の図のような**2 端子対回路** (two-terminal pair network, two-port network) を考え, 各端子対の電圧, 電流を与えたときにも同様にアドミタンス行列を用いて表すことができる (V_1 , V_2 は各端子対の電圧).

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

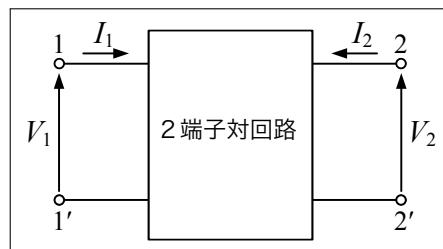


図 1.3. 2 端子対回路

1.1.6 多端子対回路

多端子対回路に拡張すると,

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

これより,

$$\mathbf{i} = [Y]\mathbf{v} \quad (1.21)$$

ここで,

$$[Y] = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{pmatrix}$$

1.2 インピーダンス行列

1.2.1 定電圧源を接続した線型受動回路

定電流源を接続した回路を考える。

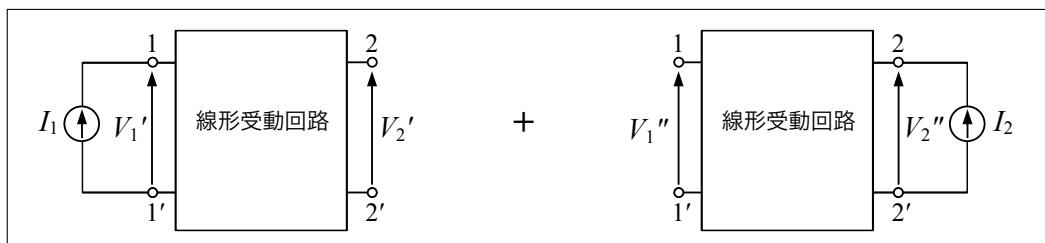


図 1.4. 定電流源を接続した回路

上の左図より V'_1 , V'_2 を求め, 右図より V''_1 , V''_2 を求め, 重ねの理より次の回路が得られる。

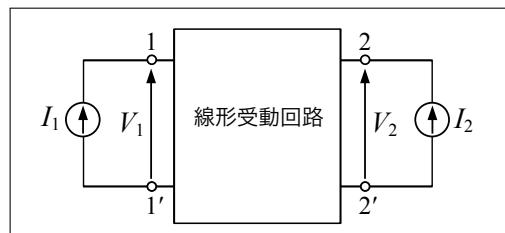


図 1.5. 重ね合わせた回路

これより, 次式が得られる。

$$V_1 = V'_1 + V''_1 \equiv Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \quad (1.22)$$

$$V_2 = V'_2 + V''_2 \equiv Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \quad (1.23)$$

行列表示では,

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

あるいは, もっと簡略に

$$\mathbf{V} = [Z]\mathbf{I} \quad (1.25)$$

ここで,

$$[Z] = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

上式の $[Z]$ を**インピーダンス行列** (impedance matrix), または**Z 行列** (Z-matrix) という.

1.2.2 開放駆動点インピーダンス

インピーダンス行列の要素の物理的意味は,

$$\frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = Z_{11} \quad (1.27)$$

$$\frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = Z_{22} \quad (1.28)$$

ここで, Z_{11} , Z_{22} を**開放駆動点インピーダンス** (open-circuit driving point impedance) という. **駆動点インピーダンス** (driving point impedance) は単にインピーダンスと言ってもよく, 一つのポートにおける $Z = I/V$ によって定義される.

1.2.3 開放伝達インピーダンス

また,

$$\frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = Z_{12} \quad (1.29)$$

$$\frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = Z_{21} \quad (1.30)$$

ここで, Z_{12} , Z_{21} を**開放伝達インピーダンス** (open-circuit transfer impedance) という.

1.2.4 インピーダンス行列の対称性

相反定理 (reciprocity theorem) (可逆定理) が成立する場合,

$$Z_{12} = Z_{21} \quad (1.31)$$

行列 $[Z]$ の転置行列 (transposed matrix) を $[Z]^T$ とすると,

$$[Z] = [Z]^T \quad (1.32)$$

1.2.5 多端子対回路のインピーダンス行列

同様にして, 多端子対回路に拡張すると,

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

これより,

$$\mathbf{v} = [Z]\mathbf{i} \quad (1.34)$$

ここで,

$$[Z] = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

1.2.6 Y 行列と Z 行列の関係

また,

$$\mathbf{V} = [Y]^{-1}\mathbf{I} = [Z]\mathbf{I} \quad (1.36)$$

これより,

$$[Z] = [Y]^{-1} \quad (1.37)$$

インピーダンス行列はアドミタンス行列の逆行列であるから, インピーダンス行列要素はアドミタンス行列要素から次のようにして求めることができる.

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det Y} \begin{pmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

あるいは,

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{\det Y}, \quad Z_{12} = \frac{-Y_{12}}{\det Y}, \quad Z_{21} = \frac{-Y_{21}}{\det Y}, \quad Z_{22} = \frac{Y_{11}}{\det Y} \quad (1.39)$$

ここで,

$$\det Y = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} = \frac{Y_{22}}{Z_{11}} = \frac{Y_{11}}{Z_{22}} \quad (1.40)$$

これより,

$$\frac{Y_{11}}{Y_{22}} = \frac{Z_{22}}{Z_{11}} \quad (1.41)$$

逆に,

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det Z} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

より,

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\det Z}, \quad Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{\det Z}, \quad Y_{21} = \frac{-Z_{21}}{\det Z}, \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\det Z} \quad (1.43)$$

これより,

$$\det Z = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det Y} \quad (1.44)$$

1.2.7 基本行列（伝送行列、縦続行列）

2端子対回路では、端子対に関する量を各々一組として、次のように表すと便利なことが多い（電流 $-I_2$ はインピーダンス・アドミタンス行列とは逆向きに定義）。

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

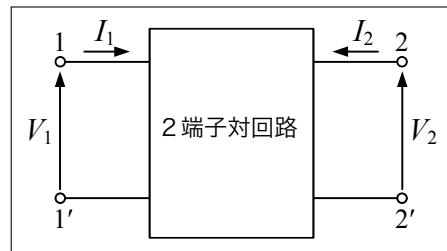


図 1.6. 2端子対回路

すなわち、

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \quad (1.46)$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 \quad (1.47)$$

ここで,

$$[F] = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

を**四端子行列** (four terminal matrix), F 行列, ABCD 行列, **基本行列** (fundamental matrix), **縦続行列** (chain matrix), 電圧・電流の**伝送行列** (voltage-current transmission matrix) という. また, A, B, C, D を四端子網の四定数, あるいは四端子定数という.

1.2.8 四端子定数

いま, 基本行列を

$$[F] = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_2 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

として, 四定数の物理的意味を考えよう.

$$\left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{A_1 V_2 - B I_2}{V_1} \right|_{I_2=0} = A \quad [\text{開放電圧比}] \quad (1.50)$$

$$\left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = \left. \frac{A_1 V_2 - B I_2}{-I_2} \right|_{V_2=0} = B \quad [\text{短絡インピーダンス}] \quad (1.51)$$

$$\left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{C V_2 - A_2 I_2}{V_2} \right|_{I_2=0} = C \quad [\text{開放アドミタンス}] \quad (1.52)$$

$$\left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = \left. \frac{C V_2 - A_2 I_2}{-I_2} \right|_{V_2=0} = D \quad [\text{短絡電流比}] \quad (1.53)$$

1.2.9 短絡, 開放した入力インピーダンス

端子 2-2' を短絡したとき ($V_2 = 0$) の入力インピーダンス Z_{1s} , および開放したとき ($I_2 = 0$) の入力インピーダンス Z_{1f} は,

$$Z_{1s} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = \left. \frac{A_1 V_2 - B I_2}{C V_2 - A_2 I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{B}{A_2} \quad (1.54)$$

$$Z_{1f} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{A_1 V_2 - B I_2}{C V_2 - A_2 I_2} \right|_{I_2=0} = \frac{A_1}{C} \quad (1.55)$$

基本行列の逆行列について,

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = [F]^{-1} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

ここで,

$$[F]^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det F} \begin{pmatrix} A_2 & -B \\ -C & A_1 \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

符号を $-I_2$ から, $-I_1$ となるように変形すると,

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det F} \begin{pmatrix} A_2 & B \\ C & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

これは, 四端子回路を送受反転したときの基本行列であり, 可逆回路では $\det F = 1$ であるから,

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B \\ C & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

これより, 端子 1-1' を短絡したとき ($V_1 = 0$) の入力インピーダンス Z_{2s} , および開放したとき ($I_1 = 0$) の入力インピーダンス Z_{2f} は,

$$Z_{2s} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_1=0} = \frac{A_2 V_1 - B I_1}{C V_1 - A_1 I_1} \Big|_{V_1=0} = \frac{B}{A_1} \quad (1.60)$$

$$Z_{2f} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{A_2 V_1 - B I_1}{C V_1 - A_1 I_1} \Big|_{I_1=0} = \frac{A_2}{C} \quad (1.61)$$

となって, 単に A_1 を A_2 に交換した形となる. これらの結果より,

$$\frac{Z_{1s}}{Z_{1f}} = \frac{Z_{2s}}{Z_{2f}} = \frac{BC}{A_1 A_2} = \frac{A_1 A_2 - 1}{A_1 A_2} = 1 - \frac{1}{A_1 A_2} \quad (1.62)$$

よって,

$$A_1 A_2 = \frac{Z_{1f}}{Z_{1f} - Z_{1s}} = \frac{Z_{2f}}{Z_{2f} - Z_{2s}} \quad (1.63)$$

$$BC = \frac{Z_{1s}}{Z_{1f} - Z_{1s}} = \frac{Z_{2s}}{Z_{2f} - Z_{2s}} \quad (1.64)$$

1.2.10 Y 行列, Z 行列と基本行列の関係

Y 行列の式を変形して,

$$V_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} V_2 + \frac{1}{Y_{21}} I_2 \quad (1.65)$$

$$I_1 = \left(Y_{12} - \frac{Y_{11} Y_{22}}{Y_{21}} \right) V_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}} I_2 \quad (1.66)$$

同様に Z 行列の式も変形して基本行列と比較すると,

$$A = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad (1.67)$$

$$B = -\frac{1}{Y_{21}} = \frac{\det Z}{Z_{21}} \quad (1.68)$$

$$C = -\frac{\det Y}{Y_{21}} = \frac{1}{Z_{21}} \quad (1.69)$$

$$D = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} = \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \quad (1.70)$$

行列でまとめると,

$$[F] = \frac{1}{-Y_{21}} \begin{pmatrix} Y_{22} & 1 \\ \det Y & Y_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_{21}} \begin{pmatrix} Z_{11} & \det Z \\ 1 & Z_{22} \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

ここで, 次式が成り立つ.

$$\det F = AD - BC = \frac{Z_{12}}{Z_{21}} = \frac{Y_{12}}{Y_{21}} \quad (1.72)$$

可逆回路では, $\det F = AD - BC = 1$ ゆえ, 独立な変数は 3 個となる. 回路が対称なら,

$$Y_{11} = Y_{22} \quad (1.73)$$

$$Z_{11} = Z_{22} \quad (1.74)$$

$$A = D \quad (1.75)$$

となり, 独立な変数は 2 個となる. 逆に, インピーダンス行列を基本行列で表すと,

$$[Z] = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} A & \det F \\ 1 & D \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

これより,

$$\det Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = \frac{B}{C} \quad (1.77)$$

さらに, アドミタンス行列を基本行列で表すと,

$$[Y] = \frac{1}{\det Z} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} D & -\det F \\ -1 & A \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

1.3 影像パラメータ

1.3.1 負荷と入力インピーダンスの関係について

基本行列で与えられている伝送回路

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

を考え, 入出力端子に負荷 Z_1, Z_2 を接続する. まず, 入力端子から伝送回路を見た入力インピーダンス $Z_{in,1}$ は, $V_2 = Z_2(-I_2)$ より,

$$Z_{in,1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 + B(-I_2)}{CV_2 + D(-I_2)} = \frac{AZ_2 + B}{CZ_2 + D} \quad (1.80)$$

一方、出力端子から伝送回路を見た入力インピーダンス $Z_{in,2}$ を求めるため,

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

と変形し、 $V_1 = Z_1(-I_1)$ より,

$$Z_{in,2} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{DV_1 - BI_1}{CV_1 - AI_1} = \frac{DZ_1 + B}{CZ_1 + A} \quad (1.82)$$

このような伝送回路に整合負荷 Z_1, Z_2 を接続する。整合条件

$$Z_1 = Z_{in,1} \quad (1.83)$$

$$Z_2 = Z_{in,2} \quad (1.84)$$

より,

$$(CZ_2 + D)Z_1 = AZ_2 + B \quad (1.85)$$

$$(CZ_1 + A)Z_2 = DZ_1 + B \quad (1.86)$$

辺々、差をとれば、 $DZ_1 = AZ_2$ 。これを解くと、 Z_1, Z_2 は、

$$Z_1 = \sqrt{\frac{AB}{CD}} \quad (1.87)$$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{BD}{AC}} \quad (1.88)$$

回路が対称なら、 $A = D$ とえ、

$$Z_1 = Z_2 = \sqrt{\frac{B}{C}} \quad (1.89)$$

1.3.2 影像パラメータの定義

出力端子に負荷 Z_{02} を接続したとき、入力端子から右に見た入力インピーダンスが Z_{01} 、入力端子に負荷 Z_{01} を接続したとき、出力から左に見た入力インピーダンスが Z_{02} となるようにできたとすれば、各々の端子においてはちょうど鏡の影像のような関係になるので、 Z_{01}, Z_{02} を**影像インピーダンス** (image impedance) と呼ぶ。このときの Z_{01}, Z_{02} は、すでに式 (1.88) で求めたとおりで、再記すると、

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} \quad (1.90)$$

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{BD}{AC}} \quad (1.91)$$

また, 入出力のルート電力比より,

$$e^{\theta_\gamma} \equiv \sqrt{\frac{V_1 I_1}{V_2 (-I_2)}} \quad (1.92)$$

とおいて定義される θ_γ (複素数) を**影像伝送量** (image propagation constant) という. そして,

$$V_1 = Z_{01} I_1 \quad (1.93)$$

$$V_2 = Z_{02} (-I_2) d \quad (1.94)$$

より,

$$\begin{aligned} \theta_\gamma &= \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{V_1 I_1}{V_2 (-I_2)} \right) = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{I_1^2 Z_{01}}{(-I_2)^2 Z_{02}} \right) = \log_e \left(\frac{I_1}{-I_2} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{V_1^2 Z_{02}}{V_2^2 Z_{01}} \right) = \log_e \left(\frac{V_1}{V_2} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \right) \end{aligned} \quad (1.95)$$

電圧, 電流の比として表せば,

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} e^{-\theta_\gamma} \quad (1.96)$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} e^{-\theta_\gamma} \quad (1.97)$$

ここで, $\theta_\gamma = \bar{\alpha} + j\bar{\phi}$ とすると, $\bar{\alpha}$ [neper] は減衰を表し影像減衰量といい, $\bar{\phi}$ [rad] は位相を表し影像位相量といい. また, Z_{01} , Z_{02} , θ_γ をまとめて**影像パラメータ** (image parameter) という.

1.3.3 影像パラメータを用いた基本行列表示

基本行列を用いて電圧, 電流の比を求める

$$V_2 = Z_{02} (-I_2) \quad (1.98)$$

より,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{AV_2 + B\frac{V_2}{Z_{02}}}{V_2} = A + \frac{B}{Z_{02}} = A + B\sqrt{\frac{AC}{BD}} = \sqrt{\frac{A}{D}} (\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) \quad (1.99)$$

$$\frac{I_1}{-I_2} = \frac{CZ_{02} (-I_2) + D(-I_2)}{-I_2} = CZ_{02} + D = C\sqrt{\frac{BD}{AC}} + D = \sqrt{\frac{D}{A}} (\sqrt{BC} + \sqrt{AD}) \quad (1.100)$$

これより,

$$e^{\theta_\gamma} = \sqrt{\frac{V_1}{V_2}} \sqrt{\frac{I_1}{-I_2}} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC} \quad (1.101)$$

これを逆数で表すと,

$$e^{-\theta_\gamma} = \frac{1}{\sqrt{AD} + \sqrt{BC}} = \frac{\sqrt{AD} - \sqrt{BC}}{AD - BC} = \sqrt{AD} - \sqrt{BC} \quad (1.102)$$

さらに,

$$\cosh \theta_\gamma = \frac{e^{\theta_\gamma} + e^{-\theta_\gamma}}{2} = \sqrt{AD} \quad (1.103)$$

$$\sinh \theta_\gamma = \frac{e^{\theta_\gamma} - e^{-\theta_\gamma}}{2} = \sqrt{BC} \quad (1.104)$$

また,

$$\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = \sqrt{\frac{A}{D}} \quad (1.105)$$

$$\sqrt{Z_{01}Z_{02}} = \sqrt{\frac{B}{C}} \quad (1.106)$$

より, 基本行列要素は, 影像パラメータを用いて次のように表される.

$$A = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \cosh \theta_\gamma \quad (1.107)$$

$$B = \sqrt{Z_{01}Z_{02}} \sinh \theta_\gamma \quad (1.108)$$

$$C = \sqrt{\frac{1}{Z_{01}Z_{02}}} \sinh \theta_\gamma \quad (1.109)$$

$$D = \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \cosh \theta_\gamma \quad (1.110)$$

つまり,

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = [\mathbf{F}] \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (1.111)$$

ここで,

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \cosh \theta_\gamma & \sqrt{Z_{01}Z_{02}} \sinh \theta_\gamma \\ \sqrt{\frac{1}{Z_{01}Z_{02}}} \sinh \theta_\gamma & \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \cosh \theta_\gamma \end{pmatrix} \quad (1.112)$$

対称回路 $Z_{01} = Z_{02} \equiv Z_0$ ならば,

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} \cosh \theta_\gamma & Z_0 \sinh \theta_\gamma \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \theta_\gamma & \cosh \theta_\gamma \end{pmatrix} \quad (1.112)$$

これは, 特性インピーダンス Z_0 , 伝搬定数 γ , 線路長 l の伝送線路で $\theta_\gamma = \gamma l$ とおいたときと等価である.

1.3.4 整合回路の縦続接続

いま, 回路が全て整合され, 縦続接続すると,

$$\begin{aligned} \frac{V_{N+1}}{V_1} &= \frac{V_2}{V_1} \frac{V_3}{V_2} \cdots \frac{V_{N+1}}{V_N} \\ &= \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} e^{-\theta_{\gamma_1}} \sqrt{\frac{Z_{03}}{Z_{02}}} e^{-\theta_{\gamma_2}} \cdots \sqrt{\frac{Z_{0,N+1}}{Z_{0,N}}} e^{-\theta_{\gamma_N}} = \sqrt{\frac{Z_{0,N+1}}{Z_{01}}} e^{-\Theta_\gamma} \end{aligned} \quad (1.113)$$

ここで,

$$\Theta_\gamma \equiv \theta_{\gamma_1} + \theta_{\gamma_2} + \cdots + \theta_{\gamma_N} = \sum_{n=1}^N \theta_{\gamma n} \quad (1.114)$$

同様にして,

$$\frac{-I_{N+1}}{I_1} = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{0,N+1}}} e^{-\Theta_\gamma} \quad (1.115)$$

つまり, 複数の回路を縦続接続した場合, 接続端子での左右の影像インピーダンスが等しければ, 入出力端子での影像インピーダンス Z_{01} , $Z_{0,N+1}$ は不变であるといえる. また, 影像伝送量は単純な和をとるだけで求められる. なお, 縦続接続した回路の入出力のルート電力比は,

$$\sqrt{\frac{V_{N+1}(-I_{N+1})}{V_1 I_1}} = \sqrt{\frac{V_{N+1}}{V_1}} \sqrt{\frac{-I_{N+1}}{I_1}} = e^{-\Theta_\gamma} \quad (1.116)$$

1.3.5 軸対称回路

構造が対称な回路を考え, 影像インピーダンスを Z_0 , 影像伝送量を θ_γ とし, これを 2 等分する. このとき, 中心の接続端子側の影像インピーダンスを Z'_0 とする. 先に示したように, このように分割された回路の入出力側の影像インピーダンスは Z_0 で不变, 影像伝送量

は半分の $\theta_\gamma/2$ となる。これより、左側の回路について基本行列を示すと次のようになる。

$$[\mathbf{F}_{\frac{1}{2}}] = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{Z_0}{Z'_0}} \cosh \frac{\theta_\gamma}{2} & \sqrt{Z_0 Z'_0} \sinh \frac{\theta_\gamma}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{Z_0 Z'_0}} \sinh \frac{\theta_\gamma}{2} & \sqrt{\frac{Z'_0}{Z_0}} \cosh \frac{\theta_\gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (1.117)$$

この回路の終端を短絡、あるいは開放したときの入力インピーダンス $Z_{sc, \frac{1}{2}}$, $Z_{oc, \frac{1}{2}}$ を求めると、

$$Z_{sc, \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{Z_0 Z'_0} \sinh \frac{\theta_\gamma}{2}}{\sqrt{\frac{Z'_0}{Z_0}} \cosh \frac{\theta_\gamma}{2}} = Z_0 \tanh \frac{\theta_\gamma}{2} \quad (1.118)$$

$$Z_{oc, \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{Z_0}{Z'_0}} \cosh \frac{\theta_\gamma}{2}}{\sqrt{\frac{1}{Z_0 Z'_0}} \sinh \frac{\theta_\gamma}{2}} = Z_0 \coth \frac{\theta_\gamma}{2} \quad (1.119)$$

辺々、乗じると、

$$Z_{sc, \frac{1}{2}} Z_{oc, \frac{1}{2}} = Z_0^2 \quad (1.120)$$

よって、

$$Z_0 = \sqrt{Z_{sc, \frac{1}{2}} Z_{oc, \frac{1}{2}}} \quad (1.121)$$

無損失の場合、 $\theta_\gamma = j\bar{\phi}$ とおいて、

$$\tanh \frac{j\bar{\phi}}{2} = j \tan \frac{\bar{\phi}}{2} = \frac{Z_{sc, \frac{1}{2}}}{Z_0} = \sqrt{\frac{Z_{sc, \frac{1}{2}}}{Z_{oc, \frac{1}{2}}}} \quad (1.122)$$

よって、

$$\tan \frac{\bar{\phi}}{2} = \sqrt{-\frac{Z_{sc, \frac{1}{2}}}{Z_{oc, \frac{1}{2}}}} \quad (1.123)$$

1.3.6 影像パラメータを表す別の公式

基本行列が与えられた回路において、終端を短絡、あるいは開放したとき、各々の入力インピーダンスは、

$$Z_{1,sc} = \frac{B}{D} \quad (1.124)$$

$$Z_{1,oc} = \frac{A}{C} \quad (1.125)$$

$$Z_{2,sc} = \frac{B}{A} \quad (1.126)$$

$$Z_{2,oc} = \frac{D}{C} \quad (1.127)$$

で求めることができ、これを用いれば、

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D}} = \sqrt{Z_{1,sc} Z_{1,oc}} \quad (1.128)$$

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{B}{A} \cdot \frac{D}{C}} = \sqrt{Z_{2,sc} Z_{2,oc}} \quad (1.129)$$

また、 $AD - BC = 1$ (可逆回路) を用いて、

$$Z_{1,oc} - Z_{1,sc} = \frac{A}{C} - \frac{B}{D} = \frac{AD - BC}{DC} = \frac{1}{DC} \frac{Z_{1,oc}}{Z_{1,oc} - Z_{1,sc}} = \frac{A}{C} \cdot DC = AD \quad (1.130)$$

$$\frac{Z_{1,sc}}{Z_{1,oc} - Z_{1,sc}} = \frac{B}{D} \cdot DC = BC \quad (1.131)$$

より、

$$e^\theta = \sqrt{AD} + \sqrt{BC} = \frac{\sqrt{Z_{1,oc}} + \sqrt{Z_{1,sc}}}{\sqrt{Z_{1,oc} - Z_{1,sc}}} \quad (1.132)$$

問題

インピーダンス行列要素 Z_{11} , $Z_{12}(= Z_{21})$, Z_{22} を用いて影像インピーダンス Z_{01} , Z_{02} , および影像伝送量 θ を表せ。

解答

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Z_{22}}} Z_{00} \quad (1.133)$$

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{Z_{22}}{Z_{11}}} Z_{00} \quad (1.134)$$

$$\tanh \theta = \frac{Z_{00}}{\sqrt{Z_{11}Z_{22}}} \quad (1.135)$$

なお,

$$\begin{aligned} Z_{00} &= \sqrt{Z_{01}Z_{02}} \\ &= \sqrt{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2} \end{aligned} \quad (1.136)$$

ただし, Z_{00} は**平均影像インピーダンス**と呼ばれる.

1.4 格子形回路

次のような格子形回路の基本行列を求めよう. $I_2 = 0$ となるよう右側の終端を開放すると, Z_a と Z_c が直列接続され, Z_b と Z_d が直列接続され, さらに両者を並列接続した回路となるので,

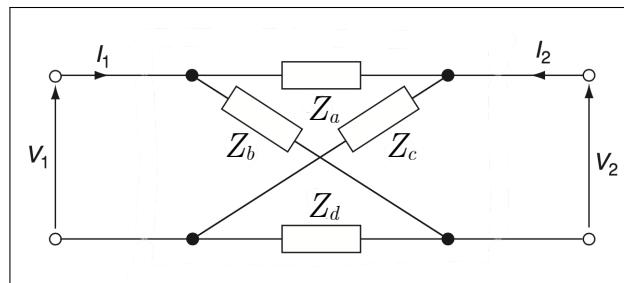


図 1.7. 格子形回路

$$V_1 \Big|_{I_2=0} = \frac{I_1}{\frac{1}{Z_a+Z_c} + \frac{1}{Z_b+Z_d}} = \frac{(Z_a + Z_c)(Z_b + Z_d)}{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d} I_1 \quad (1.137)$$

分流の法則より、 Z_a と Z_c が直列接続されたブランチに流れる電流 I'_1 、および Z_b と Z_d が直列接続されたブランチに流れる電流 I''_1 は、

$$I'_1 = \frac{Z_b + Z_d}{(Z_a + Z_c) + (Z_b + Z_d)} I_1 \quad (1.138)$$

$$I''_1 = \frac{Z_a + Z_c}{(Z_a + Z_c) + (Z_b + Z_d)} I_1 \quad (1.139)$$

これより、 V_2 は、

$$V_2 = Z_a I'_1 - Z_b I''_1 = \frac{Z_a(Z_b + Z_d) - Z_b(Z_a + Z_c)}{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d} I_1 = \frac{Z_a Z_d - Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d} I_1 \quad (1.140)$$

よって、四端子定数の C は、

$$C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d}{Z_a Z_d - Z_b Z_c} \quad (1.141)$$

また、

$$V_2 = \frac{Z_a Z_d - Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d} \cdot \frac{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d}{(Z_a + Z_c)(Z_b + Z_d)} V_1 = \frac{Z_a Z_d - Z_b Z_c}{(Z_a + Z_c)(Z_b + Z_d)} V_1 \quad (1.142)$$

よって、四端子定数の A_1 は、

$$A_1 = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{(Z_a + Z_c)(Z_b + Z_d)}{Z_a Z_d - Z_b Z_c} \quad (1.143)$$

次に、 $V_2 = 0$ となるよう右側の終端を短絡すると、 Z_a と Z_c が直列接続され、 Z_b と Z_d が直列接続され、さらに両者を並列接続して中心線を短絡した回路となる。よって、

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(\frac{1}{\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b}} + \frac{1}{\frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_d}} \right) I_1 = \frac{\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_d}}{\left(\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} \right) \left(\frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_d} \right)} I_1 \\ &= \left(\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_d} \right) \frac{Z_a Z_b Z_c Z_d}{(Z_a + Z_b)(Z_c + Z_d)} I_1 \end{aligned} \quad (1.144)$$

ここで、

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{Z_b}{Z_a + Z_b} I_1 + \frac{Z_d}{Z_c + Z_d} I_1 = \frac{Z_b(Z_c + Z_d) + Z_d(Z_a + Z_b)}{(Z_a + Z_b)(Z_c + Z_d)} I_1 \\ &= \frac{-Z_b Z_c + Z_d Z_a}{(Z_a + Z_b)(Z_c + Z_d)} I_1 \end{aligned} \quad (1.145)$$

よって、

$$I_1 = \frac{(Z_a + Z_b)(Z_c + Z_d)}{-Z_b Z_c + Z_d Z_a} I_2 \quad (1.146)$$

したがって,

$$A_2 = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{(Z_a + Z_b)(Z_c + Z_d)}{Z_b Z_c - Z_z Z_d} \quad (1.147)$$

さらに,

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_d} \right) \frac{Z_a Z_b Z_c Z_d}{(Z_a + Z_b)(Z_c + Z_d)} \cdot \frac{(Z_a + Z_b)(Z_c + Z_d)}{-Z_b Z_c + Z_z Z_d} I_2 \\ &= \left(\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_d} \right) \frac{Z_a Z_b Z_c Z_d}{-Z_b Z_c + Z_z Z_d} I_2 \end{aligned} \quad (1.148)$$

したがって,

$$B = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = \left(\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_d} \right) \frac{Z_a Z_b Z_c Z_d}{Z_b Z_c - Z_z Z_d} \quad (1.149)$$

1.5 対称格子形回路

1.5.1 ブリッジ回路

対称格子形 2 端子対回路 (symmetrical lattice two-port network) は次のような 2 端子対回路である。

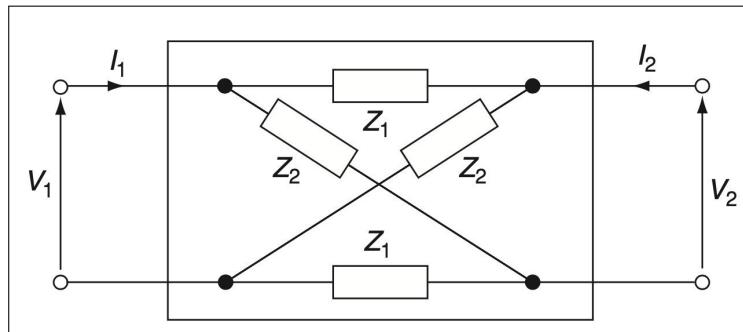


図 1.8. 対称格子形回路

上の回路は、次のようなブリッジ回路で表すことができる。

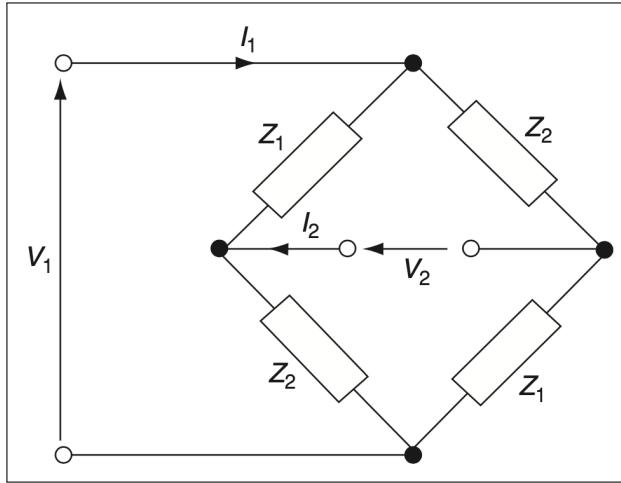


図 1.9. ブリッジ回路

1.5.2 対称格子形回路の基本行列

まず, $I_2 = 0$ となるように終端を開放すると Z_1 と Z_2 の直列接続のブランチが二つ並列接続された回路となり,

$$V_1 \Big|_{I_2=0} = \frac{I_1}{\frac{1}{Z_1+Z_2} + \frac{1}{Z_2+Z_1}} = \frac{Z_1 + Z_2}{2} I_1 \quad (1.150)$$

この並列接続された両ブランチに流れる電流は互いに等しく $I_1/2$ である,

$$V_2 = \frac{I_1}{2} Z_2 - \frac{I_1}{2} Z_1 = \frac{I_1}{2} (Z_2 - Z_1) = \frac{V_1}{Z_1 + Z_2} (Z_2 - Z_1) \quad (1.151)$$

これより, 四端子定数の開放アドミタンス C , 開放電圧比 A は,

$$C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{2}{Z_2 - Z_1} \quad (1.152)$$

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1} \quad (1.153)$$

次に, $V_2 = 0$ となるように終端を短絡すると

$$V_1 \Big|_{V_2=0} = \frac{2I_1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} I_1 \quad (1.154)$$

$$I_2 \Big|_{V_2=0} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I_1 - \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I_1 = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} I_1 \quad (1.155)$$

これより, 四端子定数の短絡電流比 D , 短絡インピーダンス B は,

$$D = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} = \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1} \quad (1.156)$$

$$B = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} = \frac{V_1}{I_1} \cdot \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{2Z_2 Z_1}{Z_2 - Z_1} \quad (1.157)$$

よって、対称格子形回路の基本行列 $[F]$ は、

$$[F] = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z_2+Z_1}{Z_2-Z_1} & \frac{2Z_2Z_1}{Z_2-Z_1} \\ \frac{2}{Z_2-Z_1} & \frac{Z_2+Z_1}{Z_2-Z_1} \end{pmatrix} \quad (1.158)$$

インピーダンス行列 $[Z]$ は、基本行列 $[F]$ より、

$$[Z] = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} A & \det F \\ 1 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z_2+Z_1}{2} & \frac{Z_2-Z_1}{2} \\ \frac{Z_2-Z_1}{2} & \frac{Z_2+Z_1}{2} \end{pmatrix} \quad (1.159)$$

ここで、

$$\det F = AD - BC = 1 \quad (1.160)$$

よって、

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12} \quad (1.161)$$

$$Z_2 = Z_{11} + Z_{12} \quad (1.162)$$

1.6 信号源および終端抵抗のある回路

出力側については負荷抵抗 R_L で終端し、

$$V_2 = -I_2 R_L \quad (1.163)$$

入力側については、図のように電圧源が接続されている。

$$V_1 = E_g - I_1 R_g \quad (1.164)$$

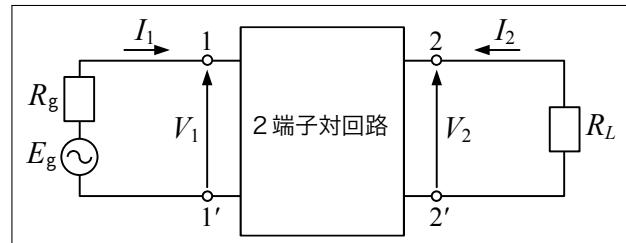


図 1.10. 電圧源および終端抵抗を接続した回路

また、電圧源のかわりに電流源を接続すると、

$$I_1 = J_g - \frac{V_1}{R_g} \quad (1.165)$$

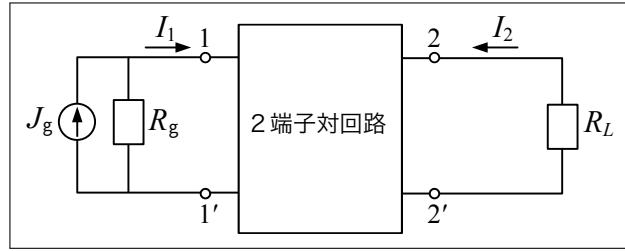


図 1.11. 電流源および終端抵抗を接続した回路

回路の基本行列が与えられているものとすると、

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (1.166)$$

上式に $V_2 = -I_2 R_L$ を代入して、

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2) = (AR_L + B)(-I_2) \quad (1.167)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2) = (CR_L + D)(-I_2) \quad (1.168)$$

電圧源を接続した回路に対しては、式 (1.164) に上式を代入して V_1, I_1 を消去すると、

$$(AR_L + B)(-I_2) = E_g - (CR_L + D)(-I_2)R_g$$

$$\therefore (AR_L + B + CR_g R_L + DR_g)(-I_2) = E_g \quad (1.169)$$

これより、

$$\frac{-I_2}{E_g} = \frac{1}{AR_L + B + CR_g R_L + DR_g} \quad (1.170)$$

$$\frac{V_2}{E_g} = \frac{-I_2}{E_g} R_L = \frac{R_L}{AR_L + B + CR_g R_L + DR_g} \quad (1.171)$$

一方、電流源を接続した回路に対しては、式 (1.165) に上式を代入して V_1, I_1 を消去すると、

$$(CR_L + D)(-I_2) = J_g - \frac{(AR_L + B)(-I_2)}{R_g}$$

$$\therefore (AR_L + B + CR_g R_L + DR_g)(-I_2) = R_g J_g \quad (1.172)$$

これより、

$$\frac{-I_2}{J_g} = \frac{R_g}{AR_L + B + CR_g R_L + DR_g} \quad (1.173)$$

$$\frac{V_2}{J_g} = \frac{-I_2}{J_g} R_L = \frac{R_g R_L}{AR_L + B + CR_g R_L + DR_g} \quad (1.174)$$

1.7 理想変成器

1.7.1 基本行列

まず、**理想変圧器** (ideal transformer) (理想変成器ともいう) の基本行列 (F-matrix) を求める。理想変成器は $n : 1$ のとき、電圧を $1/n$ 倍、電流を n 倍するような特性を持つ回路で、2 端子対回路の基本行列と同様に電圧 V_1, V_2 、電流 I_1, I_2 を定義すると (I_1, I_2 は回路に向かう電流)，

$$V_2 = \frac{V_1}{n} \quad (1.175)$$

$$I_2 = -nI_1 \quad (1.176)$$

これより、基本行列は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (1.177)$$

例えば、巻線比 $n = N_1/N_2$ で密に巻かれたリアクタンス成分の大きい二つのコイル (結合係数 1) などはそれとほぼ等しい動作をする。磁束を Φ として共通とすると電磁誘導の法則より起電力 e_1, e_2 は、

$$e_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.178)$$

$$e_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.179)$$

上式より、微分の項を消去して、

$$\frac{e_1}{N_1} = \frac{e_2}{N_2} \quad (1.180)$$

よって、

$$e_2 = \frac{N_2}{N_1} e_1 = \frac{e_1}{n} \quad (1.181)$$

ここで、

$$n = \frac{N_1}{N_2} \quad (1.182)$$

1.7.2 インピーダンス整合

次の左の図のように線路と異なるインピーダンスの負荷で終端すると不整合が生じる。理想変成器を用いれば、計算上、インピーダンス整合できる。右の図の入力インピーダンス

Z_{in} は、

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{nV_2}{\frac{-1}{n}I_2} = n^2 \frac{V_2}{-I_2} = n^2 Z_L \quad (1.183)$$

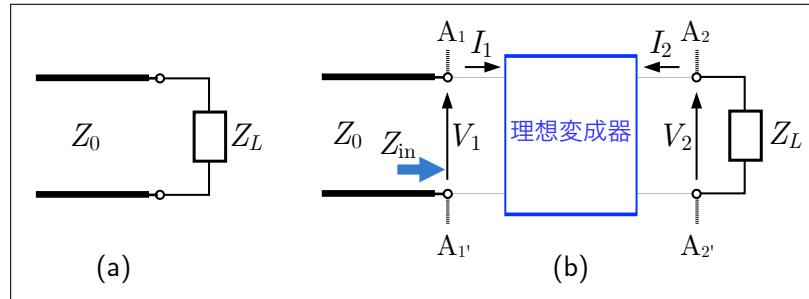


図 1.12. (a) 不整合の場合, (b) 整合させた場合

整合条件より、

$$Z_{in} = Z_0 = n^2 Z_L \quad (1.184)$$

よって、インピーダンス整合のための巻線比 n は、

$$n = \sqrt{\frac{Z_0}{Z_L}} \quad (1.185)$$

1.8 軸対称回路

1.8.1 中心線で切断された回路

図のような構造が中心線で対称な軸対称回路を考える。インピーダンス行列 $[Z]$ は、

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = [Z] \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad [Z] = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \quad (1.186)$$

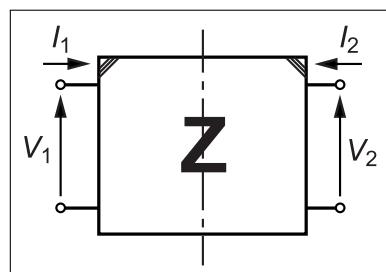


図 1.13. 軸対称回路のインピーダンス行列

中心線で2等分して、切断された接続線を新たな端子とし、電圧、電流を列ベクトル (\mathbf{v}_0) , (\mathbf{i}_0) , 2等分された回路のインピーダンス行列を $[Z_{\frac{1}{2}}]$ とすると、

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ (\mathbf{v}_0) \end{pmatrix} = [Z_{\frac{1}{2}}] \begin{pmatrix} I_1 \\ (\mathbf{i}_0) \end{pmatrix} \quad (1.187)$$

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ (\mathbf{v}_0) \end{pmatrix} = [Z_{\frac{1}{2}}] \begin{pmatrix} I_2 \\ -(\mathbf{i}_0) \end{pmatrix} \quad (1.188)$$

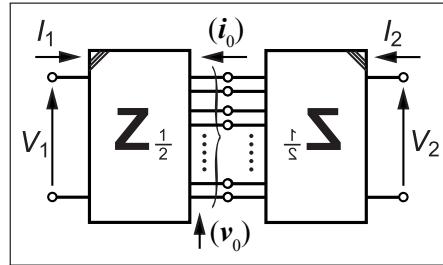


図 1.14. 中心線で切断された回路

いま、もとの軸対称回路において入出力電圧を

$$V_1 = -V_2 = V \quad (1.189)$$

とすると、インピーダンス行列より、

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = V = -V_2 = -(Z_{12}I_1 + Z_{11}I_2) \quad (1.190)$$

整理して、

$$(Z_{11} + Z_{12})(I_1 + I_2) = 0 \quad (1.191)$$

よって、電流 I_1 , I_2 の関係は、

$$I_1 = -I_2 \equiv I \quad (1.192)$$

このとき、2等分した2つの回路では、

$$\begin{pmatrix} V \\ (\mathbf{v}_0) \end{pmatrix} = [Z_{\frac{1}{2}}] \begin{pmatrix} I \\ (\mathbf{i}_0) \end{pmatrix} \quad (1.193)$$

$$\begin{pmatrix} -V \\ (\mathbf{v}_0) \end{pmatrix} = [Z_{\frac{1}{2}}] \begin{pmatrix} -I \\ -(\mathbf{i}_0) \end{pmatrix} \quad (1.194)$$

両者の和をとって、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2(\mathbf{v}_0) \end{pmatrix} = [Z_{\frac{1}{2}}] \begin{pmatrix} 0 \\ (0) \end{pmatrix} \quad (1.195)$$

これより、左図のように中心の端子の電位（列ベクトル (v_0) の要素）はすべてゼロとなるので、右図のように中心の端子を全て短絡（ショート）しても、入出力の端子の電圧、電流は変わらない。

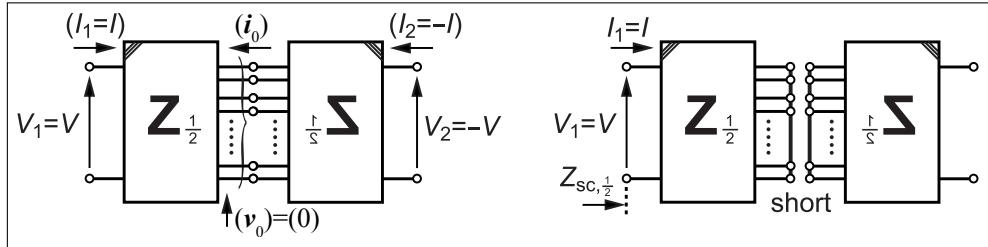


図 1.15. 軸対称回路の中心端子を短絡したときの等価回路

また、入出力電圧を

$$V_1 = V_2 = V \quad (1.196)$$

とすると、入出力電流の関係は（導出省略）,

$$I_1 = I_2 = I \quad (1.197)$$

このとき、中心端子の電流はすべてゼロになり、開放（オーブン）しても入出力の端子の電圧、電流は変わらない。

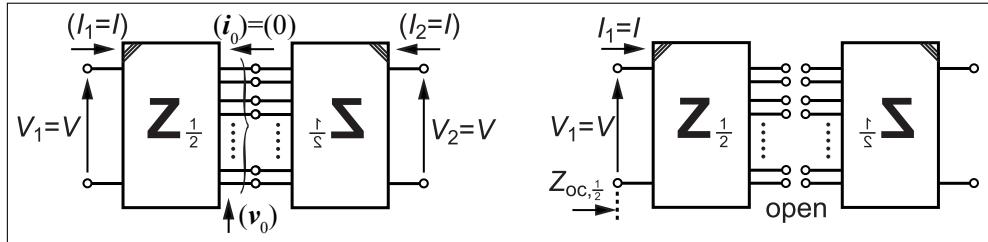


図 1.16. 軸対称回路の中心端子を開放したときの等価回路

1.8.2 インピーダンス行列要素

中心端子を短絡したときの入力インピーダンス $Z_{sc,\frac{1}{2}}$ は、

$$Z_{sc,\frac{1}{2}} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_1=-I_2=I} = \frac{Z_{11}I + Z_{12}(-I)}{I} = Z_{11} - Z_{12} \quad (1.198)$$

また、開放したときの入力インピーダンス $Z_{oc,\frac{1}{2}}$ は、

$$Z_{oc,\frac{1}{2}} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_1=I_2=I} = \frac{Z_{11}I + Z_{12}I}{I} = Z_{11} + Z_{12} \quad (1.199)$$

逆に、インピーダンス行列要素は、

$$Z_{11} = \frac{Z_{oc,\frac{1}{2}} + Z_{sc,\frac{1}{2}}}{2} = Z_{22} \quad (1.200)$$

$$Z_{12} = \frac{Z_{oc,\frac{1}{2}} - Z_{sc,\frac{1}{2}}}{2} = Z_{21} \quad (1.201)$$

1.9 伝送回路パラメータ

1.9.1 動作伝送係数

次の図のように 2 端子対回路のポート 1 に内部抵抗 R_1 の電圧源 E を接続し、ポート 2 には任意の負荷 R_2 を接続する。

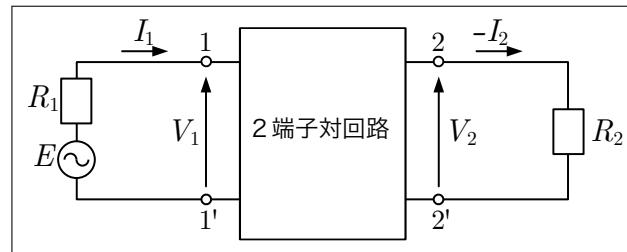


図 1.17. 負荷 R_2 で終端した回路

このような電圧源から最大電力を得るために、次の図のように電源の内部抵抗 R_1 に等しい負荷を接続すればよい。

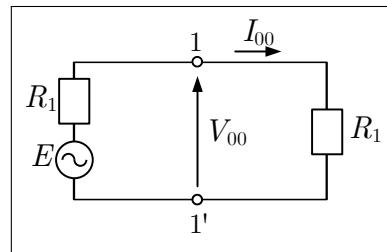


図 1.18. 最大電力が得られる回路

整合負荷 R_1 で得られる最大電力 P_{00} と任意の負荷 R_2 で消費される電力 P_2 との比の平方根によって動作伝送係数 S_B が次のように定義される。

$$S_B = \sqrt{\frac{P_{00}}{P_2}} = \sqrt{\frac{V_{00}I_{00}}{V_2(-I_2)}} = \sqrt{\frac{R_1 I_{00}^2}{R_2(-I_2)^2}} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{I_{00}}{-I_2} \quad (1.202)$$

ここで,

$$I_{00} = \frac{E}{2R_1} \quad (1.203)$$

よって、動作伝送係数 S_B は^{*1} [1],

$$S_B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1} \frac{E}{V_2}} \quad (1.204)$$

最大電力が得られる基準の回路として、終端負荷 R_2 とするなら、次の図のように理想変成器 ($n : 1$) を用いてもよい。端子 1-1' から負荷側を見た入力インピーダンス Z_{in} を R_1 と等しくすれば最大電力が得られる。

$$Z_{in} = \frac{V'_1}{I'_1} = \frac{nV'_2}{\frac{-1}{n}I'_2} = n^2 \frac{V'_2}{-I'_2} = n^2 R_2 = R_1 \quad (1.205)$$

よって、変成比 n は、

$$n = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \quad (1.206)$$

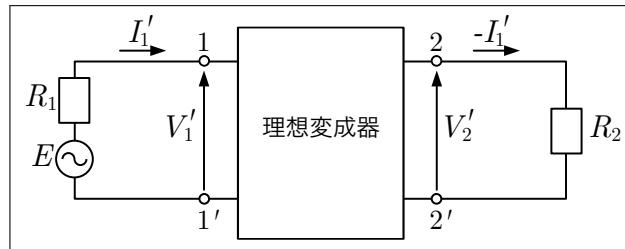


図 1.19. 理想変成器を用いた基準の回路

1.9.2 挿入伝送係数

挿入伝送係数 S_I は、電源と負荷の間に 2 端子対回路を挿入した場合としない場合の負荷 R_2 における消費電力比の平方根によって次のように定義される。

$$S_I = \sqrt{\frac{P_0}{P_2}} = \sqrt{\frac{V_0 I_0}{V_2 (-I_2)}} = \sqrt{\frac{R_2 I_0^2}{R_2 (-I_2)^2}} = \frac{I_0}{-I_2} = \frac{V_0}{V_2} \quad (1.207)$$

^{*1} G. C. Temes and S. K. Mitra, *Modern Filter Theory and Design*, “Transducer Function, Characteristics Functions,” pp. 14–16, Wiley (1973).

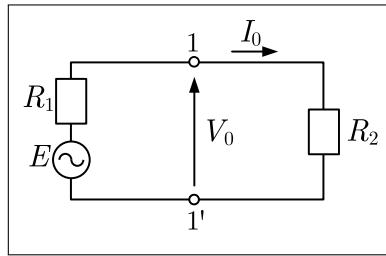


図 1.20. 揿入伝送係数の定義で用いられる回路：回路挿入前

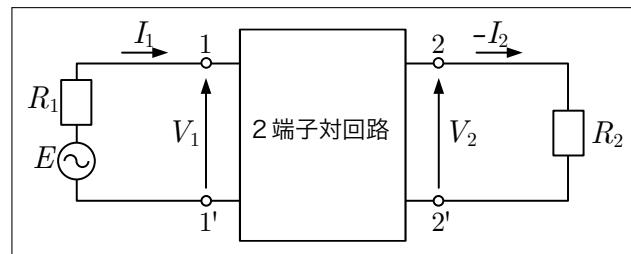


図 1.21. 揿入伝送係数の定義で用いられる回路：回路挿入後

1.9.3 揿入伝達係数

挿入伝達係数は挿入伝送係数 S_I の逆数で与えられる。

$$\frac{1}{S_I} = \sqrt{\frac{P_2}{P_0}} = \frac{-I_2}{I_0} = \frac{V_2}{V_0} \quad (1.208)$$

回路挿入前の図より, I_0 は,

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad (1.209)$$

一方, 回路挿入後の図より,

$$V_1 = E - I_1 R_1 \quad (1.210)$$

$$V_2 = -I_2 R_2 \quad (1.211)$$

1.9.4 基本行列との関係

回路の基本行列が与えられている場合,

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (1.212)$$

式 (1.211) より,

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2) = (AR_2 + B)(-I_2) \quad (1.213)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2) = (CR_2 + D)(-I_2) \quad (1.214)$$

式 (1.210) に上式を代入して V_1 , I_1 を消去すると,

$$(AR_2 + B)(-I_2) = E - (CR_2 + D)(-I_2)R_1$$

$$\therefore (AR_2 + B + CR_1R_2 + DR_1)(-I_2) = E \quad (1.215)$$

よって, $(-I_2)$ は,

$$-I_2 = \frac{E}{AR_2 + B + CR_1R_2 + DR_1} \quad (1.216)$$

上式と式 (1.209) より, 插入伝送係数 S_I , およびその逆数の挿入伝達係数は, 次のようになる.

$$S_I = \frac{I_0}{-I_2} = \frac{AR_2 + B + CR_1R_2 + DR_1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{1}{S_I} = \frac{R_1 + R_2}{AR_2 + B + CR_1R_2 + DR_1} \quad (1.217)$$

式 (1.203), 式 (1.216) より,

$$\frac{I_{00}}{-I_2} = \frac{\frac{E}{2R_1}}{\frac{E}{AR_2 + B + CR_1R_2 + DR_1}} = \frac{AR_2 + B + CR_1R_2 + DR_1}{2R_1} \quad (1.218)$$

これより, 動作伝送係数 S_B は^{*2} [2],

$$S_B = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{I_{00}}{-I_2} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{AR_2 + B + CR_1R_2 + DR_1}{2R_1}$$

$$= \frac{AR_2 + B + CR_1R_2 + DR_1}{2\sqrt{R_1R_2}} = \frac{R_1 + R_2}{2\sqrt{R_1R_2}} S_I \quad (1.219)$$

電源の内部抵抗 R_1 と負荷抵抗 R_2 が等しく $R \equiv R_1 = R_2$ のとき, 插入伝送係数 S_I と動作伝送係数 S_B は一致し,

$$S_B \Big|_{R=R_1=R_2} = S_I \Big|_{R=R_1=R_2} = \frac{AR + B + CR^2 + DR}{2R} \quad (1.220)$$

さらに, $R = 1$ であれば,

$$S_B \Big|_{R_1=R_2=1} = S_I \Big|_{R_1=R_2=1} = \frac{A + B + C + D}{2} \quad (1.221)$$

^{*2} R. S. Elliott, *An Introduction to Guided Waves and Microwave Circuits*, “13.5 The Insertion Loss Method: Lumped Elements,” Prentice Hall (1992).

1.9.5 インピーダンス行列との関係

回路のインピーダンス行列が与えられている場合,

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (1.222)$$

式 (1.211) より,

$$\begin{aligned} V_2 &= -I_2 R_2 = Z_{12} I_1 + Z_{22} I_2 \\ \therefore I_1 &= \frac{R_2 + Z_{22}}{Z_{12}} (-I_2) \end{aligned} \quad (1.223)$$

式 (1.210) より,

$$V_1 = E - I_1 R_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \quad (1.224)$$

式 (1.223) を用いて I_1 を消去すると,

$$\begin{aligned} E &= (R_1 + Z_{11}) I_1 + Z_{12} I_2 = (R_1 + Z_{11}) \frac{R_2 + Z_{22}}{Z_{12}} (-I_2) + Z_{12} I_2 \\ &= \frac{(R_1 + Z_{11})(R_2 + Z_{22}) - Z_{12}^2}{Z_{12}} (-I_2) \end{aligned} \quad (1.225)$$

式 (1.225), 式 (1.216) より,

$$\frac{I_{00}}{-I_2} = \frac{\frac{E}{2R_1}}{\frac{EZ_{12}}{(R_1+Z_{11})(R_2+Z_{22})-Z_{12}^2}} = \frac{1}{2R_1} \cdot \frac{(R_1 + Z_{11})(R_2 + Z_{22}) - Z_{12}^2}{Z_{12}} \quad (1.226)$$

これより, 動作伝送係数 S_B は,

$$\begin{aligned} S_B &= \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{I_{00}}{-I_2} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{1}{2R_1} \cdot \frac{(R_1 + Z_{11})(R_2 + Z_{22}) - Z_{12}^2}{Z_{12}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{R_1 R_2}} \cdot \frac{(R_1 + Z_{11})(R_2 + Z_{22}) - Z_{12}^2}{Z_{12}} \end{aligned} \quad (1.227)$$

1.9.6 反射係数

回路挿入後の回路において, 端子 1-1' から回路を見たときの反射係数 Γ_1 は,

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{Z_{in} - R_1}{Z_{in} + R_1} = \frac{\frac{V_1}{I_1} - R_1}{\frac{V_1}{I_1} + R_1} = \frac{V_1 - I_1 R_1}{V_1 + I_1 R_1} \\ &= \frac{A R_2 + B - (C R_2 + D) R_1}{A R_2 + B + (C R_2 + D) R_1} \end{aligned} \quad (1.228)$$

CHAPTER 2

方形導波管

方形導波管内の電磁波の伝搬モードについて詳細に解説する。まず、スカラーヘルムホルツ方程式を変数分離法で解き、 TE モードと TM モードについて各々、電界と磁界のモード関数を導出する。次に、これらのモード関数の正規化係数を求め、基本モードや低次の高次モードにおける電界および磁界の分布を図示している。そして、標準的な方形導波管の寸法と、様々なモードに対応する遮断波数、遮断波長、遮断周波数を示し、実際の導波管設計における基礎的な理解を深めることを目的としている。

2.1 スカラーヘルムホルツ方程式（直角座標系）

z 軸に直交する面内で定義した2次元微分演算子 ∇_t を用いたスカラーヘルムホルツ方程式

$$\nabla_t^2 \Psi + k_c^2 \Psi = 0 \quad (2.1)$$

を直角座標系 (x, y, z) で表すと、

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + k_c^2 \Psi = 0 \quad (2.2)$$

いま、 $\Psi(x, t) = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y)$ （変数分離形）で表されるとすると、

$$\mathcal{Y} \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial x^2} + \mathcal{X} \frac{\partial^2 \mathcal{Y}}{\partial y^2} + k_c^2 \mathcal{X} \mathcal{Y} = 0 \quad (2.3)$$

両辺を $\mathcal{X} \mathcal{Y}$ で割ると、

$$\frac{1}{\mathcal{X}(x)} \frac{\partial^2 \mathcal{X}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\mathcal{Y}(y)} \frac{\partial^2 \mathcal{Y}(y)}{\partial y^2} + k_c^2 = 0 \quad (2.4)$$

いま, x に依らない定数 k_x , y に依らない定数 k_y を定義すると, 上式は次のようになる.

$$\frac{1}{\mathcal{X}(x)} \frac{\partial^2 \mathcal{X}(x)}{\partial x^2} + k_x^2 = 0, \quad \frac{1}{\mathcal{Y}(y)} \frac{\partial^2 \mathcal{Y}(y)}{\partial y^2} + k_y^2 = 0 \quad (2.5)$$

したがって,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{X}(x)}{\partial x^2} + k_x^2 \mathcal{X}(x) = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{Y}(y)}{\partial y^2} + k_y^2 \mathcal{Y}(y) = 0 \quad (2.6)$$

ここで,

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (2.7)$$

これより, 微分方程式の解 $\mathcal{X}(x)$ は, $\sin k_x x$, $\cos k_x x$ あるいは, $e^{j k_x x}$, $e^{-j k_x x}$ で与えられ, これらを一般化して $h(k_x x)$ と書くことにする. 同様にして, $\mathcal{Y}(y)$ については $h(k_y y)$ で表わす.

2.2 方形導波管の TE モード

2.2.1 境界条件

TE モードの場合, 導波管の管壁を C , その法線方向の長さを n とすると, 管壁 C での境界条件は次のようになる.

$$\frac{\partial \Psi^{\text{TE}}}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } C) \quad (2.8)$$

方形導波管の場合,

$$\left. \frac{\partial \Psi^{\text{TE}}}{\partial x} \right|_{x=0,a} = 0 \quad (0 \leq y \leq b) \quad (2.9)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi^{\text{TE}}}{\partial y} \right|_{y=0,b} = 0 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2.10)$$

2.2.2 TE モード

これを満たすように $h(k_x x)$, $h(k_y y)$ を決めると, 次のようになる.

$$h(k_x x) = \cos k_x x, \quad k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

$$h(k_y y) = \cos k_y y, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.12)$$

ただし, $m = n = 0$ を除く. よって,

$$\psi^{\text{TE}} = \Psi^{\text{TE}}(x, y) \mathcal{Z}^{\text{TE}}(z) \quad (2.13)$$

ここで,

$$\Psi^{\text{TE}} = A_{[mn]} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.14)$$

$$\mathcal{Z}^{\text{TE}} = e^{-jk_{z,[mn]}z} \quad (2.15)$$

このとき,

$$\begin{aligned} k^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_{z,[mn]}^2 \\ &= k_{c,[mn]}^2 + k_{z,[mn]}^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

これより, 遮断波数 $k_{c,[mn]}$ は,

$$k_{c,[mn]} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (2.17)$$

伝搬定数 $\gamma_{[mn]}$ は,

$$\gamma_{[mn]} = jk_{z,[mn]} = \begin{cases} j\beta_{[mn]} = j\sqrt{k^2 - k_{c,[mn]}^2} & (k > k_{c,[mn]}) \\ \alpha_{[mn]} = \sqrt{k_{c,[mn]}^2 - k^2} & (k < k_{c,[mn]}) \end{cases} \quad (2.18)$$

ここで, $\beta_{[mn]}$ は位相定数を示し, これがゼロとなる周波数 f_c を遮断周波数, 波長 λ_c を遮断波長と呼び, 次のようになる.

$$f_{c,[mn]} = \frac{k_{c,[mn]}}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (2.19)$$

$$\lambda_{c,[mn]} = \frac{2\pi}{k_{c,[mn]}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \quad (2.20)$$

伝搬モードの管内波長 $\lambda_{g,[mn]}$ は,

$$\lambda_{g,[mn]} = \frac{2\pi}{\beta_{[mn]}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_{c,[mn]}^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{c,[mn]}}\right)^2}} \quad (2.21)$$

2.2.3 モード関数

モード関数の定義式 [3] より $\mathbf{h}_{[mn]}$ を求めると,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}_{[mn]} &= -\nabla_t \Psi^{\text{TE}} \\
 &= -A_{[mn]} \nabla_t \left(\cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right) \\
 &= A_{[mn]} \left[\frac{m\pi}{a} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_x + \frac{n\pi}{b} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_y \right]
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

これより, $\mathbf{e}_{[mn]}$ は,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{[mn]} &= \mathbf{h}_{[mn]} \times \mathbf{a}_z \\
 &= A_{[mn]} \left[-\frac{m\pi}{a} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_y + \frac{n\pi}{b} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_x \right] \\
 &= A_{[mn]} \left[\frac{n\pi}{b} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_x - \frac{m\pi}{a} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \mathbf{a}_y \right]
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

2.3 方形導波管の TE モードの正規化

2.3.1 磁界モード関数の正規化条件

モード関数の正規化条件より,

$$\begin{aligned}
 \iint_S |\mathbf{h}_{[mn]}|^2 dS &= A_{[mn]}^2 \iint_{(a \times b)} \left[\left\{ \frac{m\pi}{a} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right\}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{n\pi}{b} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right\}^2 \right] dS = 1
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

整理して,

$$\begin{aligned}
 A_{[mn]}^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \int_0^a \sin^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \cos^2 \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dy \right. \\
 \left. + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \int_0^a \cos^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \sin^2 \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dy \right] = 1
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

積分項は, $m \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ 1 - \cos \left(\frac{2m\pi x}{a} \right) \right\} dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{a}{2m\pi} \sin \left(\frac{2m\pi x}{a} \right) \right]_0^a \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \int_0^a \cos^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ 1 + \cos \left(\frac{2m\pi x}{a} \right) \right\} dx \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

また, $m = 0$ のとき,

$$\int_0^a \sin^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx = 0 \quad (2.28)$$

$$\int_0^a \cos^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx = \int_0^a dx = a \quad (2.29)$$

まとめると,

$$\int_0^a \sin^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx = \begin{cases} \frac{a}{2} & (m \neq 0) \\ 0 & (m = 0) \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\int_0^a \cos^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx = \begin{cases} \frac{a}{2} & (m \neq 0) \\ a & (m = 0) \end{cases} \equiv \frac{a}{\epsilon_m} \quad (2.31)$$

ここで,

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ 2 & (m = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.32)$$

これより,

$$\begin{aligned} \iint_S |\mathbf{h}_{[mn]}|^2 dS &= A_{[mn]}^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{\epsilon_n} + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{a}{\epsilon_m} \cdot \frac{b}{2} \right] \\ &= A_{[mn]}^2 \pi^2 \frac{(mb)^2 \epsilon_m + (nb)^2 \epsilon_n}{2ab\epsilon_m\epsilon_n} \\ &= A_{[mn]}^2 \pi^2 \frac{(mb)^2 + (nb)^2}{ab\epsilon_m\epsilon_n} = 1 \end{aligned} \quad (2.33)$$

よって, 正規化係数 $A_{[mn]}$ は次のようになる.

$$A_{[mn]} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{ab\epsilon_m\epsilon_n}{(mb)^2 + (nb)^2}} = \sqrt{\frac{\epsilon_m\epsilon_n}{ab}} \frac{1}{k_{c,[mn]}} \quad (2.34)$$

2.3.2 スカラ関数を用いた正規化

あるいは、スカラ関数 Ψ^{TE} より求めることもでき次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \iint_S |\mathbf{h}_{[mn]}|^2 dS &= k_{c,[mn]}^2 \iint (\Psi^{\text{TE}}(x, y))^2 dS \\
 &= k_{c,[mn]}^2 A_{[mn]}^2 \int_0^b \int_0^a \left\{ \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right\}^2 dx dy \\
 &= k_{c,[mn]}^2 A_{[mn]}^2 \int_0^a \cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy \\
 &= k_{c,[mn]}^2 A_{[mn]}^2 \frac{a}{\epsilon_m} \frac{b}{\epsilon_n} = 1
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

2.4 方形導波管の TE モードの例

2.4.1 TE₁₀ モード

基本 TE₁₀ モード ($m = 1, n = 0$) では、

$$k_{c,[10]} = \frac{\pi}{a} \tag{2.36}$$

$$\lambda_{c,[10]} = 2a \tag{2.37}$$

$$A_{[10]} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{a}{\pi} \tag{2.38}$$

より、

$$\mathbf{e}_{[10]} = A_{[10]} \left(-\frac{\pi}{a} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathbf{a}_y = -\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathbf{a}_y \tag{2.39}$$

$$\mathbf{h}_{[10]} = A_{[10]} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathbf{a}_x = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathbf{a}_x \tag{2.40}$$

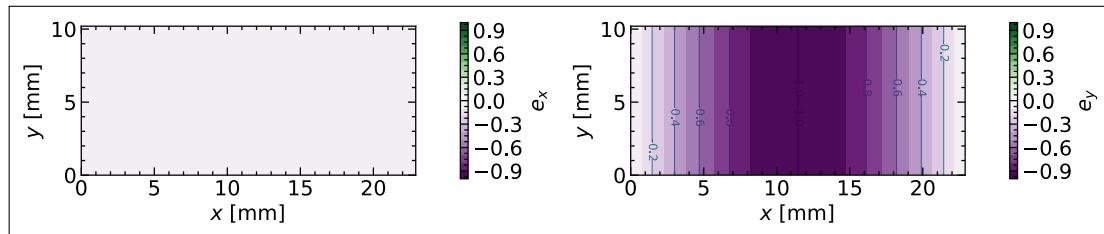


図 2.1. 電界モード関数 $e_{[10]}$ の x 成分 e_x (左図) および y 成分 e_y (右図)

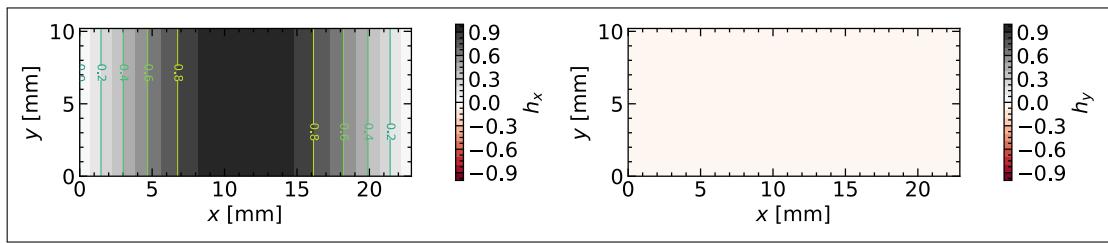


図 2.2. 磁界モード関数 $h_{[10]}$ の x 成分 h_x (左図) および y 成分 h_y (右図)

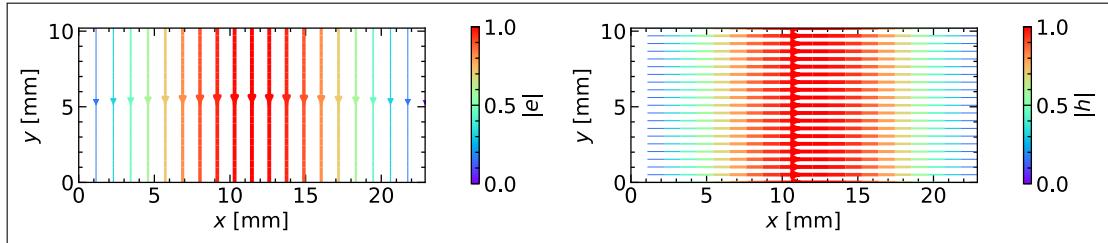


図 2.3. モード関数 $e_{[10]}$ (左図), $h_{[10]}$ (右図) のベクトルの向き

2.4.2 TE₁₁ モード

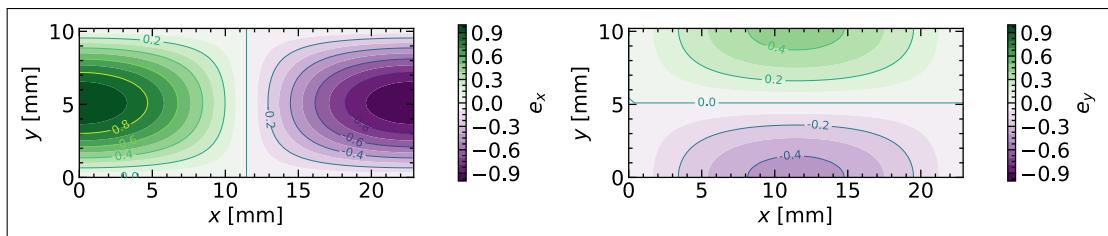


図 2.4. 電界モード関数 $e_{[11]}$ の x 成分 e_x (左図) および y 成分 e_y (右図)

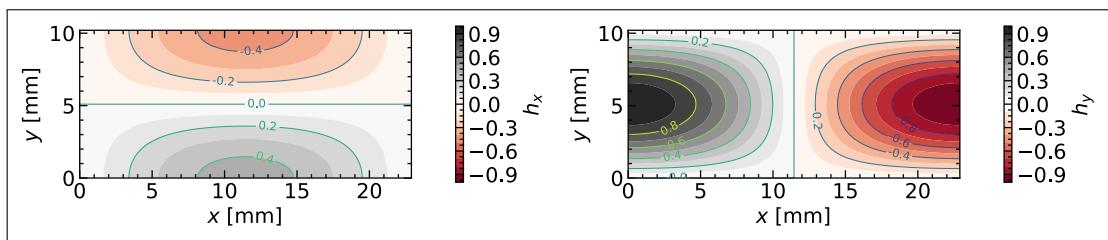


図 2.5. 磁界モード関数 $h_{[11]}$ の x 成分 h_x (左図) および y 成分 h_y (右図)

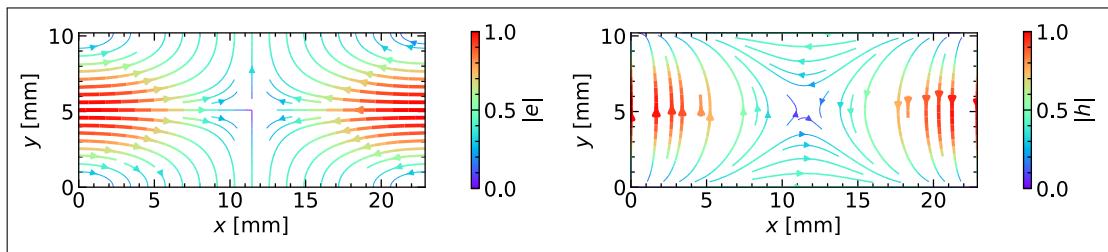


図 2.6. モード関数 $e_{[11]}$ (左図), $h_{[11]}$ (右図) のベクトルの向き

2.4.3 TE₂₁ モード

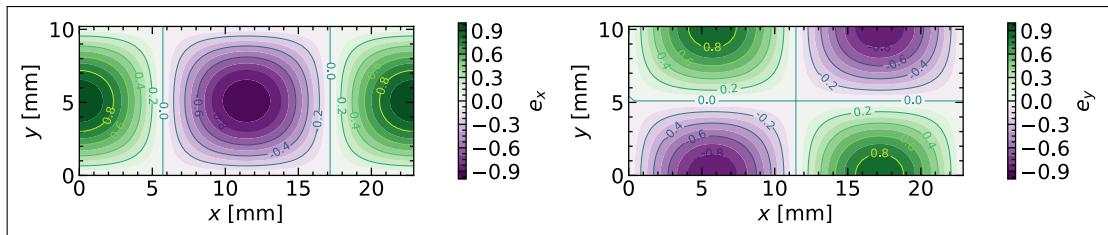


図 2.7. 電界モード関数 $e_{[21]}$ の x 成分 e_x (左図) および y 成分 e_y (右図)

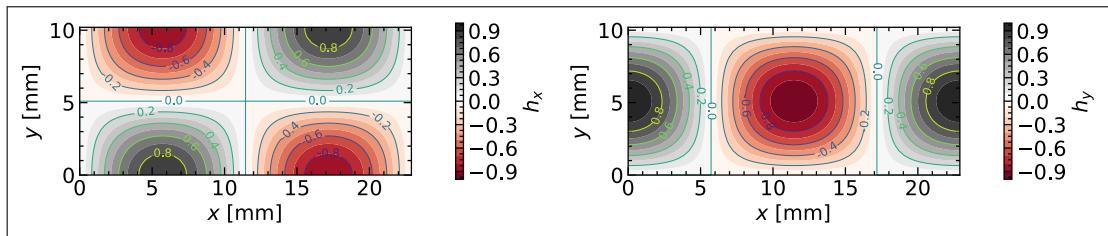


図 2.8. 磁界モード関数 $h_{[21]}$ の x 成分 h_x (左図) および y 成分 h_y (右図)

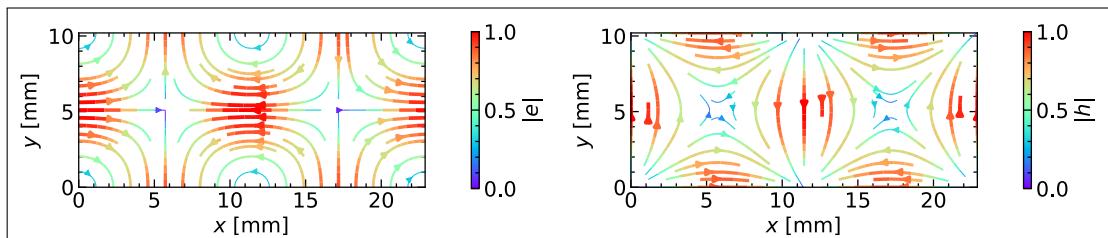


図 2.9. モード関数 $e_{[21]}$ (左図), $h_{[21]}$ (右図) のベクトルの向き

2.5 方形導波管の TM モードの正規化

TM モードの場合, 管壁 C での境界条件

$$\Psi^{\text{TM}} = 0 \quad (\text{on } C) \quad (2.41)$$

より, $h(k_x x)$, $h(k_y y)$ は次のようになる.

$$h(k_x x) = \sin k_x x, \quad k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.42)$$

$$h(k_y y) = \sin k_y y, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.43)$$

よって,

$$\psi^{\text{TM}} = \Psi^{\text{TM}}(x, y) \mathcal{Z}^{\text{TM}}(z) \quad (2.44)$$

ここで,

$$\Psi^{\text{TM}} = A_{(mn)} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.45)$$

$$\mathcal{Z}^{\text{TM}} = e^{-jk_{z,(mn)}z} \quad (2.46)$$

ただし, $m \neq 0$, $n \neq 0$. TE モードと同様にして,

$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_{z,(mn)}^2 = k_{c,(mn)}^2 + k_{z,(mn)}^2 \quad (2.47)$$

よって, 遮断波数 $k_{c,(mn)}$ は,

$$k_{c,(mn)} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (2.48)$$

これより, TM _{mn} モード関数は,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(mn)} &= -\nabla_t \Psi^{\text{TM}} \\ &= -A_{(mn)} \nabla_t \left(\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right) \\ &= -A_{(mn)} \left[\frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \mathbf{a}_x + \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \mathbf{a}_y \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{(mn)} &= \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_{(mn)} \\ &= A_{(mn)} \left[-\frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \mathbf{a}_y + \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \mathbf{a}_x \right] \\ &= A_{(mn)} \left[\frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \mathbf{a}_x - \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \mathbf{a}_y \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

正規化条件より、係数 $A_{(mn)}$ を求めると、

$$\begin{aligned} \iint_S |e_{(mn)}|^2 dS &= A_{(mn)}^2 \iint_{(a \times b)} \left[\left\{ \frac{m\pi}{a} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{n\pi}{b} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right\}^2 \right] dS = 1 \end{aligned} \quad (2.51)$$

整理して、

$$\begin{aligned} A_{(mn)}^2 &\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \int_0^a \cos^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \sin^2 \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dy \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \int_0^a \sin^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \cos^2 \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dy \right] \\ &= A_{(mn)}^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \right] \\ &= A_{(mn)}^2 \pi^2 \frac{(mb)^2 + (nb)^2}{4ab} = 1 \end{aligned} \quad (2.52)$$

よって、正規化係数 $A_{(mn)}$ は、

$$A_{(mn)} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{ab}{(mb)^2 + (nb)^2}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{1}{k_{c,(mn)}} \quad (2.53)$$

TE_{mn} モードと TM_{mn} モードをまとめて、

$$A_{mn} = \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \frac{1}{k_{c,mn}} \quad (2.54)$$

ここでは省略するが、スカラ関数による面積分によっても求めることができる。

2.6 方形導波管の TM モードの例

2.6.1 TM₁₁ モード

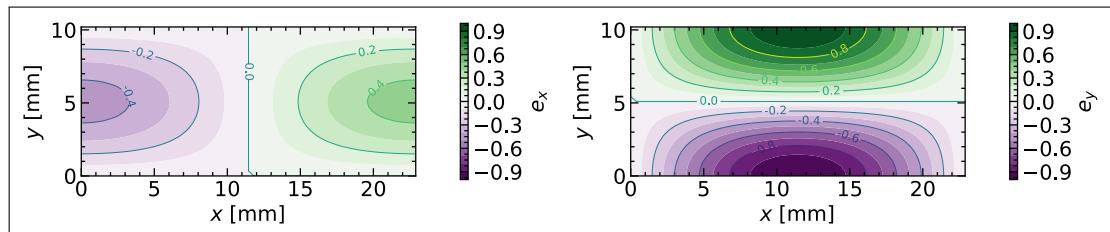


図 2.10. 電界モード関数 $e_{(11)}$ の x 成分 e_x (左図) および y 成分 e_y (右図)

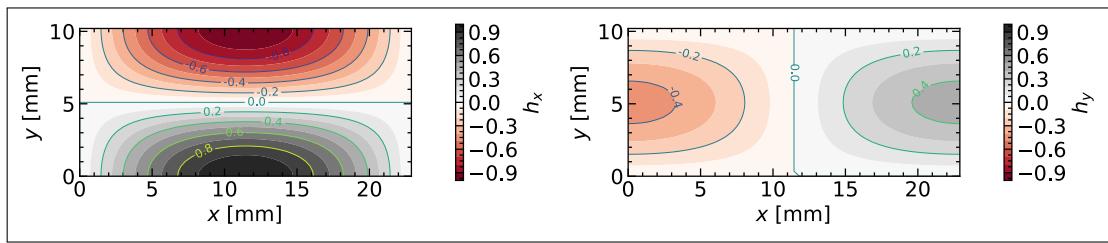


図 2.11. 磁界モード関数 $h_{(11)}$ の x 成分 h_x (左図) および y 成分 h_y (右図)

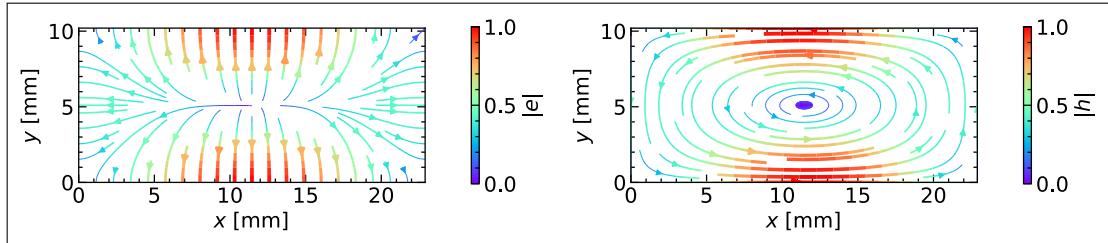


図 2.12. モード関数 $e_{(11)}$ (左図), $h_{(11)}$ (右図) のベクトルの向き

2.6.2 TM₂₁ モード

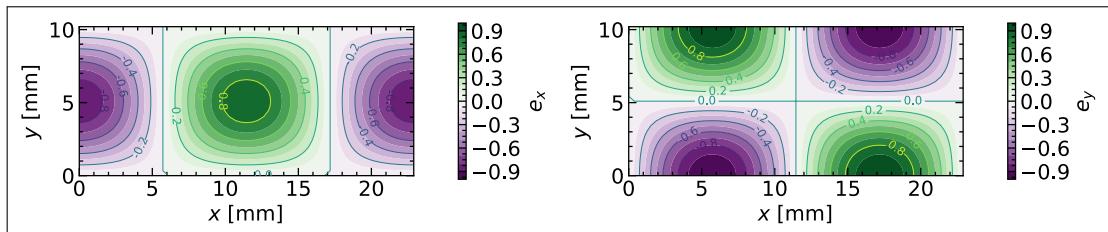


図 2.13. 電界モード関数 $e_{(21)}$ の x 成分 e_x (左図) および y 成分 e_y (右図)

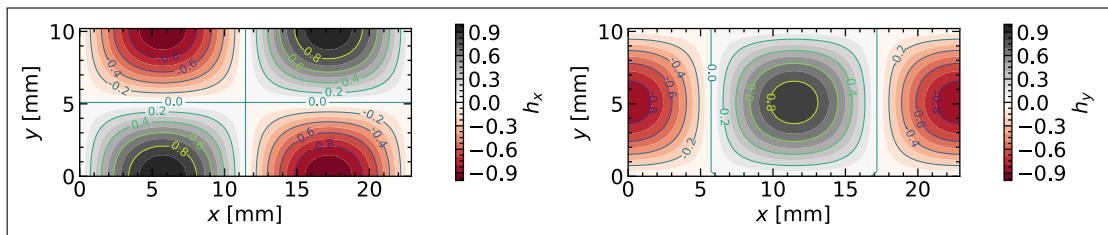


図 2.14. 磁界モード関数 $h_{(21)}$ の x 成分 h_x (左図) および y 成分 h_y (右図)

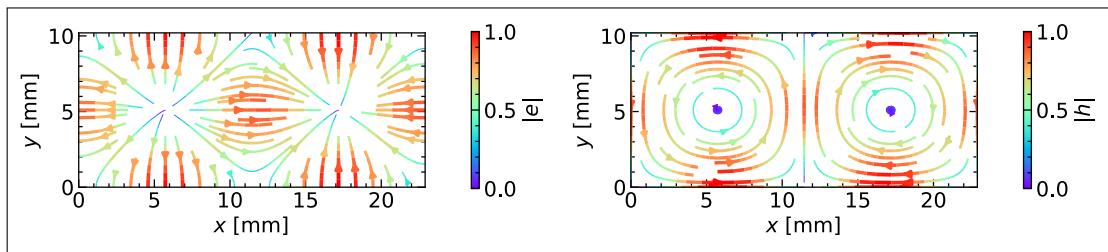


図 2.15. モード関数 $e_{(21)}$ (左図), $h_{(21)}$ (右図) のベクトルの向き

2.6.3 TM₂₂ モード

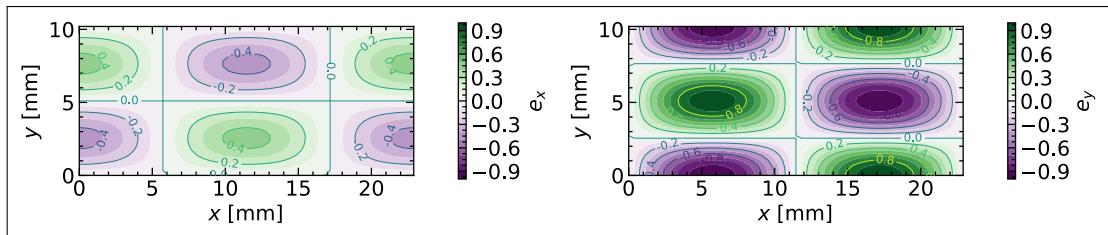


図 2.16. 電界モード関数 $e_{(22)}$ の x 成分 e_x (左図) および y 成分 e_y (右図)

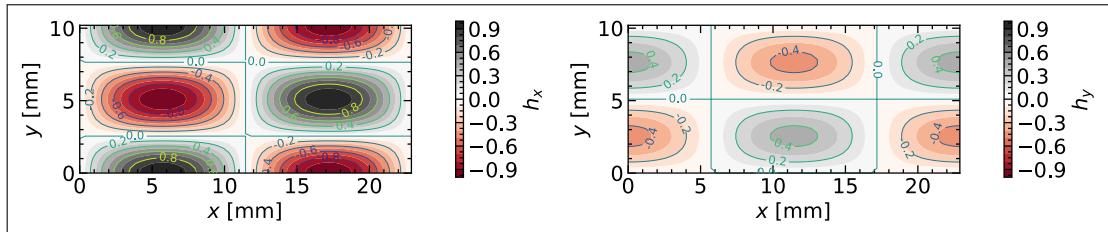


図 2.17. 磁界モード関数 $h_{(22)}$ の x 成分 h_x (左図) および y 成分 h_y (右図)

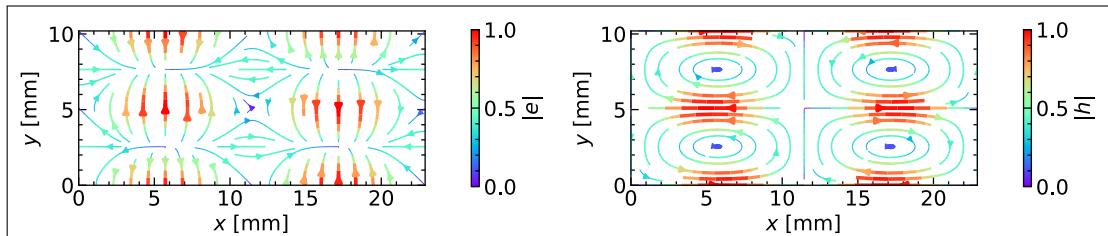


図 2.18. モード関数 $e_{(22)}$ (左図), $h_{(22)}$ (右図) のベクトルの向き

2.7 標準的な方形導波管

2.7.1 方形導波管の主な寸法規格

標準的な方形導波管の周波数帯域、寸法、基本モードの遮断波長を表にまとめている。方形導波管は、丸角変換器を介して円形導波管と接続され、参考までよく用いられる円形の直径もいっしょに示している。

表 2.1 方形導波管の寸法と仕様（代表例）

周波数帯域 [GHz]	呼称 [帯]	WR EIA	形名 JIS ほか	幅 a [mm]	高さ b [mm]	$f_{c,[10]}$ [GHz]	円形直径 D [mm]
2.60–3.95	S	284	WRJ-3	72.14	34.04	2.078	73.9
3.94–5.99	C	187	WRJ-5	47.55	22.149	3.152	48.8
8.20–12.5	X	90	WRJ-10	22.860	10.160	6.557	23.4
11.9–18.0	Ku	62	WRJ-15	15.799	7.899	9.486	16.1
17.6–26.7	K	42	WRJ-24	10.668	4.318	14.047	10.9
21.7–33.7		34	WRJ-27	8.636	4.318	17.328	8.8
26.4–40.1	Ka	28	WRJ-34	7.112	3.556	21.081	7.3
33.0–50.1	Q	22	WRJ-40	5.690	2.845	26.342	5.8
39.3–59.7	U	19	WRJ-50	4.775	2.388	31.357	4.8
49.9–75.8	V	15	WRJ-60	3.759	1.880	39.863	3.9
73.8–112		10	WRJ-95	2.540	1.270	59.010	2.6

2.7.2 方形導波管の遮断波長の例

X 帯の方形導波管 ($a = 22.9$ mm, $b = 10.20$ mm) の TE_{mn} , TM_{mn} モードのしゃ断波数 k_c , しゃ断波長 λ_c , しゃ断周波数 f_c を低次モードから順に示すと次のようになる。

表 2.2 方形導波管 (X 帯, $a = 22.9$ mm, $b = 10.20$ mm) のモード別の遮断特性

No.	モード	k_c	λ_c [mm]	f_c [GHz]
1	$TE_{1,0}$	0.1371875	45.8000	6.5456
2	$TE_{2,0}$	0.2743749	22.9000	13.0913
3	$TE_{0,1}$	0.3079993	20.4000	14.6956
4,5	$TE_{1,1}$	0.3371705	18.6350	16.0874
4,5	$TM_{1,1}$	0.3371705	18.6350	16.0874
6	$TE_{3,0}$	0.4115624	15.2667	19.6369
7,8	$TE_{2,1}$	0.4124865	15.2325	19.6810
7,8	$TM_{2,1}$	0.4124865	15.2325	19.6810
9,10	$TE_{3,1}$	0.5140497	12.2229	24.5269
9,10	$TM_{3,1}$	0.5140497	12.2229	24.5269
11	$TE_{4,0}$	0.5487498	11.4500	26.1825
12	$TE_{0,2}$	0.6159986	10.2000	29.3912
13,14	$TE_{4,1}$	0.6292773	9.9848	30.0247
13,14	$TM_{4,1}$	0.6292773	9.9848	30.0247
15	$TE_{1,2}$	0.6310900	9.9561	30.1112

CHAPTER 3

円形導波管

円形導波管内の電磁波の伝搬モードについて詳細に解説する。まず、スカラーヘルムホルツ方程式を円筒座標系で解き、変数分離法を用いて電磁界の振る舞いを記述する。 TE モードと TM モードについて、それぞれ境界条件、スカラ関数、伝搬定数、管内波長、遮断波長を導出する。さらに、これらのモードの電界および磁界モード関数を導き、正規化係数の計算過程を詳述する。そして、代表的なモードの電界分布の図示し、様々なモードの遮断波数と遮断波長を表形式で示している。

3.1 スカラーヘルムホルツ方程式（円筒座標系）

2次元微分演算子 ∇_t を用いたスカラーヘルムホルツ方程式

$$\nabla_t^2 \Psi + k_c^2 \Psi = 0 \quad (3.1)$$

を円筒座標系 (ρ, ϕ, z) において解くため、変数分離形で

$$\Psi(\rho, \phi) = \mathcal{R}(\rho)\Phi(\phi) \quad (3.2)$$

とおくと、次式が得られる。

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \rho} \right) + \{k_c^2 - m^2\} \mathcal{R} = 0 \quad (3.3)$$

これは、 m 次のベッセル関数の微分方程式 (Bessel's equation of order m) であり、半径 $\rho = a$ の円形導波管の中心 ($\rho = 0$) においては有限な値をとるため、第1種ベッセル関数 $J_m(k_\rho \rho)$ を選べばよい。また、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad [\text{Harmonic equation}] \quad (3.4)$$

ここで,

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi) \quad (3.5)$$

より, m は整数となり, $\sin m\phi, \cos m\phi$ を用いればよい.

3.2 円形導波管の TE モード

3.2.1 境界条件

TE モードの円形導波管の半径 a の管壁 C 上での境界条件は,

$$\frac{\partial \Psi^{\text{TE}}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = 0 \quad (3.6)$$

よって,

$$J'_m(k_c a) = 0, \quad k_c = \frac{\chi'_{mn}}{a} \quad (3.7)$$

ただし, χ'_{mn} は $J'_m(\chi) = 0$ を満たす n 番目の零点を示す.

3.2.2 TE モード

境界条件より, TE モードのスカラ関数 ψ^{TE} は,

$$\psi^{\text{TE}} = \Psi^{\text{TE}}(\rho, \phi) \mathcal{Z}^{\text{TE}}(z) \quad (3.8)$$

ここで,

$$\Psi^{\text{TE}} = A_{[mn]} J_m \left(\frac{\chi'_{mn} \rho}{a} \right) \sin m\phi \quad (3.9)$$

$$\mathcal{Z}^{\text{TE}} = e^{-jk_{z,[mn]} z} \quad (3.10)$$

ただし, $m = 0$ のとき, $\sin m\phi = 0$ ゆえ, 上式の下側のみである. また, $A_{[mn]}$ は TE_{mn} モードの正規化係数を示す. ここで,

$$k^2 = \left(\frac{\chi'_{mn}}{a} \right)^2 + k_{z,[mn]}^2 \equiv k_{c,[mn]}^2 + k_{z,[mn]}^2 \quad (3.11)$$

ただし,

$$k_{c,[mn]} = \frac{\chi'_{mn}}{a}, \quad J'_m(\chi'_{mn}) = 0 \quad (3.12)$$

このとき、伝搬定数 $\gamma_{[mn]}$ は、

$$\gamma_{[mn]} = jk_{z,[mn]} = \begin{cases} j\beta_{[mn]} = j\sqrt{k^2 - k_{c,[mn]}^2} & (k > k_{c,[mn]}) \\ \alpha_{[mn]} = \sqrt{k_{c,[mn]}^2 - k^2} & (k < k_{c,[mn]}) \end{cases} \quad (3.13)$$

また、管内波長 $\lambda_{g,[mn]}$ (伝搬モード)、遮断波長 $\lambda_{c,[mn]}$ は、

$$\lambda_{g,[mn]} = \frac{2\pi}{\beta_{[mn]}} \quad (3.14)$$

$$\lambda_{c,[mn]} = \frac{2\pi}{k_{c,[mn]}} = \frac{2\pi}{\frac{\chi'_{mn}}{a}} = \frac{2\pi a}{\chi'_{mn}} \quad (3.15)$$

3.2.3 モード関数

磁界のモード関数 $\mathbf{h}_{[mn]}$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{[mn]} &= -\nabla_t \Psi^{\text{TE}} = -\left(\frac{\partial \Psi^{\text{TE}}}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi^{\text{TE}}}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \right) \\ &= -A_{[mn]} \left[\frac{d}{d\rho} \left\{ J_m \left(\frac{\chi'_{mn}\rho}{a} \right) \right\} \sin m\phi \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} J_m \left(\frac{\chi'_{mn}\rho}{a} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos m\phi \right) \mathbf{a}_\phi \right] \\ &= A_{[mn]} \left[-\frac{\chi'_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\chi'_{mn}\rho}{a} \right) \cos m\phi \mathbf{a}_\rho \mp \frac{m}{\rho} J_m \left(\frac{\chi'_{mn}\rho}{a} \right) \sin m\phi \mathbf{a}_\phi \right] \\ &\equiv h_{\rho,[mn]} \mathbf{a}_\rho + h_{\phi,[mn]} \mathbf{a}_\phi \end{aligned} \quad (3.16)$$

また、電界のモード関数 $\mathbf{e}_{[mn]}$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{[mn]} &= \mathbf{h}_{[mn]} \times \mathbf{a}_z = (h_{\rho,[mn]} \mathbf{a}_\rho + h_{\phi,[mn]} \mathbf{a}_\phi) \times \mathbf{a}_z \\ &= -h_{\rho,[mn]} \mathbf{a}_\phi + h_{\phi,[mn]} \mathbf{a}_\rho = h_{\phi,[mn]} \mathbf{a}_\rho - h_{\rho,[mn]} \mathbf{a}_\phi \\ &= A_{[mn]} \left[\mp \frac{m}{\rho} J_m \left(\frac{\chi'_{mn}\rho}{a} \right) \sin m\phi \mathbf{a}_\rho + \frac{\chi'_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\chi'_{mn}\rho}{a} \right) \cos m\phi \mathbf{a}_\phi \right] \\ &\equiv e_{\rho,[mn]} \mathbf{a}_\rho + e_{\phi,[mn]} \mathbf{a}_\phi \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.3 円形導波管の TE モードの正規化

3.3.1 磁界モード関数の正規化条件

モード関数の正規化条件に関わる積分は,

$$\begin{aligned} \iint_S |\mathbf{h}_{[mn]}|^2 dS &= |A_{[mn]}|^2 k_{c,[mn]}^2 \iint_S (\Psi_{[mn]})^2 dS \\ &= |A_{[mn]}|^2 k_{c,[mn]}^2 \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[J_m \left(\frac{\chi'_{mn}\rho}{a} \right) \cos m\phi \right]^2 \rho d\rho d\phi \\ &= |A_{[mn]}|^2 k_{c,[mn]}^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 m\phi}{\cos^2 m\phi} d\phi \int_0^a J_m^2 \left(\frac{\chi'_{mn}\rho}{a} \right) \rho d\rho \end{aligned} \quad (3.18)$$

ここで,

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 m\phi d\phi = \begin{cases} \pi & (m \neq 0) \\ 0 & (m = 0) \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\phi d\phi = \begin{cases} \pi & (m \neq 0) \\ 2\pi & (m = 0) \end{cases} = \frac{2\pi}{\epsilon_m} \quad (3.20)$$

このとき, $m = 0$ のモードは $\cos m\phi = 1$ のみによって表されており, $\sin m\phi = 0$ は用いない. $\sin^2 m\phi$ の積分でも $m \neq 0$ として,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 m\phi}{\cos^2 m\phi} d\phi = \frac{2\pi}{\epsilon_m} \quad (3.21)$$

3.3.2 ベッセル関数の積分

ベッセル関数の不積分公式

$$\int z J_\nu^2(\alpha z) dz = \frac{1}{2} \left\{ z^2 J_\nu'^2(\alpha z) + \left(z^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2} \right) J_\nu^2(\alpha z) \right\} \quad (3.22)$$

より,

$$\begin{aligned} \int_0^a J_m^2 \left(\frac{\chi'_{mn}\rho}{a} \right) \rho d\rho &= \frac{1}{2} \left[\rho^2 J_m'^2 \left(\frac{\chi'_{mn}\rho}{a} \right) + \left(\rho^2 - \frac{m^2 a^2}{\chi'^2_{mn}} \right) J_m^2 \left(\frac{\chi'_{mn}\rho}{a} \right) \right]_0^a \\ &= \frac{1}{2} \left[a^2 J_m'^2(\chi'_{mn}) + \left(a^2 - \frac{m^2 a^2}{\chi'^2_{mn}} \right) J_m^2(\chi'_{mn}) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

TE モードの境界条件より, $J_m'(\chi'_{mn}) = 0$ より,

$$\int_0^a J_m^2 \left(\frac{\chi'_{mn}\rho}{a} \right) \rho d\rho = \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{m^2 a^2}{\chi'^2_{mn}} \right) J_m^2(\chi'_{mn}) \quad (3.24)$$

したがって,

$$\begin{aligned} \iint_S |\mathbf{h}_{[mn]}|^2 dS &= |A_{[mn]}|^2 \left(\frac{\chi'_{mn}}{a} \right)^2 \frac{2\pi}{\epsilon_m} \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{m^2 a^2}{\chi'^2_{mn}} \right) J_m^2(\chi'_{mn}) \\ &= |A_{[mn]}|^2 \frac{\pi}{\epsilon_m} \left(\chi'^2_{mn} - m^2 \right) J_m^2(\chi'_{mn}) \equiv 1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.3.3 正規化係数

TE_{mn} モードの正規化係数 $A_{[mn]} (> 0)$ を求めると次のようにになる (絶対値をつけない定義もできる).

$$A_{[mn]} = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\pi(\chi'_{mn}^2 - m^2)}} \frac{1}{|J_m(\chi'_{mn})|} = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\pi(k_{c,[mn]}^2 a^2 - m^2)}} \frac{1}{|J_m(\chi'_{mn})|} \quad (3.26)$$

モード関数を再記して,

$$\mathbf{e}_{[mn]} = A_{[mn]} \left[\mp \frac{m}{\rho} J_m \left(\frac{\chi'_{mn} \rho}{a} \right) \sin m\phi \, \mathbf{a}_\rho + \frac{\chi'_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\chi'_{mn} \rho}{a} \right) \cos m\phi \, \mathbf{a}_\phi \right] \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{[mn]} &= \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_{[mn]} = -e_{\phi,[mn]} \mathbf{a}_\rho + e_{\rho,[mn]} \mathbf{a}_\phi \\ &= A_{[mn]} \left[-\frac{\chi'_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\chi'_{mn} \rho}{a} \right) \cos m\phi \, \mathbf{a}_\rho \mp \frac{m}{\rho} J_m \left(\frac{\chi'_{mn} \rho}{a} \right) \sin m\phi \, \mathbf{a}_\phi \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

なお, $m = 0$ のとき, $\sin m\phi = 0$, $\cos m\phi = 1$ とえ, 上側符号はゼロ, 下側符号のみとなり, 次のようになる.

$$\mathbf{e}_{[0n]} = A_{[0n]} \frac{\chi'_{0n}}{a} J'_0 \left(\frac{\chi'_{0n} \rho}{a} \right) \mathbf{a}_\phi = e_{\phi,[0n]} \mathbf{a}_\phi \quad (3.29)$$

$$\mathbf{h}_{[0n]} = -e_{\phi,[0n]} \mathbf{a}_\rho \quad (3.30)$$

3.4 円形導波管の TE モードの例

3.4.1 TE₁₁ モード

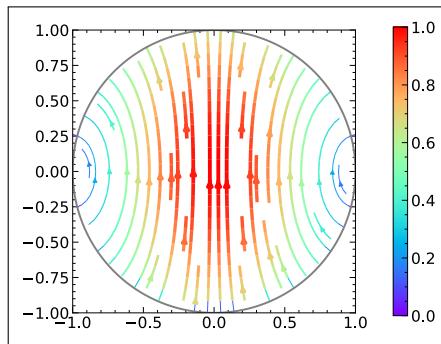


図 3.1. 電界モード関数 $e_{[11]}$ の電気力線

3.4.2 TE₂₁ モード

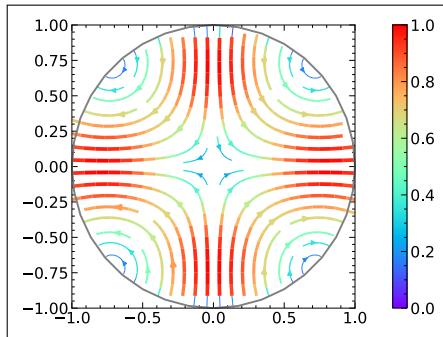


図 3.2. 電界モード関数 $e_{[21]}$ の電気力線

3.4.3 TE₀₁ モード

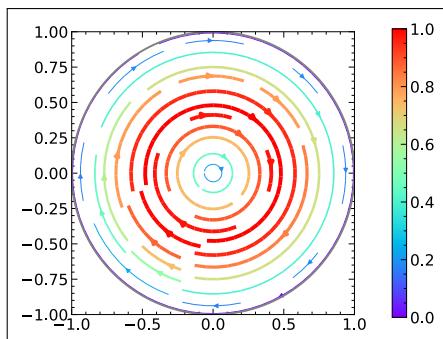


図 3.3. 電界モード関数 $e_{[01]}$ の電気力線

3.4.4 TE₁₂ モード

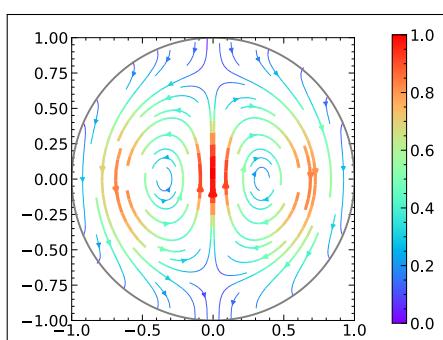


図 3.4. 電界モード関数 $e_{[12]}$ の電気力線

3.5 円形導波管の TM モードの正規化

TM モードの管壁 C での境界条件より,

$$\Psi^{\text{TM}} \Big|_{\rho=a} = 0 \quad (3.31)$$

よって,

$$J_m(k_c a) = 0, \quad k_c = \frac{\chi_{mn}}{a} \quad (3.32)$$

ただし, χ_{mn} は $J_m(\chi) = 0$ をみたす n 番目の零点を示す. よって,

$$\psi^{\text{TM}} = \Psi^{\text{TM}}(\rho, \phi) \mathcal{Z}^{\text{TM}}(z) \quad (3.33)$$

ここで.

$$\Psi^{\text{TM}} = A_{(mn)} J_m \left(\frac{\chi_{mn} \rho}{a} \right) \sin m\phi \quad (3.34)$$

$$\mathcal{Z}^{\text{TM}} = e^{-jk_{z,(mn)}z} \quad (3.35)$$

また,

$$k^2 = \left(\frac{\chi_{mn}}{a} \right)^2 + k_{z,(mn)}^2 \equiv k_{c,(mn)}^2 + k_{z,(mn)}^2 \quad (3.36)$$

ただし,

$$k_{c,(mn)} = \frac{\chi_{mn}}{a}, \quad J_m(\chi_{mn}) = 0 \quad (3.37)$$

このとき, 伝搬定数 $\gamma_{(mn)}$ は,

$$\gamma_{(mn)} = j k_{z,(mn)} = \begin{cases} j \beta_{(mn)} = j \sqrt{k^2 - k_{c,(mn)}^2} & (k > k_{c,(mn)}) \\ \alpha_{(mn)} = \sqrt{k_{c,(mn)}^2 - k^2} & (k < k_{c,(mn)}) \end{cases} \quad (3.38)$$

また, 管内波長 $\lambda_{g,[mn]}$ (伝搬モード), 遮断波長 $\lambda_{c,[mn]}$ は,

$$\lambda_{g,(mn)} = \frac{2\pi}{\beta_{(mn)}} \quad (3.39)$$

$$\lambda_{c,(mn)} = \frac{2\pi}{k_{c,(mn)}} = \frac{2\pi}{\chi_{mn}} = \frac{2\pi a}{\chi_{mn}} \quad (3.40)$$

よって, モード関数 $\mathbf{e}_{(mn)}$ は,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(mn)} &= -\nabla_t \Psi^{\text{TM}} = -\left(\frac{\partial \Psi^{\text{TM}}}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi^{\text{TM}}}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \right) \\ &= A_{(mn)} \left[-\frac{\chi_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\chi_{mn} \rho}{a} \right) \sin m\phi \mathbf{a}_\rho \mp \frac{m}{\rho} J_m \left(\frac{\chi_{mn} \rho}{a} \right) \cos m\phi \mathbf{a}_\phi \right] \\ &\equiv e_{\rho,(mn)} \mathbf{a}_\rho + e_{\phi,(mn)} \mathbf{a}_\phi \end{aligned} \quad (3.41)$$

また, $\mathbf{h}_{(mn)}$ は,

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{(mn)} &= \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_{(mn)} = \mathbf{a}_z \times (e_{\rho,(mn)} \mathbf{a}_\rho + e_{\phi,(mn)} \mathbf{a}_\phi) = e_{\rho,(mn)} \mathbf{a}_\phi - e_{\phi,(mn)} \mathbf{a}_\rho \\
&= -e_{\phi,(mn)} \mathbf{a}_\rho + e_{\rho,(mn)} \mathbf{a}_\phi \equiv h_{\rho,(mn)} \mathbf{a}_\rho + h_{\phi,(mn)} \mathbf{a}_\phi \\
&= A_{(mn)} \left[\pm \frac{m}{\rho} J_m \left(\frac{\chi_{mn}\rho}{a} \right) \cos m\phi \mathbf{a}_\rho - \frac{\chi_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\chi_{mn}\rho}{a} \right) \sin m\phi \mathbf{a}_\phi \right] \quad (3.42)
\end{aligned}$$

モード関数の正規化条件に関する面積分は,

$$\begin{aligned}
\iint_S |\mathbf{e}_{(mn)}|^2 dS &= |A_{(mn)}|^2 k_{c,(mn)}^2 \iint_S (\Psi_{(mn)})^2 dS \\
&= |A_{(mn)}|^2 k_{c,(mn)}^2 \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[J_m \left(\frac{\chi_{mn}\rho}{a} \right) \cos m\phi \right]^2 \rho d\rho d\phi \\
&= |A_{(mn)}|^2 k_{c,(mn)}^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 m\phi}{\cos^2 m\phi} d\phi \int_0^a J_m^2 \left(\frac{\chi_{mn}\rho}{a} \right) \rho d\rho \quad (3.43)
\end{aligned}$$

ベッセル関数の積分公式より,

$$\int_0^a J_m^2 \left(\frac{\chi_{mn}\rho}{a} \right) \rho d\rho = \frac{1}{2} \left[a^2 J_m^2(\chi_{mn}) + \left(a^2 - \frac{m^2 a^2}{\chi_{mn}^2} \right) J_m^2(\chi_{mn}) \right] \quad (3.44)$$

TM モードの境界条件 ($J_m(\chi_{mn}) = 0$) を用いれば,

$$\int_0^a J_m^2 \left(\frac{\chi_{mn}\rho}{a} \right) \rho d\rho = \frac{a^2}{2} J_m'^2(\chi_{mn}) \quad (3.45)$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\iint_S |\mathbf{e}_{(mn)}|^2 dS &= |A_{(mn)}|^2 \left(\frac{\chi_{mn}}{a} \right)^2 \frac{2\pi}{\epsilon_m} \frac{a^2}{2} J_m'^2(\chi_{mn}) \\
&= |A_{(mn)}|^2 \frac{\pi}{\epsilon_m} \chi_{mn}^2 J_m'^2(\chi_{mn}) \equiv 1 \quad (3.46)
\end{aligned}$$

とおいて, TM_{mn} モードの正規化係数 $A_{(mn)} (> 0)$ を求めるとなれば (絶対値をとらない場合もある).

$$A_{(mn)} = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\pi}} \frac{1}{\chi_{mn} |J_m'(\chi_{mn})|} \quad (3.47)$$

ベッセル関数の公式

$$J'_m(z) = \frac{m}{z} J_m(z) - J_{m+1}(z) \quad (3.48)$$

および境界条件 $J_m(\chi_{mn}) = 0$ を用いると,

$$\begin{aligned}
J'_m(\chi_{mn}) &= \frac{m}{\chi_{mn}} J_m(\chi_{mn}) - J_{m+1}(\chi_{mn}) \\
&= -J_{m+1}(\chi_{mn}) \quad (3.49)
\end{aligned}$$

よって,

$$A_{(mn)} = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\pi}} \frac{1}{\chi_{mn} |J_{m+1}(\chi_{mn})|} \quad (3.50)$$

主偏波成分のベクトルの向きを TE モードに合わせるため上側と下側を入れ替えると (正弦モードと余弦モードを対応させる),

$$\mathbf{e}_{(mn)} = A_{(mn)} \left[-\frac{\chi_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\chi_{mn}\rho}{a} \right) \cos m\phi \mathbf{a}_\rho \pm \frac{m}{\rho} J_m \left(\frac{\chi_{mn}\rho}{a} \right) \sin m\phi \mathbf{a}_\phi \right] \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{(mn)} &= \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_{(mn)} = -e_{\phi,(mn)} \mathbf{a}_\rho + e_{\rho,(mn)} \mathbf{a}_\phi \\ &= A_{(mn)} \left[\mp \frac{m}{\rho} J_m \left(\frac{\chi_{mn}\rho}{a} \right) \cos m\phi \mathbf{a}_\rho - \frac{\chi_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\chi_{mn}\rho}{a} \right) \sin m\phi \mathbf{a}_\phi \right] \quad (3.52) \end{aligned}$$

$m = 0$ のとき, $\sin m\phi = 0$, $\cos m\phi = 1$ と考え, 下側符号はゼロ, 上側符号のみとなり, 次のようになる.

$$\mathbf{e}_{(0n)} = -A_{(0n)} \frac{\chi_{0n}}{a} J'_0 \left(\frac{\chi_{0n}\rho}{a} \right) \mathbf{a}_\rho = e_{\rho,(0n)} \mathbf{a}_\rho \quad (3.53)$$

$$\mathbf{h}_{(0n)} = e_{\rho,(0n)} \mathbf{a}_\phi \quad (3.54)$$

3.6 円形導波管の TM モードの例

3.6.1 TM₀₁ モード

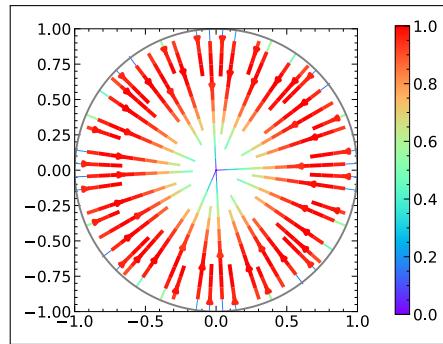


図 3.5. 電界モード関数 $e_{(01)}$ の電気力線

3.6.2 TM_{11} モード

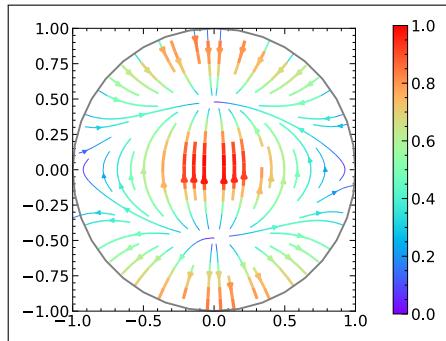


図 3.6. 電界モード関数 $e_{(11)}$ の電気力線

3.6.3 TM_{21} モード

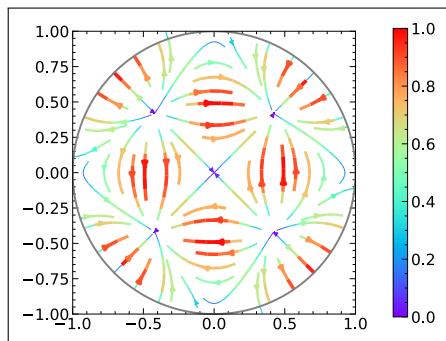


図 3.7. 電界モード関数 $e_{(21)}$ の電気力線

3.6.4 TM_{12} モード

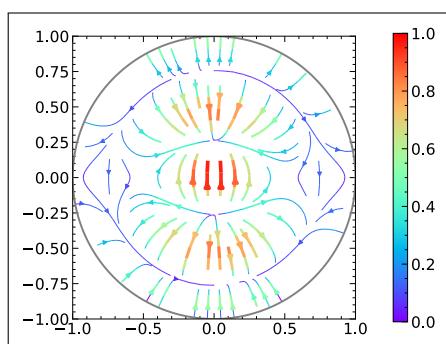


図 3.8. 電界モード関数 $e_{(12)}$ の電気力線

3.7 円形導波管モードの遮断波数

円形導波管（半径 a ）の TE_{mn} , TM_{mn} モードの遮断波長 λ_c を低次モードから順に示すと次のようになる [4].

表 3.1 円形導波管のモード別遮断定数と遮断波長（半径 a を単位とする）

No.	モード	χ'_{mn} または χ_{mn}	λ_c
1	TE_{11}	$\chi'_{11} = 1.841184$	$3.4126a$
2	TM_{01}	$\chi_{01} = 2.404826$	$2.6127a$
3	TE_{21}	$\chi'_{21} = 3.054237$	$2.0572a$
4,5	TM_{11}	$\chi_{11} = 3.831706$	$1.6398a$
4,5	TE_{01}	$\chi'_{01} = 3.831706$	$1.6398a$
6	TE_{31}	$\chi_{31} = 4.201189$	$1.4956a$
7	TM_{21}	$\chi_{21} = 5.135622$	$1.2235a$
8	TE_{41}	$\chi'_{41} = 5.317553$	$1.1816a$
9	TE_{12}	$\chi'_{12} = 5.331443$	$1.1785a$
10	TM_{02}	$\chi_{02} = 5.520078$	$1.1382a$
11	TM_{31}	$\chi_{31} = 6.380162$	$0.9848a$
12	TE_{51}	$\chi'_{51} = 6.415616$	$0.9794a$
13	TE_{22}	$\chi_{22} = 6.706133$	$0.9369a$
14,15	TM_{12}	$\chi_{12} = 7.015587$	$0.8956a$
14,15	TE_{02}	$\chi'_{02} = 7.015587$	$0.8956a$
16	TE_{61}	$\chi_{61} = 7.501266$	$0.8376a$
17	TM_{41}	$\chi_{41} = 7.588342$	$0.8280a$
18	TE_{32}	$\chi'_{32} = 8.015237$	$0.7839a$
19	TM_{22}	$\chi_{22} = 8.417244$	$0.7465a$
20	TE_{13}	$\chi'_{13} = 8.536316$	$0.7361a$
21	TE_{71}	$\chi_{71} = 8.577836$	$0.7325a$
22	TM_{03}	$\chi_{03} = 8.653728$	$0.7261a$
23	TM_{51}	$\chi_{51} = 8.771484$	$0.7163a$
24	TE_{42}	$\chi'_{42} = 9.282396$	$0.6769a$
25	TE_{81}	$\chi_{81} = 9.647422$	$0.6513a$
26	TM_{32}	$\chi_{32} = 9.761023$	$0.6437a$
27	TM_{61}	$\chi_{61} = 9.936110$	$0.6324a$
28	TE_{23}	$\chi'_{23} = 9.969468$	$0.6302a$
29,30	TM_{13}	$\chi_{13} = 10.173468$	$0.6176a$
29,30	TE_{03}	$\chi_{03} = 10.173468$	$0.6176a$

$m = 1$ のモードを $n \leq 5$ についてまとめると次のようになる。軸対称のテーパ導波管に基本 TE_{11} モードが入射した場合、このような高次モードが発生するが、 $m \neq 1$ のモードは発生しない。

表 3.2 $m = 1$ の TE/TM モードとベッセル関数の零点 (χ'_{mn} , χ_{mn})

No.	モード	χ'_{mn}	No.	モード	χ_{mn}
1	TE_{11}	$\chi'_{11} = 1.841184$	4,5	TM_{11}	$\chi_{11} = 3.831706$
9	TE_{12}	$\chi'_{12} = 5.331443$	14,15	TM_{12}	$\chi_{12} = 7.015587$
20	TE_{13}	$\chi'_{13} = 8.536316$	29,30	TM_{13}	$\chi_{13} = 10.173468$
37	TE_{14}	$\chi'_{14} = 11.706005$	48,49	TM_{14}	$\chi_{14} = 13.323692$
60	TE_{15}	$\chi'_{15} = 14.863589$	73,74	TM_{15}	$\chi_{15} = 16.470630$

CHAPTER 4

スミス図表

スミス図表とアドミタンス図表について詳しく説明する。これらの図表は、複素平面上で電圧反射係数を視覚的に表現するもので、伝送線路におけるインピーダンスやアドミタンスの計算が容易になる。特に、定抵抗円や定リアクタンス円、定コンダクタンス円、定サセプタンス円が図表上でどのように構成されるかを導出し、その使い方を複数の演習問題を通して解説していく。さらに、伝送線路上の入力インピーダンス、損失のある伝送線路、 $1/4$ 波長の伝送線路、電圧定在波比の概念をスミス図表と関連付けて説明する。最後に、スミス図表とアドミタンス図表を統合したイミタンス図表を示し、直列・並列素子が混在する回路解析におけるその有用性を明らかにしている。

4.1 スミス図表とは

4.1.1 複素平面上の電圧反射係数

複素平面上に、電圧反射係数 $\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta}$ (極形式) の $|\Gamma|$ 一定の円 (等反射係数円), θ 一定の直線 (等位相角線) を描くと、次の図のようになる。

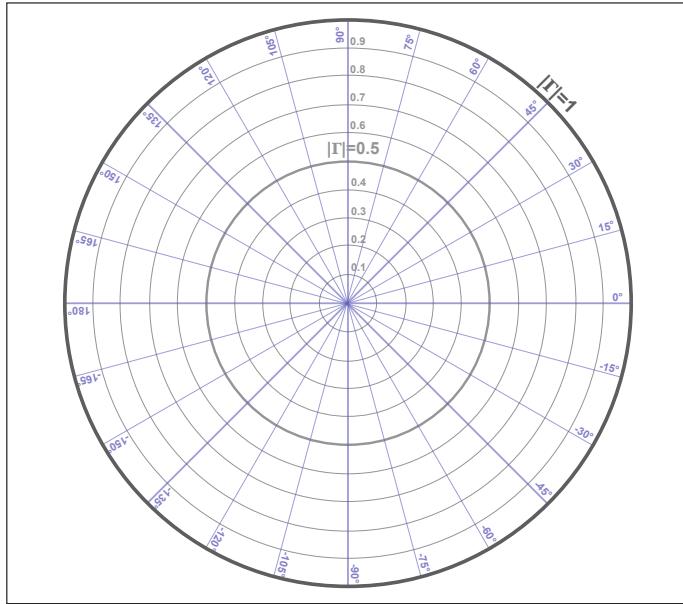


図 4.1. 等反射係数円と等位相角線

- 中心の点 : $\Gamma = 0$ ゆえ, 無反射
- 単位円上 : $|\Gamma| = 1$ ゆえ, 完全反射
- $\Gamma = 1$ の点 : 開放 (オーブン)
- $\Gamma = -1$ の点 : 短絡 (ショート)

負荷から距離 l 離れた点での反射係数 $\Gamma(l)$ は, 負荷点での反射係数 Γ_L を用いて,

$$\Gamma(l) = \Gamma_L e^{-j2\beta l} = |\Gamma_L| e^{j(\theta - 2\beta l)} \quad (4.1)$$

ここで, $\Gamma(l)$ の偏角は, $\theta - 2\beta l$ である. また $\Gamma(l)$ は, Γ_L の点から時計回りに $2\beta l$ [rad] 回転した点になる. 伝送線路の管内波長を λ_g とすると,

$$2\beta l = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_g} \cdot l = 4\pi \frac{l}{\lambda_g} \quad (4.2)$$

4.1.2 定在波の最大・最小について

負荷点から距離 l 離れた点での電圧定在波 $V(l)$ は,

$$V(l) = V^+ (1 + \Gamma(l)) = V^+ (1 + |\Gamma_L| e^{j(\theta - 2\beta l)}) \quad (4.3)$$

電圧の最大は, $e^{j(\theta - 2\beta l)} = 1$ のときで, このときの電圧反射係数および最大値 $|V|_{max}$ は,

$$\Gamma \Big|_{V_{max}} = |\Gamma_L| e^{j(\theta - 2\beta l)} \Big|_{V_{max}} = |\Gamma_L| \quad (4.4)$$

$$|V|_{max} = |V^+| (1 + |\Gamma_L|) \quad (4.5)$$

電圧が最大となる位置での電圧反射係数は正の実数ゆえ、複素平面の正の実軸上にあることがわかる。逆に、電圧の最小は、 $e^{j(\theta-2\beta l)} = -1$ のときで、このときの電圧反射係数および最小値 $|V|_{min}$ は、

$$\Gamma \Big|_{V_{min}} = |\Gamma_L| e^{j(\theta-2\beta l)} \Big|_{V_{min}} = -|\Gamma_L| \quad (4.6)$$

$$|V|_{min} = |V^+| (1 - |\Gamma_L|) \quad (4.7)$$

電圧が最小となる位置での電圧反射係数は負の実数ゆえ、複素平面の負の実軸上にあることがわかる。

4.1.3 規格化入力インピーダンス、規格化入力アドミタンスの図表

スミス図表 (Smith chart) [5] は、電圧反射係数 $\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta}$ (大きさ、位相) を表す複素平面上に、規格化入力インピーダンス z_{in} の

- 実部：規格化抵抗 (resistance)
- 虚部：規格化リアクタンス (reactance)

の目盛を書き込んだものである。同様にして、**アドミタンス図表** (admittance chart) は、電圧反射係数を表す複素平面であるが、目盛は次の規格化入力アドミタンス y_{in} からなる。

- 実部：規格化コンダクタンス (conductance)
- 虚部：規格化サセプタンス (susceptance)

4.1.4 定抵抗円と定リアクタンス円

伝送線路終端に負荷 Z_L が接続された場合、規格化負荷インピーダンス z_L は、負荷点での電圧反射係数 Γ_L を用いて、

$$\frac{Z_L}{Z_0} = z_L = \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} \quad (4.8)$$

同様にして、特性インピーダンス Z_0 の伝送線路上のある点における規格化入力インピーダンス $z_{in}(l)$ は、その点での電圧反射係数 $\Gamma(l)$ を用いて、

$$\frac{Z_{in}(l)}{Z_0} = z_{in}(l) = \frac{1 + \Gamma(l)}{1 - \Gamma(l)} \quad (4.9)$$

実部、虚部を

$$z_{in} \equiv r + jx \quad (4.10)$$

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta} \equiv u + jv \quad (4.11)$$

とおき (r は規格化抵抗, x は規格化リアクタンス), 式 (4.9) に代入すると,

$$r + jx = \frac{1 + (u + jv)}{1 - (u + jv)} = -1 + \frac{2}{1 - (u + jv)} \quad (4.12)$$

上式を実部, 虚部で整理して,

$$(r + 1) + jx = \frac{2}{(1 - u) - jv} = \frac{2\{(1 - u) + jv\}}{(1 - u)^2 + v^2} \quad (4.13)$$

式 (4.13) の実部を u , v について整理すると,

$$r + 1 = \frac{2(1 - u)}{(1 - u)^2 + v^2} \quad (4.14)$$

$$\left(u - \frac{r}{r+1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{r+1}\right)^2 \quad (4.15)$$

これは, 中心が $u = \frac{r}{r+1}$, $v = 0$, 半径が $\frac{1}{r+1}$ の円を表している.

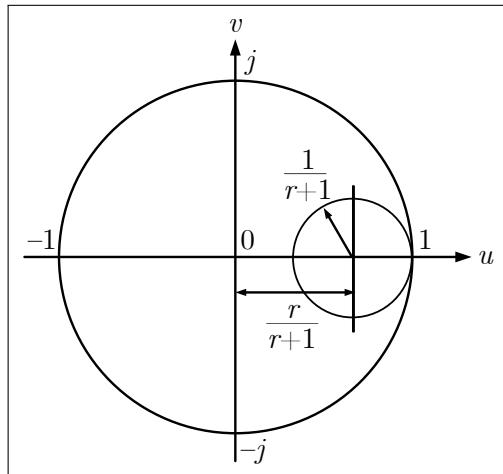


図 4.2. 定抵抗円

また, 式 (4.13) の虚部を同様にして整理すると,

$$x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2} \quad (4.16)$$

$$\left(1 - u\right)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad (4.17)$$

これは, 中心が $u = 1$, $v = \frac{1}{x}$, 半径が $\frac{1}{|x|}$ の円を表している.

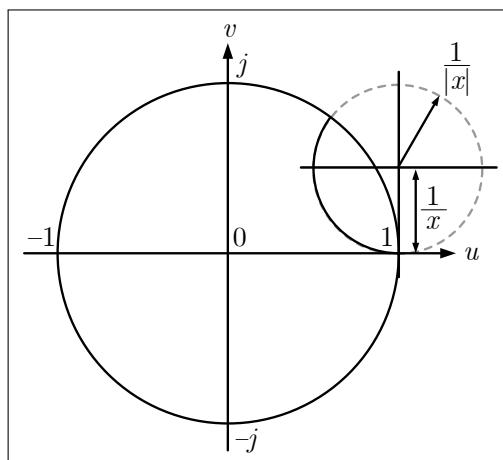


図 4.3. 定リアクタンス円

4.1.5 スミス図表

これより, $u - v$ 面面上に, 次の 2 つの円群を描くと次の図のようになる.

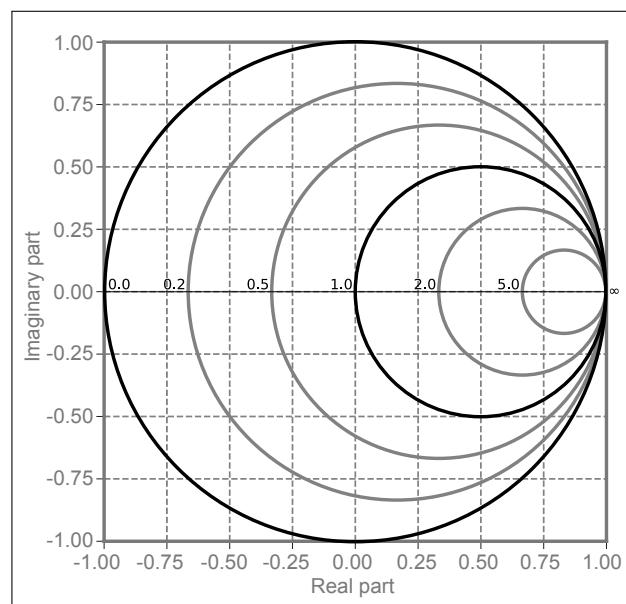


図 4.4. 定抵抗円: r 一定の円群

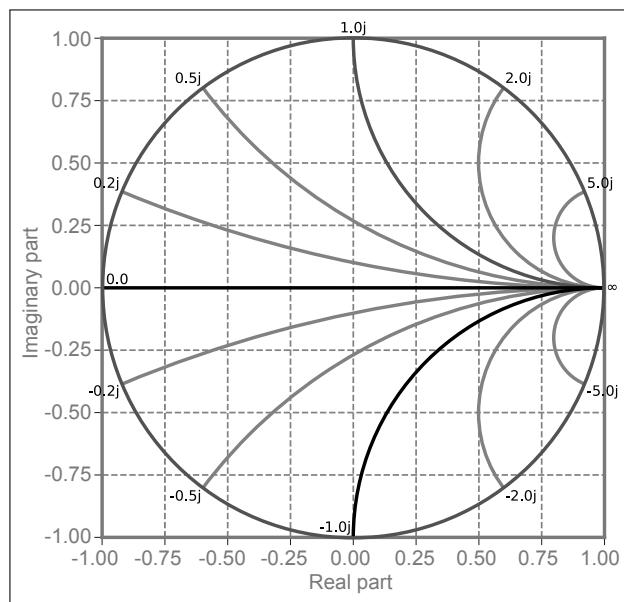


図 4.5. 定リアクタンス円: x 一定の円群

両者を重ね合わせがスミス図表の基本となる。

4.2 スミス図表の使い方

問題

次の規格化負荷 z_1 をスミス図表にプロットせよ。

- $z_1 = 0.2 + j0.5$
- $z_1 = 0.5 - j0.5$
- $z_1 = 1 - j2$
- $z_1 = 2 + j1$

解答

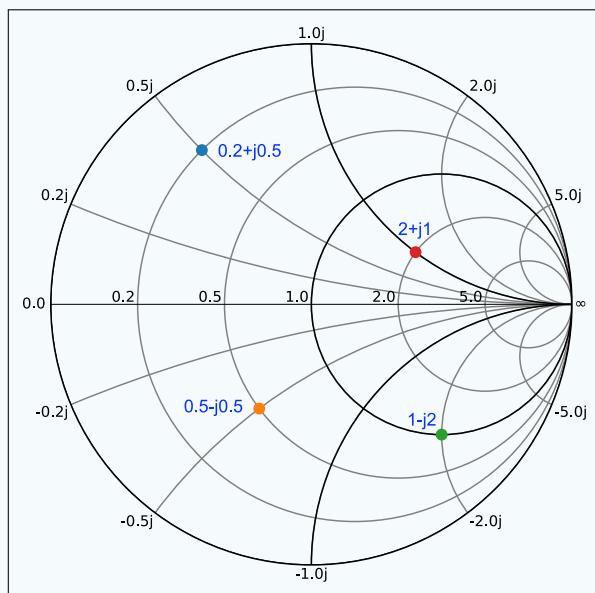


図 4.6. 規格化負荷 z_1

問題

次の規格化入力インピーダンス $z_{in} = z_L + \frac{1}{j\omega C}$ をスミス図表にプロットせよ。ただし, $0 \leq \omega \leq \infty$.

- $z_L = 0.2$
- $z_L = 0.5$
- $z_L = 1$
- $z_L = 2$

解答

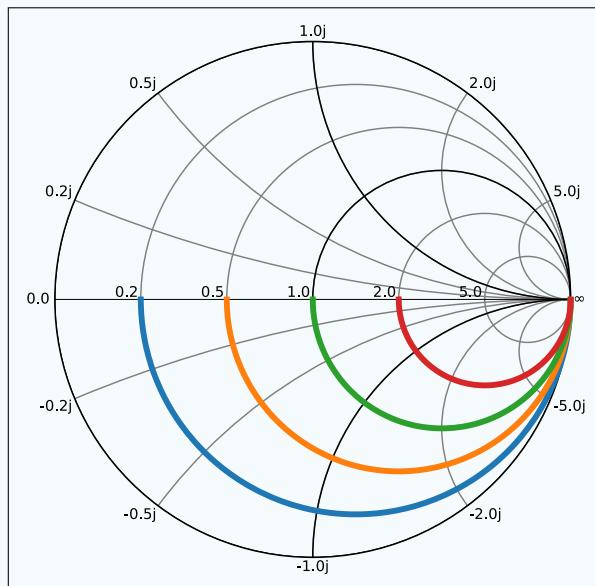


図 4.7. 規格化入力インピーダンス z_{in}

問題

次の規格化入力インピーダンス $z_{in} = z_L + \frac{1}{j\omega C}$ をスミス図表にプロットせよ。ただし, $0 \leq \omega \leq \infty$.

- $z_1 = 0.2 + j0.5$
- $z_1 = 0.5 - j0.5$
- $z_1 = 1 - j2$
- $z_1 = 2 + j1$

解答

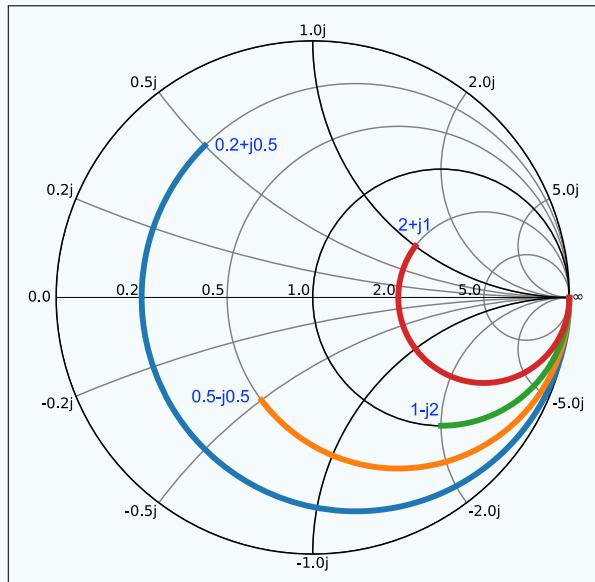


図 4.8. 規格化入力インピーダンス z_{in}

4.2.1 伝送線路上の入力インピーダンス

負荷点から $l = 0.2\lambda_g$ 離れた無損失線路上の点での反射係数は,

$$\Gamma(l) = \Gamma_L e^{-j2\beta l} \quad (4.18)$$

スミス図表において、規格化負荷インピーダンス z_L

$$z_L = r_1 + jx_1 = 0.5 + j0.5 \quad (4.19)$$

の点 P_1 を、等反射係数円上において位相角 [rad]

$$\theta = 2\beta l = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_g} \cdot 0.2\lambda_g = 0.8\pi \quad (4.20)$$

だけ時計回りに回転させた点 P_2 から入力インピーダンス $z_{in}(l)$ がわかる (スミス図表参照)。

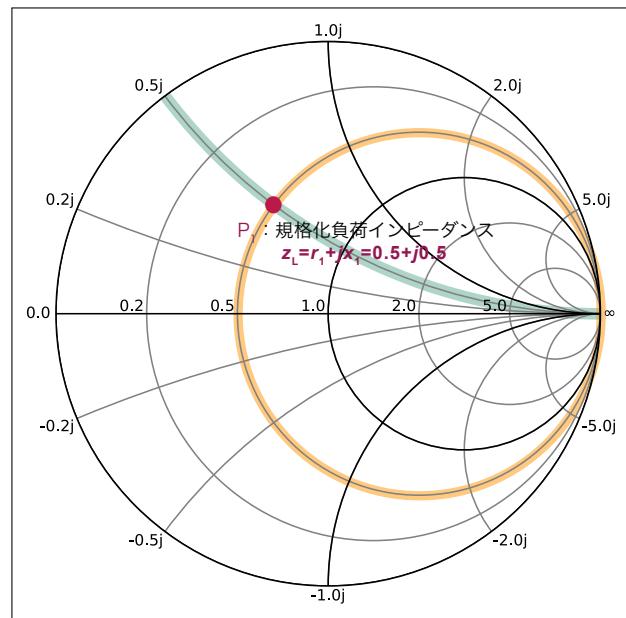


図 4.9. 負荷点 P_1 : $z_L = r_1 + jx_1 = 0.5 + j0.5$

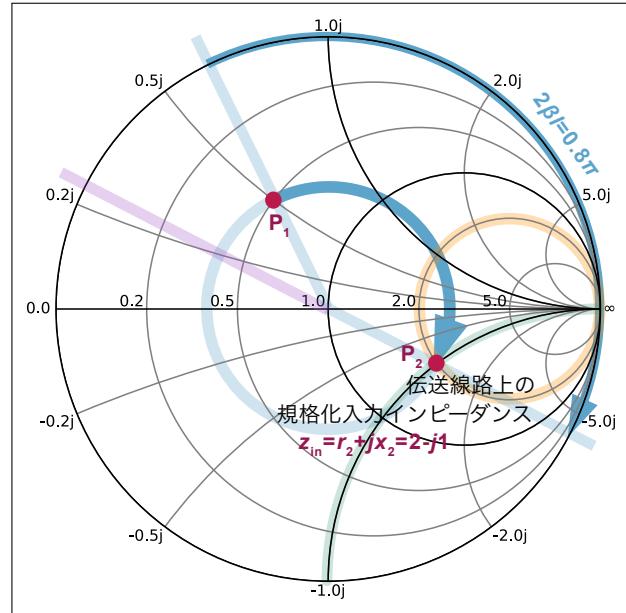


図 4.10. 負荷点から $l = 0.2\lambda_g$ 離れた点 P_2

数式を用いて求める場合、規格化負荷インピーダンス z_L が

$$z_L = r_1 + jx_1 = 0.5 + j0.5 \quad (4.21)$$

のとき、負荷点での電圧反射係数 Γ_L は、

$$\begin{aligned}\Gamma_L &= \frac{z_L - 1}{z_L + 1} = \frac{(0.5 + j0.5) - 1}{(0.5 + j0.5) + 1} \\ &= -0.2 + j0.4 = 0.447e^{j0.65\pi}\end{aligned}\quad (4.22)$$

負荷点から $l = 0.2\lambda_g$ 離れた無損失伝送線路上の点での電圧反射係数は、

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma_L e^{-j2\beta l} = \Gamma_L e^{-j2\frac{2\pi}{\lambda_g} \cdot 0.2\lambda_g} \\ &= (-0.2 + j0.4)e^{-j0.8\pi} \simeq 0.4 - j0.2\end{aligned}\quad (4.23)$$

よって、規格化入力インピーダンス z_{in} 、規格化入力アドミタンス y_{in} は、

$$z_{in} = \frac{1 + \Gamma_L e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma_L e^{-j2\beta l}} = \frac{1 + (0.4 - j0.2)}{1 - (0.4 - j0.2)} \simeq 2 - j1 \quad (4.24)$$

$$y_{in} = \frac{1}{z_{in}} = \frac{1}{2 - j1} = 0.4 + j0.2 \quad (4.25)$$

4.2.2 損失のある伝送線路

負荷点から l 離れた点での電圧反射係数 $\Gamma(l)$ について、伝送線路に損失がある場合 ($\alpha \neq 0$) とない場合 ($\alpha = 0$) の比は $e^{-2\alpha l}$ 、両者の差は、

$$\begin{aligned}\Gamma(l) - \Gamma(l)|_{\alpha=0} &= \Gamma_L e^{-2(\alpha+j\beta)l} - \Gamma_L e^{-j2\beta l} \\ &= \Gamma_L e^{-j2\beta l} (1 - e^{-2\alpha l})\end{aligned}\quad (4.26)$$

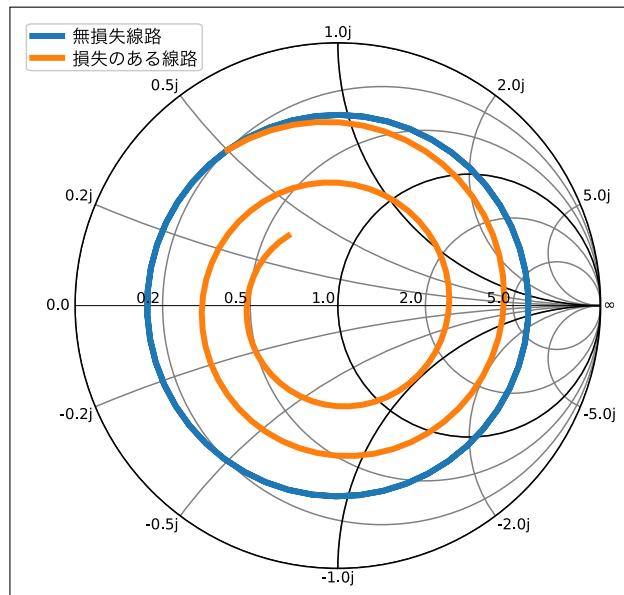


図 4.11. 無損失と損失のある場合の比較

4.3 1/4 波長の伝送線路

規格化負荷インピーダンス $z_L = r_1 + jx_1$ のとき、負荷点から $l = \lambda_g/4$ だけ離れた点は、

$$\theta = 2\beta l = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_g} \cdot \frac{\lambda_g}{4} = \pi \quad (4.27)$$

だけ時計回りに回転させた点をスミス図表にプロットすればよい。規格化入力インピーダンス z_{in} は、

$$z_{in}(\lambda_g/4) = \frac{1 + \Gamma_L e^{-j\pi}}{1 - \Gamma_L e^{-j\pi}} = \frac{1 + \Gamma_L(-1)}{1 - \Gamma_L(-1)} = \frac{1 - \Gamma_L}{1 + \Gamma_L} = \frac{1}{1 + \Gamma_L} = \frac{1}{z_L} = y_L \quad (4.28)$$

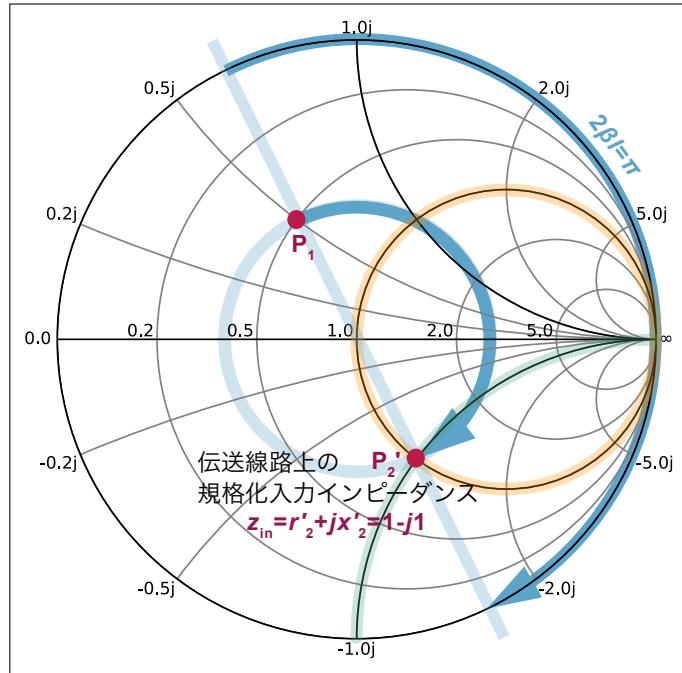


図 4.12. 負荷点から $l = \lambda_g/4$ 離れた点 P_2'

このように 1/4 波長の伝送線路を挿入すると、入力インピーダンスが、負荷点での値の逆数となる。よって、

$$z_{in} = \frac{1}{z_L} = \frac{1}{0.5 + j0.5} = \frac{2}{1 + j1} = 1 - j1 \quad (4.29)$$

これより、スミス図表上で π rad 回転させた点から規格化負荷アドミタンス y_L の値を読み取ることもできる。

4.4 入力インピーダンスと電圧定在波比

入力インピーダンスが純抵抗、つまり $z_{in} = r(jx = 0)$ で与えられるとき、電圧反射係数 Γ は、

$$\Gamma \Big|_{jx=0} = \frac{z_{in} - 1}{z_{in} + 1} = \frac{r - 1}{r + 1} = \begin{cases} -|\Gamma| & (r \leq 1) \\ |\Gamma| & (r \geq 1) \end{cases} \quad (4.30)$$

これより、規格化入力インピーダンス z_{in} は、

$$z_{in} = r = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{1 + (\pm|\Gamma|)}{1 - (\pm|\Gamma|)} = \begin{cases} \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \rho & (r \geq 1) \\ \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = \frac{1}{\rho} & (r \leq 1) \end{cases} \quad (4.31)$$

となり、電圧定在波比 ρ もわかる。

電圧定在波の最大の位置での電圧反射係数は $\Gamma = |\Gamma|$ ゆえ、その点での規格化入力インピーダンス z_{in} は、

$$z_{in} \Big|_{V_{max}} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \Big|_{V_{max}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \rho \quad (4.32)$$

ここで、 ρ は電圧定在波比を示し、

$$\rho = \frac{|V|_{max}}{|V|_{min}} \geq 1 \quad (4.33)$$

このとき、 $z_{in}(= r + jx)$ は実数となる（純抵抗）。したがって、 $r \geq 1$ 、 $x = 0$ 。これは、複素平面の正の実軸上である。

電圧定在波の最小の位置での電圧反射係数は $\Gamma = -|\Gamma|$ ゆえ、その点での規格化入力アドミタンス y_{in} は、

$$y_{in} \Big|_{V_{min}} = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} \Big|_{V_{min}} = \frac{1 - (-|\Gamma|)}{1 + (-|\Gamma|)} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \rho = \frac{1}{z_{in}} \Big|_{V_{min}} \geq 1 \quad (4.34)$$

このとき、 $y_{in}(= g + jb)$ は実数となる（純コンダクタンス）。したがって、 $g \geq 1$ 、 $b = 0$ 。あるいは、 $z_{in}(= r + jx)$ が実数となり（純抵抗）、 $r \leq 1$ 、 $x = 0$ 。これは、複素平面の負の実軸上であり、スミス図表では電圧定在波比 ρ の読み取りにも対応している。

スミス図表を用いる場合、

- 点 P_1 ：規格化負荷インピーダンス $z_L = 0.8 + j1.0$ をプロット。
- 点 P_2 ：点 P_1 をとおる等反射係数円と正の実軸との交点（電圧最大）。
- 図表より、電圧定在波比 $\rho = z_{in} = r = 3$ がわかる。

この手順を逆にすれば、電圧定在波 ρ 、負荷点から電圧定在波の最大の位置までの距離 l がわかれば、実軸上の点 P_2 を反時計回りに $2\beta l$ 回転させ、規格化負荷インピーダンス（点 P_1 ）を求めることができる。

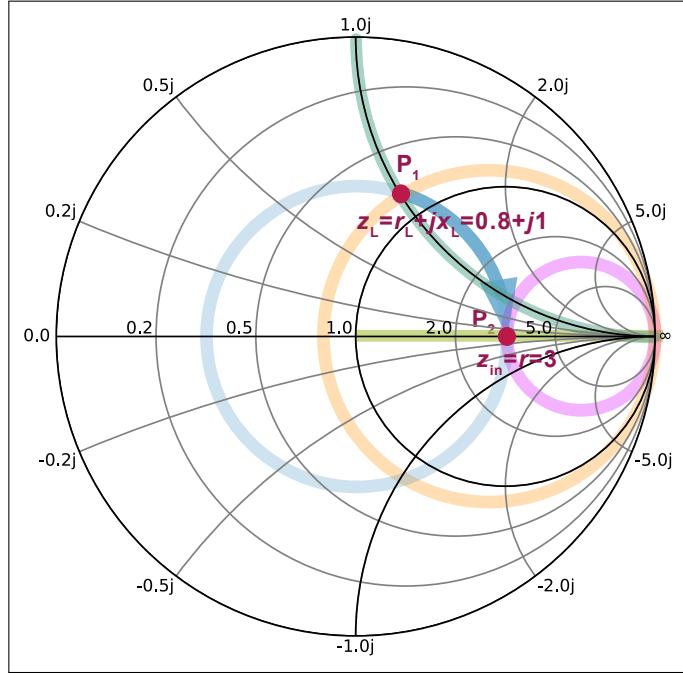


図 4.13. 電圧定在波比

4.5 アドミタンス図表

4.5.1 電圧反射係数と入力アドミタンス

伝送線路終端に負荷アドミタンス Y_L が接続された場合、規格化負荷アドミタンス y_L は、負荷点での電圧反射係数 Γ_L を用いて、

$$\frac{Y_L}{Y_0} = y_L = \frac{1 - \Gamma_L}{1 + \Gamma_L} \quad (4.35)$$

同様にして、特性アドミタンス Y_0 の伝送線路上のある点における規格化入力アドミタンス $y_{in}(l)$ は、その点での電圧反射係数 $\Gamma(l)$ を用いて、

$$\frac{Y_{in}(l)}{Y_0} = y_{in}(l) = \frac{1 - \Gamma(l)}{1 + \Gamma(l)} \quad (4.36)$$

同様にして $y_{in} \equiv g + jb$ において, u, v ($\Gamma = u + jv$) に関する式を求めるとき, 実部を u , v について整理して,

$$\left(u + \frac{g}{g+1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{g+1}\right)^2 \quad (4.37)$$

これは, 中心が $u = -\frac{g}{g+1}$, $v = 0$, 半径が $\frac{1}{g+1}$ の円を表している. また, 虚部も同様にして,

$$\left(1 + u\right)^2 + \left(v + \frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{b}\right)^2 \quad (4.38)$$

これは, 中心が $u = -1$, $v = -\frac{1}{b}$, 半径 $\frac{1}{|b|}$ の円を表している.

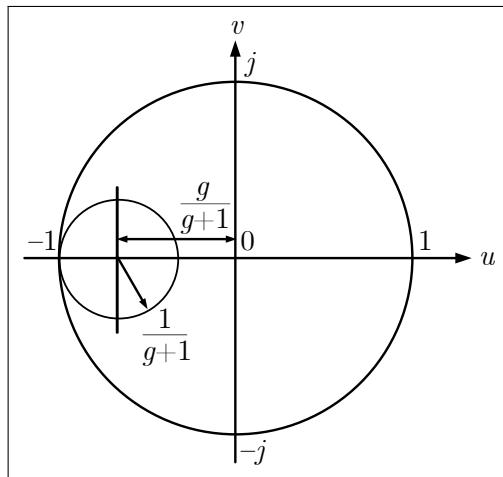


図 4.14. 定コンダクタンス円

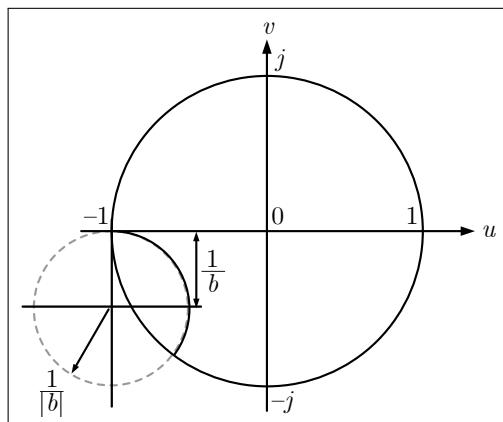


図 4.15. 定サセプタンス円

4.5.2 アドミタンス図表

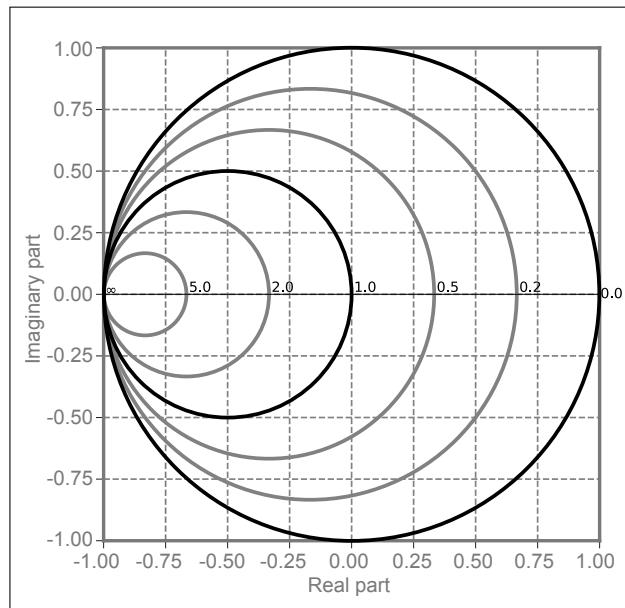


図 4.16. 規格化コンダクタンス g の円群

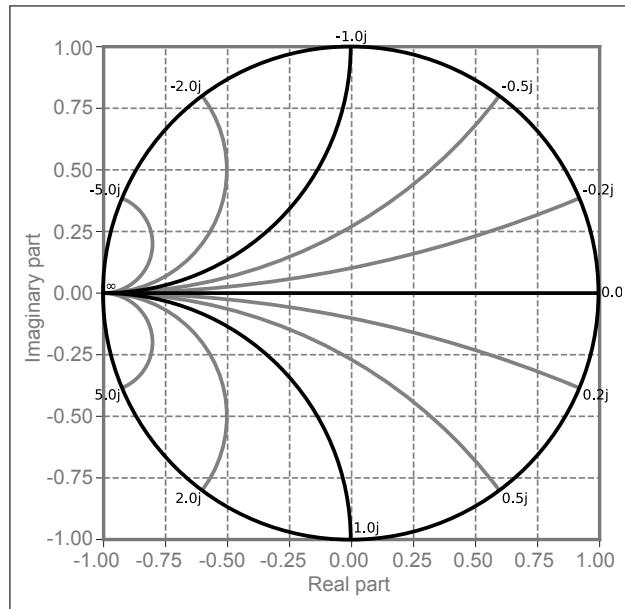


図 4.17. 規格化サセプタンス b の円群

問題

無損失伝送線路の終端に規格化負荷アドミタンス y_L

$$y_L = g + jb = 0.5 + j0 \quad (4.39)$$

が接続されている。この負荷点から (a) 距離 $l_1 = \lambda_g/5$ 離れた位置から負荷側を見た規格化入力アドミタンス $y_{in,1}$, (b) 距離 $l_2 = \lambda_g/4$ 離れた位置から負荷側を見た規格化入力アドミタンス $y_{in,2}$ を, 各々求めよ。ただし, λ_g はこの伝送線路の管内波長を示す。

解答

(a) 負荷点での電圧反射係数 Γ_L は,

$$\Gamma_L = \frac{1 - y_L}{1 + y_L} = \frac{1 - (0.5 + j0.5)}{1 + (0.5 + j0.5)} = 0.2 - j0.4 = 0.447e^{-j0.65\pi} \quad (4.40)$$

負荷点から $l_1 = \lambda_g/5$ 離れた点での Γ_1 , $y_{in,1}$ は,

$$\Gamma_1 = \Gamma_L e^{-j2\frac{2\pi}{\lambda_g} \cdot \frac{\lambda_g}{5}} = (0.2 - j0.4)e^{-j0.8\pi} \simeq -0.4 + j0.2 \quad (4.41)$$

よって, 規格化入力アドミタンス $y_{in,1}$ は,

$$y_{in,1} = \frac{1 - \Gamma_L e^{-j2\beta l}}{1 + \Gamma_L e^{-j2\beta l}} = \frac{1 - (-0.4 + j0.2)}{1 + (-0.4 + j0.2)} \simeq 2 - j1 \quad (4.42)$$

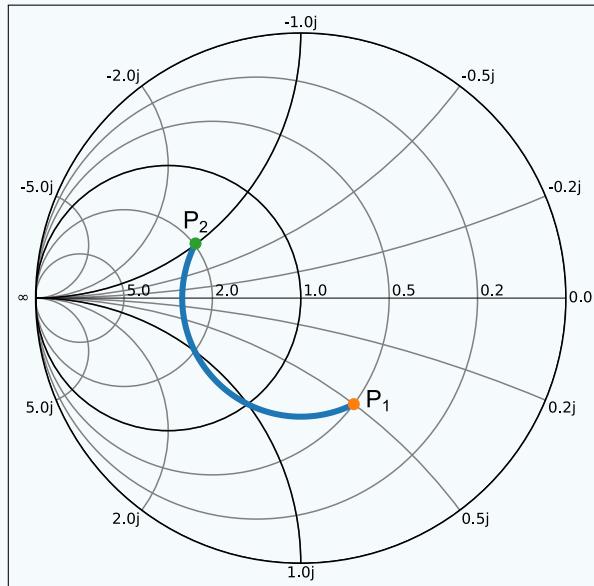


図 4.18. 点 P_2 : $y_{in,1} = 2 - j1$

解答

(b) 負荷点から $l_2 = \lambda_g/4$ 離れた点での $y_{in,2}$ は,

$$y_{in,2} = \frac{1}{y_L} = \frac{1}{0.5 + j0.5} = \frac{2}{1 + j1} = 1 - j1 \quad (4.43)$$

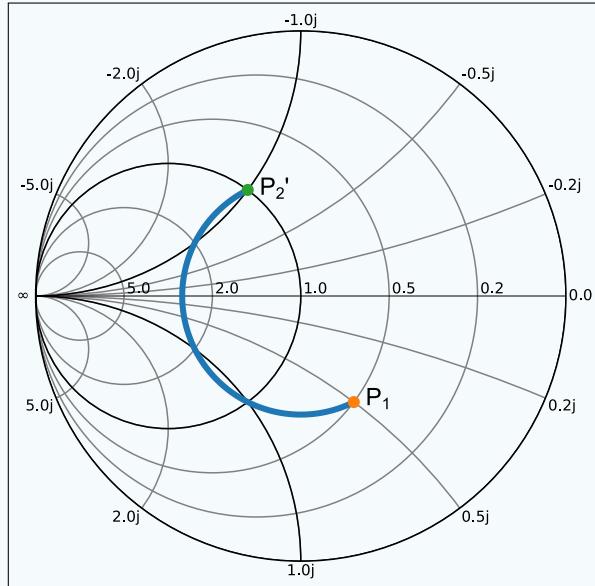


図 4.19. 点 P_2' : $y_{in,2} = 1 - j1$

4.6 イミタンス図表

スミス（インピーダンス）図表とアドミタンス図表を並べると次のようになる。直列素子や並列素子が混在する回路では、直列素子にはスミス図表の定抵抗円と定リアクタンス円、並列素子にはアドミタンス図表の定コンダクタンス円と定サセプタンス円の目盛りが必要となる。

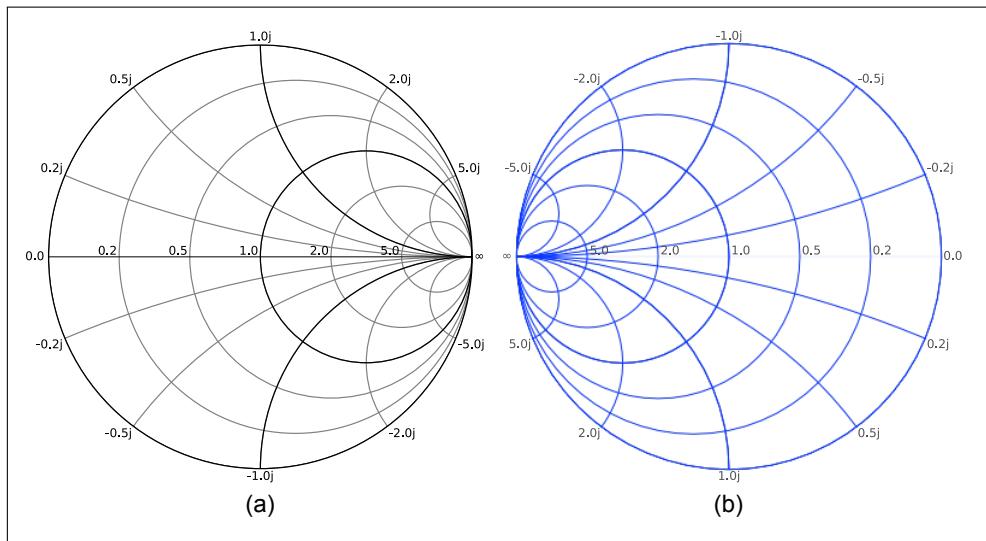


図 4.20. (a) スミス図表, (b) アドミタンス図表

上の 2 つの図表を重ね合わせると次のようになる。このようにスミス図表とアドミタンス図表を重ね合わせたものを**イミタンス図表**という。

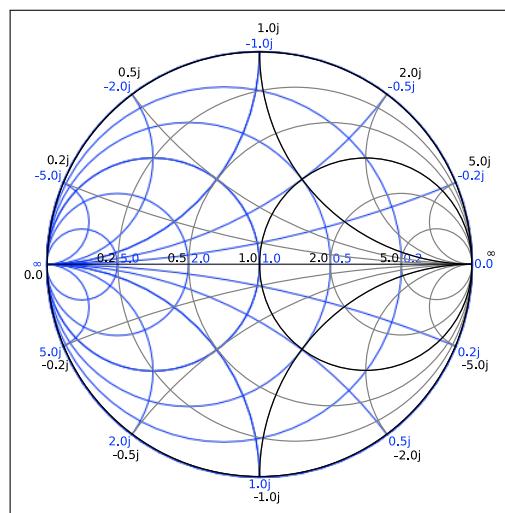


図 4.21. スミス図表とアドミタンス図表の重ね合わせ

CHAPTER 5

伝送特性の測定評価

高周波回路の伝送特性測定における誤差とその補正方法を説明する。まず、測定誤差としてシステムティック誤差、ランダム誤差、ドリフト誤差について解説し、特にシステムティック誤差は校正によって除去可能である。次に、振幅のみを補正するスカラー誤差補正と、振幅・位相を測定して高精度に S パラメータを求めるベクトル誤差補正（ディエンベッディング）を説明している。ベクトル誤差補正には、 SOL 校正、 TM 校正、 $SOLT$ 校正、 TRL 校正など、様々な校正方法が開発されており、特に TRL 校正については詳細な導出と、未知の反射器や伝送線路でも適用できる利点を明らかにしている。そして、これらの校正によって誤差回路の S パラメータを決定し、被測定素子（ DUT ）の正確な S パラメータを求める方法を示している。

5.1 伝送特性の計測誤差

5.1.1 測定誤差の要因

伝送特性を測定するとき、次のような誤差がある。

- ・ システムティック誤差：測定系の理想値からのはずれ（不完全性）の誤差のことで、校正によって除去できる。
- ・ ランダム誤差：雑音、ケーブルのまがりの変化、コネクタの取り付け等の再現性のない誤差はランダムに生じるため、校正によって除去できない。
- ・ ドリフト誤差：温度変動等によるシステム状態の変化による誤差のことで、再校正すれば除去できる。

5.1.2 スカラー誤差補正

振幅測定による周波数レスポンス誤差の補正をスカラー誤差補正と呼び、次のような方法がある。

- 伝送測定：スルー（入出力ポートを直接接続）の測定値で正規化
- 反射測定：ショート（あるいはオープン）を取り付けた測定値で正規化

5.1.3 ベクトル誤差補正

振幅・位相を測定して演算処理することによって、システムティック誤差を除去でき、被測定素子（DUT: device under test）のSパラメータを高精度に求めることができる。これを**ディエンベッディング**（de-embedding）という。このような誤差は標準器を用いて計測評価され、校正、あるいは**キャリブレーション**（calibration）と呼ばれ、次のような方法がある。

- 反射測定：1ポート校正
- 反射・伝送測定：フル2ポート校正
- その他：TRL校正など

5.1.4 1ポート校正

- SOL校正：短絡器（Short）、開放器（Open）、負荷（Load）
- 左右対称TM校正：スルー（Through）、整合（Match）

5.1.5 2ポート校正

- SOLT校正：短絡器（Short）、開放器（Open）、負荷（Load）、スルー（Through）
- TRL校正：スルー（Through）、反射器（Reflect）、伝送線路（Line）
- TLS校正：スルー（Through）、伝送線路（Line）、短絡器（Short）

5.1.6 ネットワークアナライザの基本構成

高周波回路素子のSパラメータ等の周波数応答の測定によく用いられている計測装置がネットワークアナライザであり、主な構成は次のとおりである。

- スイーパ：周波数掃引信号源
- Sパラメータ・テストセット：反射・透過を分離するスイッチ、電力分配器、方向性

結合器等

- ・ レシーバ：信号の検波
- ・ 計算処理部：校正など

このように一つの装置としてまとめられているのでベクトル誤差補正が行い易い。

5.1.7 誤差回路

測定ポート 1, 2 内部に誤差回路 (error box, error adapter) を考える。散乱行列は、

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = [S_a] \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = [S_b] \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

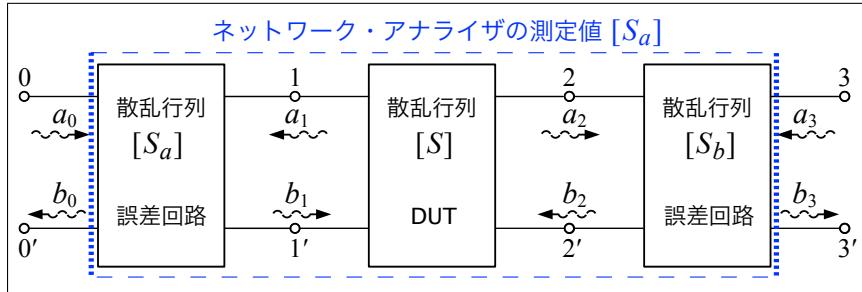


図 5.1. 誤差回路と DUT の継続接続

散乱行列要素を、

$$[S_a] = \begin{pmatrix} e_{00} & e_{01} \\ e_{10} & e_{11} \end{pmatrix}, \quad [S_b] = \begin{pmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

とおき、各々、R マトリクスに変換すると、

$$[R_a] = \frac{1}{e_{10}} \begin{pmatrix} -e_{00}e_{11} + e_{01}e_{10} & e_{00} \\ -e_{11} & 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{e_{10}} [R'_a] \quad (5.3)$$

$$[R_b] = \frac{1}{e_{32}} \begin{pmatrix} -e_{22}e_{33} + e_{23}e_{32} & e_{22} \\ -e_{33} & 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{e_{32}} [R'_b] \quad (5.4)$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = [R_a] \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = [R_b] \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

ネットワークアナライザの測定値の散乱行列 $[S_m]$ を、

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_3 \end{pmatrix} = [S_m] \begin{pmatrix} a_0 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad [S_m] = \begin{pmatrix} S_{11}^{(m)} & S_{12}^{(m)} \\ S_{21}^{(m)} & S_{22}^{(m)} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

とすると, R マトリクス

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = [R_m] \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad [R_m] = \begin{pmatrix} R_{11}^{(m)} & R_{12}^{(m)} \\ R_{21}^{(m)} & R_{22}^{(m)} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

は次のようになる.

$$[R_m] = \frac{1}{S_{21}^{(m)}} \begin{pmatrix} -S_{11}^{(m)} S_{22}^{(m)} + S_{12}^{(m)} S_{21}^{(m)} & S_{11}^{(m)} \\ -S_{22}^{(m)} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

5.1.8 ディエンベッディング

この測定値の R マトリクス $[R_m]$ は, 誤差回路 $[R_a]$, $[R_b]$, 被測定素子の $[R]$ を用いて次のように計算できる.

$$[R_m] = [R_a][R][R_b] = \frac{1}{e_{10}}[R'_a][R]\frac{1}{e_{32}}[R'_b] \quad (5.9)$$

これより, 被測定素子の R マトリクス $[R]$ は,

$$[R] = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = [R_a]^{-1}[R_m][R_b]^{-1} = e_{10}e_{32}[R'_a]^{-1}[R_m][R'_b]^{-1} \quad (5.10)$$

したがって, 被測定素子の散乱行列 $[S]$ が次のようにして得られる.

$$[S] = \frac{1}{R_{22}} \begin{pmatrix} R_{12} & R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21} \\ 1 & R_{21} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

5.2 シグナルフローグラフの応用

5.2.1 誤差回路と DUT

次の図は誤差モデルを考慮したシグナルフローグラフを示したもので, 測定ポートをノード a_0, b_0 と a_3, b_3 とし, DUT の入出力部に 2 つの誤差回路を加えている.

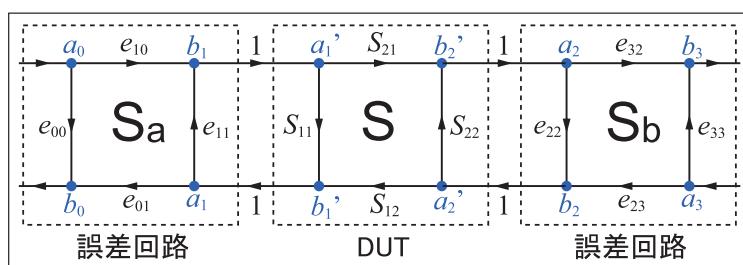


図 5.2. 誤差回路と DUT からなるシグナルフローグラフ

5.2.2 順方向伝送・反射

ポート 0 からの入射波を考えた場合を順方向という。順方向伝送・反射においては、ポート 3 からの入射波は考えないので ($a_3 = 0$)、上のシグナルフローグラフにおいて伝送波のないブランチを削除すると次のようになる。

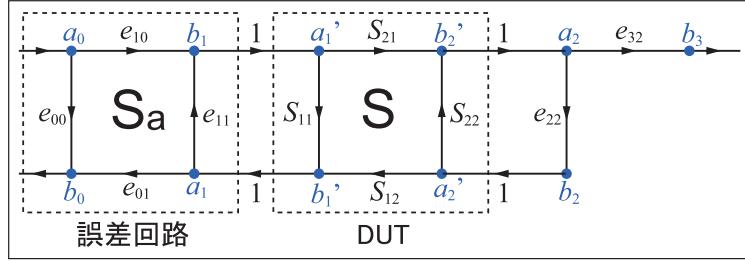


図 5.3. 順方向伝送・反射のシグナルフローグラフ

次に、入出力のノード以外について、 $1/e_{10}$ を乗じて新たなノードを定義する。まず、上側のブランチについて、

$$b_1 = e_{10}a_0 \quad \therefore \frac{b_1}{e_{10}} \equiv \bar{b}_1 = 1 \cdot a_0 \quad (5.12)$$

$$a'_1 = 1 \cdot b_1 \quad \therefore \frac{a'_1}{e_{10}} \equiv \bar{a}'_1 = \frac{b_1}{e_{10}} = 1 \cdot \bar{b}_1 \quad (5.13)$$

$$b'_2 = S_{21}a'_1 \quad \therefore \frac{b'_2}{e_{10}} \equiv \bar{b}'_2 = S_{21} \frac{a'_1}{e_{10}} = S_{21}\bar{a}'_1 \quad (5.14)$$

$$a_2 = 1 \cdot b'_2 \quad \therefore \frac{a_2}{e_{10}} \equiv \bar{a}_2 = \frac{b'_2}{e_{10}} = 1 \cdot \bar{b}'_2 \quad (5.15)$$

$$b_3 = e_{32}a_2 = e_{32}e_{10} \cdot \bar{a}_2 \quad (5.16)$$

ポート 2 における上から下へのブランチについては、

$$b_2 = e_{22}a_2 \quad \therefore \frac{b_2}{e_{10}} \equiv \bar{b}_2 = e_{22} \frac{a_2}{e_{10}} = e_{22} \cdot \bar{a}_2 \quad (5.17)$$

同様にして、下側のブランチについて、

$$a'_2 = 1 \cdot b_2 \quad \therefore \frac{a'_2}{e_{10}} \equiv \bar{a}'_2 = \frac{b_2}{e_{10}} = 1 \cdot \bar{b}_2 \quad (5.18)$$

$$b'_1 = S_{12}a'_2 \quad \therefore \frac{b'_1}{e_{10}} \equiv \bar{b}'_1 = S_{12} \frac{a'_2}{e_{10}} = S_{12}\bar{a}'_2 \quad (5.19)$$

$$a_1 = 1 \cdot b'_1 \quad \therefore \frac{a_1}{e_{10}} \equiv \bar{a}_1 = \frac{b'_1}{e_{10}} = 1 \cdot \bar{b}'_1 \quad (5.20)$$

$$b_0 = e_{01}a_1 = e_{01}e_{10} \cdot \bar{a}_1 \quad (5.21)$$

その他、上下のブランチの値は変わらない。これより、順方向シグナルフローグラフが次のように変形される。

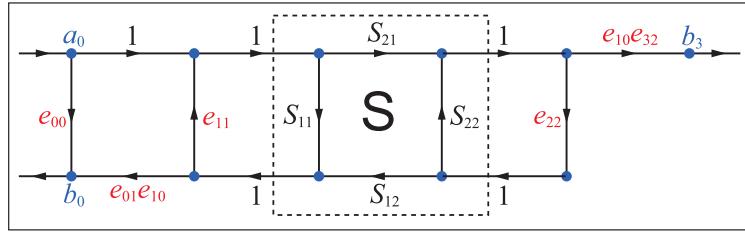


図 5.4. ノードの定義を変更した順方向シグナルフローグラフ

5.2.3 逆方向伝送・反射

逆方向伝送・反射においては、ポート 0 からの入射波は考えないので ($a_0 = 0$)、順方向シグナルフローグラフと同様にして、

- 伝送波のない不要ブランチを削除した逆方向シグナルフローグラフを考える。
- 入出力のノード以外について、 $1/e_{23}$ を乗じたノードを定義する。
- 新たに定義したノードからのブランチの値を求める。
- ノードの定義を変更した逆方向シグナルフローグラフを作成する。

これより、逆方向シグナルフローグラフもまた、次のようになる。

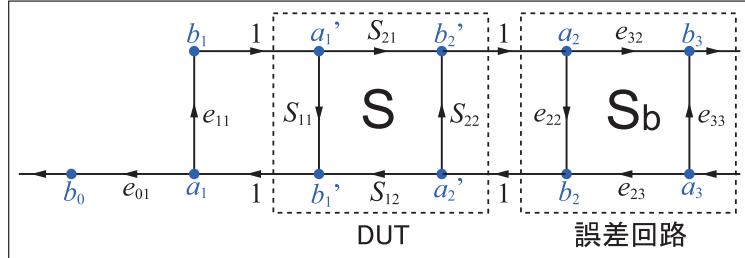


図 5.5. 逆方向伝送・反射のシグナルフローグラフ

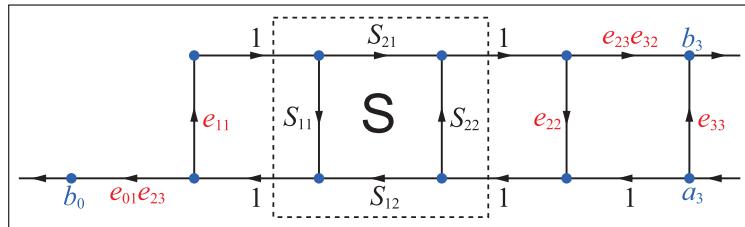


図 5.6. ノードの定義を変更した逆方向シグナルフローグラフ

5.3 1 ポート校正

5.3.1 SOL 校正

測定ポート 1 (a_1, b_1) に DUT (1 端子対回路) を接続して反射係数を高精度に測定するための SOL 校正について説明する。まず、ある負荷を接続したときの反射係数を Γ_L とする。

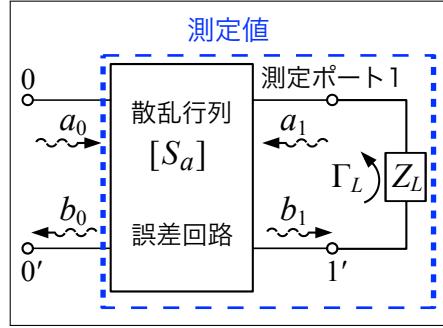


図 5.7. 反射器の接続

ポート 0 での反射係数 Γ_0 は、

$$\Gamma_0 = e_{00} + \frac{e_{10}e_{01}\Gamma_L}{1 - e_{11}\Gamma_L} \quad (5.22)$$

で表され、例えば、負荷として短絡器 ($\Gamma_L = -1$) を接続すると、

$$\Gamma_0^{(S)} = \Gamma_0 \Big|_{\text{short}} = e_{00} + \frac{e_{10}e_{01}(-1)}{1 - e_{11}(-1)} = e_{00} - \frac{e_{10}e_{01}}{1 + e_{11}} \quad (5.23)$$

また、負荷として開放器 ($\Gamma_L = 1$) を接続すると、

$$\Gamma_0^{(O)} = \Gamma_0 \Big|_{\text{open}} = e_{00} + \frac{e_{10}e_{01} \cdot 1}{1 - e_{11} \cdot 1} = e_{00} + \frac{e_{10}e_{01}}{1 - e_{11}} \quad (5.24)$$

負荷が整合負荷 ($\Gamma_L = 0$) のときは言うまでもなく、

$$\Gamma_0^{(L)} = \Gamma_0 \Big|_{\text{load}} = e_{00} + \frac{e_{10}e_{01} \cdot 0}{1 - e_{11} \cdot 0} = e_{00} \quad (5.25)$$

これより、 e_{00} , e_{11} , $e_{10}e_{01}$ は、次式によって求めることができる。

$$e_{00} = \Gamma_0^{(L)} \quad (5.26)$$

$$e_{11} = \frac{2\Gamma_0^{(L)} - \Gamma_0^{(S)} - \Gamma_0^{(O)}}{\Gamma_0^{(S)} - \Gamma_0^{(O)}} \quad (5.27)$$

$$e_{10}e_{01} = \frac{2(\Gamma_0^{(L)} - \Gamma_0^{(S)})(\Gamma_0^{(L)} - \Gamma_0^{(O)})}{\Gamma_0^{(S)} - \Gamma_0^{(O)}} \quad (5.28)$$

このように 1 つのポートの誤差補正を行うものを 1 ポート校正という。同様にして、測定ポート 2 (a_2, b_2) についても整合負荷、短絡器、開放器を接続して測定を行えば、 $e_{33}, e_{22}, e_{23}e_{32}$ が得られる。

5.3.2 左右対称 TM 校正

2 つの誤差回路の特性が鏡像の関係の場合、散乱行列 $[S_a]$, $[S_b]$ は、

$$[S_a] = \begin{pmatrix} e_{00} & e_{01} \\ e_{10} & e_{11} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

$$[S_b] = \begin{pmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{10} \\ e_{01} & e_{00} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

スルー (Through) と整合負荷 (Match) により行うのが TM (thru-match) 校正である。整合負荷 (Match) は SOL 校正の Load と同じで、測定値 $\Gamma_0^{(M)}$ より e_{00} は、

$$e_{00} = \Gamma_0^{(M)} \quad (5.31)$$

スルー (Through) での測定値 $S_{11}^{(T)}$, $S_{21}^{(T)}$ は、散乱行列の縦続接続より、

$$S_{21}^{(T)} = \frac{e_{01}e_{10}}{1 - e_{11}^2} \quad (5.32)$$

$$S_{11}^{(T)} = e_{00} + \frac{e_{01}e_{11}e_{10}}{1 - e_{11}^2} = e_{00} + e_{11}S_{21}^{(T)} \quad (5.33)$$

これより、 e_{11} は、

$$e_{11} = \frac{S_{11}^{(T)} - e_{00}}{S_{21}^{(T)}} = \frac{S_{11}^{(T)} - \Gamma_0^{(M)}}{S_{21}^{(T)}} \quad (5.34)$$

また、 $e_{01}e_{10}$ は、

$$e_{01}e_{10} = S_{21}^{(T)}(1 - e_{11}^2) = S_{21}^{(T)} - \frac{(S_{11}^{(T)} - \Gamma_0^{(M)})^2}{S_{21}^{(T)}} \quad (5.35)$$

5.4 2 ポート校正

5.4.1 SOLT 校正

測定ポート 1 と 2 を直接接続したときの透過係数 $S_{21}^{(T)}$, $S_{12}^{(T)}$ は、散乱行列 $[S_a]$ と $[S_b]$ の縦続接続より求められ、

$$S_{21}^{(T)} = \frac{e_{10}e_{32}}{1 - e_{11}e_{22}} \quad (5.36)$$

$$S_{12}^{(T)} = \frac{e_{01}e_{23}}{1 - e_{11}e_{22}} \quad (5.37)$$

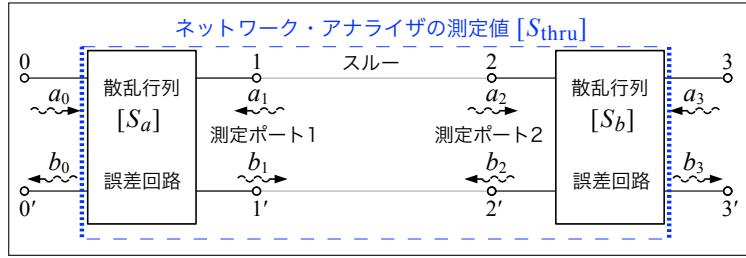


図 5.8. 測定ポートの直接接続（スルー）

これと SOL 校正を行えば, $e_{10}e_{32}$, $e_{01}e_{23}$ は次のようにして求めることができる.

$$e_{10}e_{32} = S_{21}^{(T)}(1 - e_{11}e_{22}) \quad (5.38)$$

$$e_{01}e_{23} = S_{12}^{(T)}(1 - e_{11}e_{22}) \quad (5.39)$$

このようにして得られた誤差回路パラメータ e_{00} , e_{11} , $e_{10}e_{01}$, e_{33} , e_{22} , $e_{23}e_{32}$, $e_{10}e_{32}$, $e_{01}e_{23}$ を用いれば, デイエンベッディングによって被測定素子の S パラメータを求めることができる. 後述する TRL 校正でも同様である (2 ポート校正). さらに, 測定系内部のポート 0-3 間のアイソレーションも含めた全誤差回路定数を評価するものをフル 2 ポート校正という.

5.4.2 TRL 校正

TRL (thru-reflect-line) 校正は次の 3 つの接続状態で測定を行い, 校正するものである^{*1} [6].

- スルー (Through) : ポート 1, 2 を直接接続 (あるいは短い伝送線路を介して接続) し, 測定する.
- 反射器 (Reflect) : ポート 1, 2 に反射の大きな (未知数) 終端負荷を接続し, 各々, 測定する. 通常, ショートに近いか, オープンに近いかがわかつていて, 反射係数の大きさが 1 に近いものが用いられる.
- 伝送線路 (Line) : ポート 1, 2 を短い伝送線路 (スルーで用いたものとは長さの異なる伝送線路) を介して接続し, 測定する.

反射器の反射係数や伝送線路の長さが正確にわかつてない場合でも適用できるのが TRL 校正の大きな特徴である.

^{*1} G. F. Engen and C. A. Hoer, "Thru-Reflect-Line: An improved technique for calibrating the dual six-port automatic network analyzer," *IEEE Trans. On Micr. Theory and Tech.*, vol.27, pp.987-993, Dec. 1979.

5.4.3 TLS 校正 (TSD 校正)

TRL 校正の反射器 (Reflect) のかわりに短絡器 (short) を用いた校正を, TLS (thru-line-short) 校正という. 伝送線路 (line) を delay と呼ぶときには, TSD (thru-short-delay) 校正という. 短絡器 (short) を用いるため, $\Gamma_L = -1$ とおいて求めれば, 次のようにして e_{11}, e_{22} を決定できる.

$$e_{11} = -\frac{S_{11}^{(R)} - x_2}{S_{11}^{(R)} - x_1} \quad (5.40)$$

$$e_{22} = -\frac{S_{22}^{(R)} + y_2}{S_{22}^{(R)} + y_1} \quad (5.41)$$

それ以外は, TRL 校正と同じである. </p>

5.5 TRL 校正の詳細

TRL 校正^{*2} [6] について詳しく導出して解説する.

5.5.1 スルー (Through)

まず, スルーのとき, ポート 0-3 間の R マトリクス (測定値) は,

$$[R_{\text{thru}}] = [R_a][R_b] \quad (5.42)$$

よって,

$$[R_b] = [R_a]^{-1}[R_{\text{thru}}] \quad (5.43)$$

5.5.2 伝送線路 (Line)

次に, 図のように伝送線路 (Line) を接続すると,

$$[R_{\text{line}}] = [R_a][R_l][R_b] = [R_a][R_l][R_a]^{-1}[R_{\text{thru}}] \quad (5.44)$$

^{*2} G. F. Engen and C. A. Hoer, "Thru-Reflect-Line: An improved technique for calibrating the dual six-port automatic network analyzer," *IEEE Trans. On Micr. Theory and Tech.*, vol.27, pp.987-993, Dec. 1979.

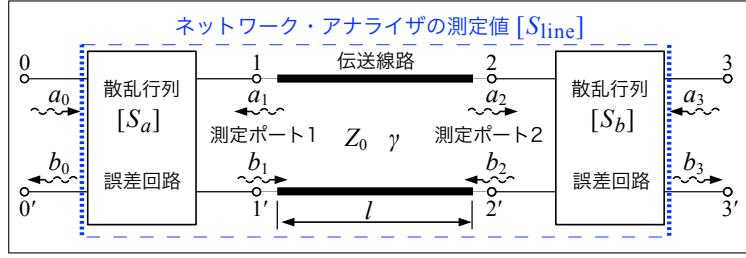


図 5.9. 測定ポート間に伝送線路を接続した場合

これより,

$$[R_{\text{line}}][R_{\text{thru}}]^{-1} = [R_a][R_l][R_a]^{-1} \quad (5.45)$$

ただし, $[R_l]$ は線路長 l の伝送線路の R マトリクスを示し, 次のようになる.

$$[R_l] = \begin{pmatrix} e^{-\gamma l} & 0 \\ 0 & e^{\gamma l} \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

ここで, 測定値から求められる値を次のようにおく.

$$[R_{\text{line}}][R_{\text{thru}}]^{-1} \equiv \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

5.5.3 行列のトレース

要素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) からなる行列を $[A]$ とすると, 行列のトレース tr は, 対角要素 a_{ii} の和より,

$$\text{tr} [A] = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (5.48)$$

行列 $[A][B]$ のトレースは,

$$\begin{aligned} \text{tr} [A][B] &= \sum_{i=1}^n ([A][B])_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^n a_{im} b_{mi} \right) = \sum_{m=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{mi} a_{im} \right) \\ &= \sum_{m=1}^n ([B][A])_{mm} = \text{tr} [B][A] \end{aligned} \quad (5.49)$$

つまり, 行列を入れ替えてもトレースは不変である. これより,

$$\begin{aligned} \text{tr}([P]^{-1}[A][P]) &= \text{tr} \{ ([P]^{-1}[A])[P] \} = \text{tr} \{ [P]([P]^{-1}[A]) \} = \text{tr} \{ ([P][P]^{-1})[A] \} \\ &= \text{tr} \{ [U][A] \} = \text{tr} [A] \end{aligned} \quad (5.50)$$

ただし, $[U]$ は単位行列を示す. よって, 行列の相似変換でもトレースは不変である.

5.5.4 伝送線路の電気長

式 (5.45) の行列のトレースを求めるとき、

$$\begin{aligned} \text{tr} \{ [R_{line}] [R_{thru}]^{-1} \} &= \text{tr} \{ [R_a] [R_l] [R_a]^{-1} \} = \text{tr} \{ [R_a]^{-1} ([R_a] [R_l]) \} \\ &= \text{tr} [R_l] = e^{-\gamma l} + e^{\gamma l} \end{aligned} \quad (5.51)$$

行列のトレースは、対角要素の和ゆえ、

$$r_{11} + r_{22} = e^{-\gamma l} + e^{\gamma l} = 2 \cosh \gamma l \quad (5.52)$$

よって、伝送線路の電気長 γl を求めることができる。

$$\gamma l = \cosh^{-1} \left(\frac{r_{11} + r_{22}}{2} \right) \quad (5.53)$$

5.5.5 誤差回路の S パラメータ

誤差回路の R マトリクス要素を

$$[R_a] \equiv \begin{pmatrix} r_{11}^{(a)} & r_{12}^{(a)} \\ r_{21}^{(a)} & r_{22}^{(a)} \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} [R_{line}] [R_{thru}]^{-1} &= [R_a] [R_l] [R_a]^{-1} \\ [R_{line}] [R_{thru}]^{-1} [R_a] &= [R_a] [R_l] \end{aligned} \quad (5.55)$$

より、

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}^{(a)} & r_{12}^{(a)} \\ r_{21}^{(a)} & r_{22}^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}^{(a)} & r_{12}^{(a)} \\ r_{21}^{(a)} & r_{22}^{(a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma l} & 0 \\ 0 & e^{\gamma l} \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

これより、

$$r_{11} r_{11}^{(a)} + r_{12} r_{21}^{(a)} = r_{11}^{(a)} e^{-\gamma l} \quad (5.57)$$

$$r_{11} r_{12}^{(a)} + r_{12} r_{22}^{(a)} = r_{12}^{(a)} e^{\gamma l} \quad (5.58)$$

$$r_{21} r_{11}^{(a)} + r_{22} r_{21}^{(a)} = r_{21}^{(a)} e^{-\gamma l} \quad (5.59)$$

$$r_{21} r_{12}^{(a)} + r_{22} r_{22}^{(a)} = r_{22}^{(a)} e^{\gamma l} \quad (5.60)$$

式 (5.57) と式 (5.59) の比をとり、 $e^{-\gamma l}$ を消去すると、

$$\frac{r_{11} r_{11}^{(a)} + r_{12} r_{21}^{(a)}}{r_{21} r_{11}^{(a)} + r_{22} r_{21}^{(a)}} = \frac{r_{11}^{(a)}}{r_{21}^{(a)}} \quad (5.61)$$

整理すると次の2次方程式となる。

$$r_{21} \left(\frac{r_{11}^{(a)}}{r_{21}^{(a)}} \right)^2 + (r_{22} - r_{11}) \frac{r_{11}^{(a)}}{r_{21}^{(a)}} - r_{12} = 0 \quad (5.62)$$

また、式(5.58)と式(5.60)の比をとり、 $e^{\gamma l}$ を消去して整理すると、

$$\frac{t_{11}t_{12}^{(a)} + t_{12}t_{22}^{(a)}}{t_{21}t_{12}^{(a)} + t_{22}t_{22}^{(a)}} = \frac{t_{12}^{(a)}}{t_{22}^{(a)}} \quad (5.63)$$

$$r_{21} \left(\frac{r_{12}^{(a)}}{r_{22}^{(a)}} \right)^2 + (r_{22} - r_{11}) \frac{r_{12}^{(a)}}{r_{22}^{(a)}} - r_{12} = 0 \quad (5.64)$$

上の二つの2次方程式は、係数が同じゆえ、

$$r_{21}x^2 + (r_{22} - r_{11})x - r_{12} = 0 \quad (5.65)$$

よって、解は、

$$x = \frac{-(r_{22} - r_{11}) \pm \sqrt{(r_{22} - r_{11})^2 + 4r_{21}r_{12}}}{2r_{21}} = x_1, x_2 \quad (5.66)$$

RマトリクスからSマトリクスに変換して、

$$x_1 = \frac{r_{11}^{(a)}}{r_{21}^{(a)}} = \frac{-e_{00}e_{11} + e_{01}e_{01}}{-e_{11}} = e_{00} - \frac{e_{01}e_{10}}{e_{11}} \quad (5.67)$$

$$x_2 = \frac{r_{12}^{(a)}}{r_{22}^{(a)}} = e_{00} \quad (5.68)$$

とおく。誤差回路による反射が大きくなないとすれば、 $|x_1| > |x_2|$ となるような解を選べばよい。したがって、

$$e_{00} = x_2 \quad (5.69)$$

$$\frac{e_{01}e_{10}}{e_{11}} = x_2 - x_1 \quad (5.70)$$

同様にして、ポート2-3間の誤差回路のパラメータも求めることができ、

$$[R_{\text{line}}] = [R_a][R_l][R_b] = [R_{\text{thru}}][R_b]^{-1}[R_l][R_b] \quad (5.71)$$

変形して、

$$[R_{\text{thru}}]^{-1}[R_{\text{line}}] = [R_b]^{-1}[R_l][R_b] \quad (5.72)$$

$$[R_b][R_{\text{thru}}]^{-1}[R_{\text{line}}] = [R_l][R_b] \quad (5.73)$$

いま、

$$[R_{\text{thru}}]^{-1}[R_{\text{line}}] \equiv \begin{pmatrix} r'_{11} & r'_{12} \\ r'_{21} & r'_{22} \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

$$[R_b] \equiv \begin{pmatrix} r_{11}^{(b)} & r_{12}^{(b)} \\ r_{21}^{(b)} & r_{22}^{(b)} \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} r_{11}^{(b)} & r_{12}^{(b)} \\ r_{21}^{(b)} & r_{22}^{(b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'_{11} & r'_{12} \\ r'_{21} & r'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\gamma l} & 0 \\ 0 & e^{\gamma l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}^{(b)} & r_{12}^{(b)} \\ r_{21}^{(b)} & r_{22}^{(b)} \end{pmatrix} \quad (5.76)$$

これより、

$$r_{11}^{(b)}r'_{11} + r_{12}^{(b)}r'_{21} = r_{11}^{(b)}e^{-\gamma l} \quad (5.77)$$

$$r_{11}^{(b)}r'_{12} + r_{12}^{(b)}r'_{22} = r_{12}^{(b)}e^{-\gamma l} \quad (5.78)$$

$$r_{21}^{(b)}r'_{11} + r_{22}^{(b)}r'_{21} = r_{21}^{(b)}e^{\gamma l} \quad (5.79)$$

$$r_{21}^{(b)}r'_{12} + r_{22}^{(b)}r'_{22} = r_{22}^{(b)}e^{\gamma l} \quad (5.80)$$

式 (5.77) と式 (5.78) の比をとり $e^{-\gamma l}$ を消去、

$$\begin{aligned} \frac{r_{11}^{(b)}r'_{11} + r_{12}^{(b)}r'_{21}}{r_{11}^{(b)}r'_{12} + r_{12}^{(b)}r'_{22}} &= \frac{r_{11}^{(b)}}{r_{12}^{(b)}} \\ r'_{12} \left(\frac{r_{11}^{(b)}}{r_{12}^{(b)}} \right)^2 + (r'_{22} - r'_{11}) \frac{r_{11}^{(b)}}{r_{12}^{(b)}} - r'_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (5.81)$$

また、式 (5.79) と式 (5.80) の比をとり $e^{\gamma l}$ を消去して整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{r_{21}^{(b)}r'_{11} + r_{22}^{(b)}r'_{21}}{r_{21}^{(b)}r'_{12} + r_{22}^{(b)}r'_{22}} &= \frac{r_{21}^{(b)}}{r_{22}^{(b)}} \\ r'_{12} \left(\frac{r_{21}^{(b)}}{r_{22}^{(b)}} \right)^2 + (r'_{22} - r'_{11}) \frac{r_{21}^{(b)}}{r_{22}^{(b)}} - r'_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (5.82)$$

上の二つの方程式は、

$$r'_{12}y^2 + (r'_{22} - r'_{11})y - r'_{21} = 0 \quad (5.83)$$

で表され、解は ($|y_1| > |y_2|$)、

$$y = \frac{-(r'_{22} - r'_{11}) \pm \sqrt{(r'_{22} - r'_{11})^2 + 4r'_{12}r'_{21}}}{2r'_{12}} = y_1, y_2 \quad (5.84)$$

R マトリクスから S マトリクスに変換して,

$$y_1 = \frac{r_{11}^{(b)}}{r_{12}^{(b)}} = \frac{-e_{22}e_{33} + e_{23}e_{32}}{e_{22}} = -e_{33} - \frac{e_{23}e_{32}}{e_{22}} \quad (5.85)$$

$$y_2 = \frac{r_{21}^{(b)}}{r_{22}^{(b)}} = -e_{33} \quad (5.86)$$

したがって,

$$e_{33} = -y_2 \quad (5.87)$$

$$\frac{e_{23}e_{32}}{e_{22}} = y_1 - y_2 \quad (5.88)$$

5.5.6 反射器 (Reflect)

測定ポートに反射器 (Reflect) を接続した場合を考える (反射係数 Γ_L).

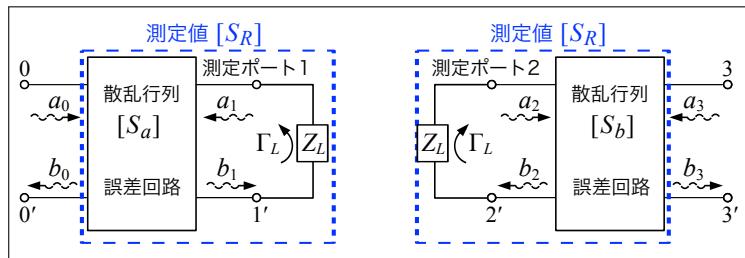


図 5.10. 測定ポート間に伝送線路を接続した場合

ポート 0 での反射係数 $S_{11}^{(R)}$, およびポート 3 での反射係数 $S_{22}^{(R)}$ は,

$$S_{11}^{(R)} = e_{00} + \frac{e_{01}e_{10}\Gamma_L}{1 - e_{11}\Gamma_L} = x_2 + \frac{e_{11}(x_2 - x_1)\Gamma_L}{1 - e_{11}\Gamma_L} \quad (5.89)$$

$$S_{22}^{(R)} = e_{33} + \frac{e_{23}e_{32}\Gamma_L}{1 - e_{22}\Gamma_L} = -y_2 + \frac{e_{22}(y_1 - y_2)\Gamma_L}{1 - e_{22}\Gamma_L} \quad (5.90)$$

これより,

$$\Gamma_L = \frac{S_{11}^{(R)} - x_2}{(S_{11}^{(R)} - x_1)e_{11}} = \frac{S_{22}^{(R)} + y_2}{(S_{22}^{(R)} + y_1)e_{22}} \quad (5.91)$$

$$\therefore \frac{e_{22}}{e_{11}} = \frac{(S_{11}^{(R)} - x_1)(S_{22}^{(R)} + y_2)}{(S_{11}^{(R)} - x_2)(S_{22}^{(R)} + y_1)} \quad (5.92)$$

一方, スルーのときの反射係数 $S_{11}^{(T)}$, $S_{22}^{(T)}$ は,

$$S_{11}^{(T)} = e_{00} + \frac{e_{22}e_{01}e_{10}}{1 - e_{11}e_{22}} = x_2 + \frac{e_{11}e_{22}(x_2 - x_1)}{1 - e_{11}e_{22}} = \frac{x_2 - e_{11}e_{22}x_1}{1 - e_{11}e_{22}} \quad (5.93)$$

$$S_{22}^{(T)} = e_{33} + \frac{e_{22}e_{23}e_{32}}{1 - e_{11}e_{22}} = -y_2 + \frac{e_{11}e_{22}(y_1 - y_2)}{1 - e_{11}e_{22}} = \frac{-y_2 + e_{11}e_{22}y_1}{1 - e_{11}e_{22}} \quad (5.94)$$

よって,

$$e_{11}e_{22} = \frac{S_{11}^{(T)} - x_1}{S_{11}^{(T)} - x_2} = \frac{S_{22}^{(T)} + y_1}{S_{22}^{(T)} + y_2} \quad (5.95)$$

したがって,

$$e_{11}^2 = \frac{(S_{11}^{(T)} - x_1)(S_{11}^{(R)} - x_2)(S_{22}^{(R)} + y_1)}{(S_{11}^{(T)} - x_2)(S_{11}^{(R)} - x_1)(S_{22}^{(R)} + y_2)} \quad (5.96)$$

$$e_{22} = \frac{(S_{11}^{(R)} - x_1)(S_{22}^{(R)} + y_2)}{(S_{11}^{(R)} - x_2)(S_{22}^{(R)} + y_1)} e_{11} \quad (5.97)$$

ここで, Γ_L の推定値を用いて,

$$e_{11} = \frac{S_{11}^{(R)} - x_2}{(S_{11}^{(R)} - x_1)\Gamma_L} \quad (5.98)$$

$$e_{22} = \frac{S_{22}^{(R)} + y_2}{(S_{22}^{(R)} + y_1)\Gamma_L} \quad (5.99)$$

より推定値を求め, e_{11} , e_{22} の符号を決定すればよい. さらに $e_{10}e_{32}$, $e_{01}e_{23}$ は, SOLT 校正のスルーリーの式と同様であり, スルーリーの透過係数 $S_{21}^{(T)}$, $S_{12}^{(T)}$ がわかれれば求められる. したがって,

$$e_{00}, e_{11}, e_{10}e_{01}, e_{33}, e_{22}, e_{23}e_{32}, e_{10}e_{32}, e_{01}e_{23}$$

が決定され, デイエンベッディングによって被測定素子の S パラメータを得ることができる.

CHAPTER 6

フィルタ合成のための特性関数

フィルタ合成における特性関数と動作パラメータの理論的基礎を解説する。まず、二端子対リアクタンス回路における入力インピーダンスと反射係数を導入し、最大電力と消費電力の比として動作伝送関数を定義する。次に、これを基にしてフィルタの特性関数を定義し、反射係数との関係も言及している。また、無損失回路の性質について、その入力インピーダンス、インピーダンス行列、アドミタンス行列、および基本行列が持つ偶関数・奇関数特性を詳述する。最後に、動作パラメータ、散乱行列、そして入力インピーダンスと特性関数との間の関係を導き、伝送特性としての挿入損失、反射損失、位相特性、群遅延特性を求めていく。

6.1 2端子対リアクタンス回路

2端子対リアクタンス回路のポート1, 2を R_1, R_2 （実数）で終端し、ポート1, 2から回路側を見た入力インピーダンスを $Z_{in,1}(s), Z_{in,2}(s)$ とすると、ポート1, 2での反射係数 $\Gamma_1(s), \Gamma_2(s)$ は、

$$\Gamma_1(s) = \frac{Z_{in,1}(s) - R_1}{Z_{in,1}(s) + R_1} \quad (6.1)$$

$$\Gamma_2(s) = \frac{Z_{in,2}(s) - R_2}{Z_{in,2}(s) + R_2} \quad (6.2)$$

ただし、 $s = j\omega$ 。

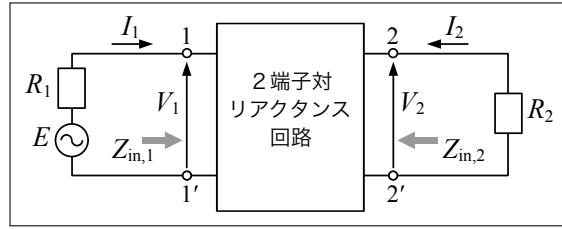


図 6.1. 入出力を終端した回路

ポート 2 の終端負荷 R_2 に消費される電力 P_2 は,

$$P_2 = V_2(-I_2)^* = \frac{|V_2|^2}{R_2} \quad (6.3)$$

ポート 1 に内部抵抗 R_1 の信号源を接続した場合を考える。内部抵抗に等しい整合抵抗 R_1 をこれに接続すれば最大電力 P_{max} が得られる、次のようになる。

$$P_{max} = \frac{E^2 R_1}{(R_1 + R_1)^2} = \frac{E^2}{4R_1} \quad (6.4)$$

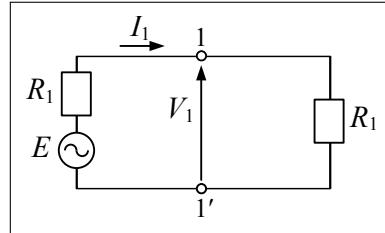


図 6.2. 整合負荷を接続した回路

これより、終端負荷 R_2 に消費される電力 P_2 と最大電力 P_{max} との比は,

$$\frac{P_{max}}{P_2} = \frac{\frac{E^2}{4R_1}}{\frac{|V_2|^2}{R_2}} = \frac{1}{4} \frac{R_2}{R_1} \frac{E^2}{|V_2|^2} = \left| \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \frac{E}{V_2} \right|^2 \quad (6.5)$$

ここで、回路が無損失のとき、出力電力 P_2 は入力電力 $P_{in} = |I_1|^2 \Re(Z_{in,1})$ に等しいから、

$$|I_1|^2 \Re(Z_{in,1}) = \frac{|V_2|^2}{R_2} \quad (6.6)$$

よって、

$$\left| \frac{V_2}{I_1} \right|^2 = R_2 \Re(Z_{in,1}) \quad (6.7)$$

これより,

$$\frac{V_2}{E} = \frac{I_1}{E} \cdot \frac{V_2}{I_1} = \frac{1}{R_1 + Z_{in,1}} \cdot \frac{V_2}{I_1} \quad (6.8)$$

$$\left| \frac{V_2}{E} \right|^2 = \frac{1}{|R_1 + Z_{in,1}|^2} \cdot \left| \frac{V_2}{I_1} \right|^2 = \frac{R_2 \Re(Z_{in,1})}{|R_1 + Z_{in,1}|^2} \quad (6.9)$$

よって,

$$\frac{P_{max}}{P_2} = \left| \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \frac{E}{V_2} \right|^2 = \frac{1}{4} \frac{R_2}{R_1} \frac{|R_1 + Z_{in,1}|^2}{R_2 \Re(Z_{in,1})} = \frac{|R_1 + Z_{in,1}|^2}{4R_1 \Re(Z_{in,1})} \quad (6.10)$$

受動回路の場合, $P_{max}/P_2 \geq 1$.

6.2 フィルタの特性関数

特性関数 (characteristic function) $K(s)$ を,

$$\frac{P_{max}}{P_2} = 1 + |K(s)|^2 \quad (6.11)$$

で定義し ($s = j\omega$), Transducer Function $H(s)$ ^{*1}を次のように定義する.

$$H(s) = \sqrt{\frac{P_{max}}{P_2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \frac{E}{V_2} \quad (6.12)$$

よって,

$$|H(s)|^2 = 1 + |K(s)|^2 \quad (6.13)$$

^{*1} Transducer Function (動作伝送関数) には, 次のような 2 つの定義があるが, 本章では後者の定義を用いている).

- 広義の Transducer Function : 電源・負荷を含めた入出力関係 ($E \rightarrow V_2$) を扱い, 実用的な電圧伝送性能を示す.
- 狹義の Transducer Function (Insertion Loss 法) : 規格化された電源・負荷 (R_1, R_2) におけるフィルタ設計のための関数を示す (動作伝送係数と同じ定義).

次に、反射係数との関係を導出する。

$$\begin{aligned}
1 - \frac{P_2}{P_{max}} &= 1 - 4 \frac{R_1}{R_2} \left| \frac{V_2}{E} \right|^2 = 1 - 4 \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2 \Re(Z_{in,1})}{|R_1 + Z_{in,1}|^2} \\
&= \frac{(R_1 + Z_{in,1})(R_1 + Z_{in,1}^*) - 4R_1 \Re(Z_{in,1})}{|R_1 + Z_{in,1}|^2} \\
&= \frac{R_1^2 + R_1(Z_{in,1} + Z_{in,1}^*) + |Z_{in,1}|^2 - 2R_1(Z_{in,1} + Z_{in,1}^*)}{|R_1 + Z_{in,1}|^2} \\
&= \frac{R_1^2 - R_1(Z_{in,1} + Z_{in,1}^*) + |Z_{in,1}|^2}{|R_1 + Z_{in,1}|^2} \\
&= \frac{(R_1 - Z_{in,1})(R_1 - Z_{in,1}^*)}{|R_1 + Z_{in,1}|^2} = \left| \frac{Z_{in,1} - R_1}{Z_{in,1} + R_1} \right|^2 = |\Gamma_1|^2
\end{aligned} \tag{6.14}$$

つまり、

$$|\Gamma_1|^2 = 1 - \frac{1}{|H|^2} = \frac{|H|^2 - 1}{|H|^2} = \frac{|K|^2}{|H|^2} = \frac{|K|^2}{1 - |K|^2} \tag{6.15}$$

これより、特性関数 K に関して次式が成り立つ。

$$|K|^2 = |\Gamma_1|^2 |H|^2 \tag{6.16}$$

$$KK^* = \Gamma_1 \Gamma_1^* H H^* \tag{6.17}$$

6.3 入力インピーダンスの性質

物理的に実現可能な受動回路 (passive network) の入力インピーダンスの偶・奇特性 (even/odd properties) を説明する。

6.3.1 フーリエ変換

いま、 $f(t)$ を時間 t (実数) の実数の関数とし、時間領域 (time domain) から周波数領域 (frequency domain) に **フーリエ変換** (Fourier transform) すると、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{6.18}$$

これは次のように実部と虚部で表すことができる。

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt
\end{aligned} \tag{6.19}$$

ここで, $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$ を実数として,

$$F(\omega) = \Re(F) + \Im(F) \equiv F_1(\omega) - jF_2(\omega) \quad (6.20)$$

とおくと,

$$F_1(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\omega) t dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = F_1(\omega) \quad (6.21)$$

$$F_2(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(-\omega) t dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = -F_2(\omega) \quad (6.22)$$

よって, $F_1(\omega)$ は偶関数 (even), $F_2(\omega)$ は奇関数 (odd) である. 信号源を含まない定数素子 R , L , C (周波数や信号の大きさに依存しない) から構成される 1 端子対回路を考えると, 電圧 $v(t)$, 電流 $i(t)$ は時間 t の実数関数であり, これらのフーリエ変換を $V(\omega)$, $I(\omega)$ とすると,

$$V(\omega) = Z(j\omega)I(\omega) \quad (6.23)$$

ただし, $Z(j\omega)$ は入力インピーダンスを示し,

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (6.24)$$

このとき, 実部, 虚部は先に求めた式 (6.21), 式 (6.22) の関係があり,

$$V(\omega) = V_1(\omega) - jV_2(\omega) \quad (6.25)$$

$$I(\omega) = I_1(\omega) - jI_2(\omega) \quad (6.26)$$

入力インピーダンスとの関係を考えて,

$$\begin{aligned} V_1(\omega) - jV_2(\omega) &= \{R(\omega) + jX(\omega)\} \{I_1(\omega) - jI_2(\omega)\} \\ &= R(\omega)I_1(\omega) + X(\omega)I_2(\omega) + j\{-R(\omega)I_2(\omega) + X(\omega)I_1(\omega)\} \end{aligned} \quad (6.27)$$

実部, 虚部より,

$$V_1(\omega) = R(\omega)I_1(\omega) + X(\omega)I_2(\omega) \quad (6.28)$$

$$V_2(\omega) = R(\omega)I_2(\omega) - X(\omega)I_1(\omega) \quad (6.29)$$

これより,

$$\begin{aligned} R(-\omega) &= \frac{V_1(-\omega)I_1(-\omega) + V_2(-\omega)I_2(-\omega)}{I_1^2(-\omega) + I_2^2(-\omega)} = \frac{V_1(\omega)I_1(\omega) + (-V_2(\omega))(-I_2(\omega))}{I_1^2(\omega) + (-I_2(\omega))^2} \\ &= R(\omega) \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned}
X(-\omega) &= \frac{V_1(-\omega)I_2(-\omega) - V_2(-\omega)I_1(-\omega)}{I_1^2(-\omega) + I_2^2(-\omega)} = \frac{V_1(\omega)(-I_2(\omega)) + (-V_2(\omega))I_1(\omega)}{I_1^2(\omega) + (-I_2(\omega))^2} \\
&= -X(\omega)
\end{aligned} \tag{6.31}$$

よって,

$$Z_{in}(-\omega) = R(-\omega) + jX(-\omega) = R(\omega) - jX(\omega) = Z_{in}^*(\omega) \tag{6.32}$$

したがって, $R(\omega)$ は偶関数 (even), $X(\omega)$ は奇関数 (odd) であることがわかる. もちろん, 規格化入力インピーダンス z_{in} の複素共役についても同様である.

$$z_{in}^*(\omega) = r(\omega) - jx(\omega) = r(-\omega) - j[-x(-\omega)] = z_{in}(-\omega) \tag{6.33}$$

6.3.2 入力インピーダンスの偶・奇特性

入力インピーダンス Z_{in} の分母, 分子を, $s = j\omega$ に関する偶関数 (even) $m_i(s) = m_i(-s)$ と, 奇関数 (odd) $n_i(s) = -n_i(-s)$ ($i = 1, 2$) で表すと,

$$Z_{in} = \frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)} \tag{6.34}$$

ここで, 偶関数 $m_i(s)$ は偶多項式で表され (n は整数),

$$\begin{aligned}
m_i(s) &= a_{2n}s^{2n} + a_{2n-2}s^{2n-2} + \cdots + a_2s^2 + a_0 \\
&= m_i(-s)
\end{aligned} \tag{6.35}$$

このとき,

$$s^{2n} = (j\omega)^{2n} = (-1)^n s^{2n} \tag{6.36}$$

より, $m_i(s)$ は実数. また, 奇関数 $n_i(s)$ は奇多項式で表され (n は整数),

$$\begin{aligned}
n_i(s) &= a_{2n-1}s^{2n-1} + a_{2n-3}s^{2n-3} + \cdots + a_3s^3 + a_1s \\
&= -n_i(-s)
\end{aligned} \tag{6.37}$$

このとき,

$$s^{2n+1} = (j\omega)^{2n+1} = j(-1)^n s^{2n+1} \tag{6.38}$$

より, $n_i(s)$ は純虚数となることがわかる. そこで, \bar{n}_1, \bar{n}_2 を実数とすると,

$$n_1 \equiv j\bar{n}_1, \quad n_2 \equiv j\bar{n}_2 \tag{6.39}$$

これより,

$$\begin{aligned} Z_{in} &= \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} = \frac{m_1 + j\bar{n}_1}{m_2 + j\bar{n}_2} = \frac{m_1 + j\bar{n}_1}{m_2 + j\bar{n}_2} \cdot \frac{m_2 - j\bar{n}_2}{m_2 - j\bar{n}_2} \\ &= \frac{(m_1 m_2 - \bar{n}_1 \bar{n}_2) + j(m_1 \bar{n}_2 + m_2 \bar{n}_1)}{m_2^2 + \bar{n}_2^2} = \frac{1}{Y_{in}} \end{aligned} \quad (6.40)$$

上式より, Z_{in} の分母は偶関数である. 一方, 分子の実部は,

$$\begin{aligned} m_1(-s)m_2(-s) - \bar{n}_1(-s)\bar{n}_2(-s) &= m_1(s)m_2(s) - (-\bar{n}_1(s))(-\bar{n}_2(s)) \\ &= m_1(s)m_2(s) - \bar{n}_1(s)\bar{n}_2(s) \end{aligned} \quad (6.41)$$

ゆえ偶関数である. 同様にして, 分子の虚部は,

$$\begin{aligned} m_1(-s)\bar{n}_2(-s) + m_2(-s)\bar{n}_1(-s) &= m_1(s)(-\bar{n}_2(s)) + m_2(s)(-\bar{n}_1(s)) \\ &= -(m_1(s)\bar{n}_2(s) + m_2(s)\bar{n}_1(s)) \end{aligned} \quad (6.42)$$

ゆえ奇関数であることがわかる. そこで, Z_{in} の偶関数を $\text{Ev}(Z_{in})$, 奇関数を $\text{Odd}(Z_{in})$ として,

$$Z_{in} = \Re(Z_{in}) + \Im(Z_{in}) \equiv \text{Ev}(Z_{in}) + \text{Odd}(Z_{in}) \quad (6.43)$$

とおくと,

$$\Re(Z_{in}) = \text{Ev}(Z_{in}), \quad \Im(Z_{in}) = \text{Odd}(Z_{in}) \quad (6.44)$$

ただし, $\Re(Z_{in})$, $\Im(Z_{in})$ は Z_{in} の実部, 虚部を各々示す. 以上をまとめると, 入力インピーダンス Z_{in} について,

- Z_{in} の偶関数の項を表す $\text{Ev}(Z_{in})$ は実数
- Z_{in} の奇関数の項を表す $\text{Odd}(Z_{in})$ は純虚数

入力アドミタンス Y_{in} も同様である.

6.4 無損失回路の性質

無損失回路では入力インピーダンスは純虚数, つまり $\Re(Z_{in}) = 0$ ゆえ,

$$\begin{aligned} Z_{in} &= \frac{m_1 + j\bar{n}_1}{m_2 + j\bar{n}_2} = j \frac{m_1 \bar{n}_2 + m_2 \bar{n}_1}{m_2^2 + \bar{n}_2^2} \\ &= \Im(Z_{in}) = \text{Odd}(Z_{in}) = \frac{1}{Y_{in}} \end{aligned} \quad (6.45)$$

よって, 無損失回路では入力インピーダンス Z_{in} , 入力アドミタンス Y_{in} は純虚数かつ奇関数である.

6.4.1 無損失回路のインピーダンス行列

インピーダンス行列 $[Z]$ についても

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

無損失回路では, $i, j, k = 1, 2$ ($j \neq k$) として,

$$Z_{ij} = \left. \frac{V_i}{I_j} \right|_{I_k=0} = \Im(Z_{ij}) = \text{Odd}(Z_{ij}) \quad (6.47)$$

よって, $[Z]$ の全ての行列要素が純虚数, 奇関数となる.

6.4.2 無損失回路のアドミタンス行列

アドミタンス行列 $[Y]$ についても

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

無損失回路では, $i, j, k = 1, 2$ ($j \neq k$) として同様に,

$$Y_{ij} = \left. \frac{I_i}{J_j} \right|_{I_k=0} = \Im(Y_{ij}) = \text{Odd}(Y_{ij}) \quad (6.49)$$

よって, $[Y]$ の全ての行列要素が純虚数, 奇関数となる.

6.4.3 無損失回路の基本行列

さらに, 基本行列 $[F]$ は,

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = [F] \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}, \quad [F] = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (6.50)$$

インピーダンス行列要素を用いて表すと,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_{12}} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 \\ 1 & Z_{22} \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

これより,

$$C(s) = \frac{1}{Z_{12}(s)} = \frac{1}{-Z_{12}(-s)} = -C(-s) = \Im(C) \quad (6.52)$$

$$A(s) = \frac{Z_{11}(s)}{Z_{12}(s)} = \frac{-Z_{11}(-s)}{-Z_{12}(-s)} = A(-s) = \Re(A) \quad (6.53)$$

$$D(s) = \frac{Z_{22}(s)}{Z_{12}(s)} = \frac{-Z_{22}(-s)}{-Z_{12}(-s)} = D(-s) = \Re(D) \quad (6.54)$$

$$B(s) = \frac{Z_{11}(s)Z_{22}(s) - Z_{12}^2(s)}{Z_{12}(s)} = -B(-s) = \Im(B) \quad (6.55)$$

よって、無損失回路では四端子定数の A, D は実数かつ偶関数, B, C は純虚数かつ奇関数となる。

6.5 動作パラメータの性質

6.5.1 動作伝送関数と S パラメータの関係

動作伝送関数 $H(s)$ は、基本行列の要素 A, B, C, D より、

$$H(s) = \frac{A(s)R_2 + B(s) + C(s)R_1R_2 + D(s)R_1}{2\sqrt{R_1R_2}} \quad (6.56)$$

一方、散乱行列要素 S_{21}, S_{12} は（導出省略）、

$$S_{21} = S_{12} = \frac{2\sqrt{R_1R_2}}{AR_1 + DR_2 + B + CR_1R_2} \quad (6.57)$$

よって、

$$H(s) = \frac{1}{S_{21}} = \frac{1}{S_{12}} \quad (6.58)$$

6.5.2 無損失回路

無損失回路のとき、 A, D は実数、 B, C は純虚数ゆえ、 $H(s)$ の複素共役 $H^*(s)$ は、

$$H^*(s) = \frac{A(s)R_2 - B(s) - C(s)R_1R_2 + D(s)R_1}{2\sqrt{R_1R_2}} \quad (6.59)$$

また、 A, D は偶関数、 B, C は奇関数より、

$$\begin{aligned} H^*(s) &= \frac{A(-s)R_2 + B(-s) + C(-s)R_1R_2 + D(-s)R_1}{2\sqrt{R_1R_2}} \\ &= H(-s) \end{aligned} \quad (6.60)$$

6.5.3 特性関数

動作伝送関数 H より $|H|^2$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
 |H|^2 &= HH^* = \frac{(A+D)R + (B+CR^2)}{2R} \cdot \frac{(A+D)R - (B+CR^2)}{2R} \\
 &= \frac{(A+D)^2 R^2 - (B+CR^2)^2}{4R^2} \\
 &= 1 + \frac{-4R^2 + (A+D)^2 R^2 - (B+CR^2)^2}{4R^2} \\
 &= 1 + \frac{-4R^2 + (A-D)^2 R^2 - 4ADR^2 - (B-CR^2)^2 + 4BCR^2}{4R^2}
 \end{aligned}$$

ここで, $AD - BC = 1$ より,

$$\begin{aligned}
 |H|^2 &= 1 + \frac{(A-D)^2 R^2 - (B-CR^2)^2}{4R^2} \\
 &= 1 + \frac{1}{4R^2} \left\{ R^2 (A-D)^2 - (B-CR^2)^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

B, C は純虚数ゆえ, 上式の第 2 項は正である. 特性関数 K は次式で定義される.

$$|H|^2 \equiv 1 + |K|^2 \tag{6.62}$$

$|K|^2$ を複素共役 K^* を用いて表すと,

$$\begin{aligned}
 |K|^2 &= KK^* \\
 &= \frac{R^2 (A-D)^2 - (B-CR^2)^2}{4R^2} \\
 &= \frac{R(A-D) + (B-CR^2)}{2R} \cdot \frac{R(A-D) - (B-CR^2)}{2R}
 \end{aligned}$$

これより, 特性関数 K は次のようになる.

$$K(s) \equiv \frac{1}{2R} \left\{ R(A(s) - D(s)) + (B(s) - C(s)R^2) \right\} \tag{6.63}$$

複素共役 $K^*(s)$ については,

$$\begin{aligned}
 K^*(s) &= \frac{1}{2R} \left\{ R(A(s) - D(s)) - (B(s) - C(s)R^2) \right\} \\
 &= \frac{1}{2R} \left\{ R(A(-s) - D(-s)) + (B(-s) - C(-s)R^2) \right\} \\
 &= K(-s)
 \end{aligned} \tag{6.64}$$

6.5.4 基本行列と動作伝送関数, 特性関数の関係

動作伝送関数 H , 特性関数 K の実部は ($s = j\omega$),

$$\begin{aligned}\Re(H(s)) &= \frac{A(s)R_2 + D(s)R_1}{2\sqrt{R_1R_2}} = \frac{A(-s)R_2 + D(-s)R_1}{2\sqrt{R_1R_2}} \\ &= \Re(H(-s)) \equiv H_e(s)\end{aligned}\tag{6.65}$$

$$\begin{aligned}\Re(K(s)) &= \frac{A(s)R_2 - D(s)R_1}{2\sqrt{R_1R_2}} = \frac{A(-s)R_2 - D(-s)R_1}{2\sqrt{R_1R_2}} \\ &= \Re(K(-s)) \equiv K_e(s)\end{aligned}\tag{6.66}$$

式 (6.65) および式 (6.66) より,

$$H_e \pm K_e = \frac{AR_2 + DR_1}{2\sqrt{R_1R_2}} \pm \frac{AR_2 - DR_1}{2\sqrt{R_1R_2}}\tag{6.67}$$

上側, 下側符号を各々, 別々に求めて,

$$H_e + K_e = \frac{AR_2}{\sqrt{R_1R_2}}\tag{6.68}$$

よって,

$$A = \frac{\sqrt{R_1R_2}}{R_2}(H_e + K_e) = \frac{R_1}{\sqrt{R_1R_2}}(H_e + K_e)\tag{6.69}$$

また,

$$H_e - K_e = \frac{DR_1}{\sqrt{R_1R_2}}\tag{6.70}$$

よって,

$$D = \frac{\sqrt{R_1R_2}}{R_1}(H_e - K_e) = \frac{R_2}{\sqrt{R_1R_2}}(H_e - K_e)\tag{6.71}$$

同様にして, 動作伝送関数 H , 特性関数 K の虚数部は,

$$\begin{aligned}\Im(H(s)) &= \frac{B(s) + C(s)R_1R_2}{2\sqrt{R_1R_2}} = \frac{-B(-s) - C(-s)R_1R_2}{2\sqrt{R_1R_2}} \\ &= -\Im(H(-s)) \equiv H_o(s)\end{aligned}\tag{6.72}$$

$$\begin{aligned}\Im(K(s)) &= \frac{B(s) - C(s)R_1R_2}{2\sqrt{R_1R_2}} = \frac{-B(-s) + C(-s)R_1R_2}{2\sqrt{R_1R_2}} \\ &= -\Im(K(-s)) \equiv K_o(s)\end{aligned}\tag{6.73}$$

式 (6.72) および式 (6.73) より,

$$H_o \pm K_o = \frac{B + CR_1R_2}{2\sqrt{R_1R_2}} \pm \frac{B - CR_1R_2}{2\sqrt{R_1R_2}}\tag{6.74}$$

上側, 下側符号を各々, 別々に求めて,

$$H_o + K_o = \frac{B}{\sqrt{R_1 R_2}} \quad (6.75)$$

よって,

$$B = \sqrt{R_1 R_2} (H_o + K_o) = \frac{R_1 R_2}{\sqrt{R_1 R_2}} (H_o + K_o) \quad (6.76)$$

また,

$$H_o - K_o = \frac{C R_1 R_2}{\sqrt{R_1 R_2}} \quad (6.77)$$

よって,

$$C = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} (H_o - K_o) \quad (6.78)$$

基本行列と動作伝送関数, 特性関数の関係をまとめると^{*2} [2],

$$H_e = \frac{A R_2 + D R_1}{2 \sqrt{R_1 R_2}} \quad (6.79)$$

$$H_o = \frac{B + C R_1 R_2}{2 \sqrt{R_1 R_2}} \quad (6.80)$$

$$K_e = \frac{A R_2 - D R_1}{2 \sqrt{R_1 R_2}} \quad (6.81)$$

$$K_o = \frac{B - C R_1 R_2}{2 \sqrt{R_1 R_2}} \quad (6.82)$$

逆は,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \begin{pmatrix} R_1 (H_e + K_e) & R_1 R_2 (H_o + K_o) \\ H_o - K_o & R_2 (H_e - K_e) \end{pmatrix} \quad (6.83)$$

6.5.5 入力インピーダンスと特性関数の関係

端子 1-1' から回路を見た入力インピーダンス $Z_{in,1}$ は,

$$Z_{in,1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{A V_2 + B(-I_2)}{C V_2 + D(-I_2)} = \frac{A V_2 + B \frac{V_2}{R_2}}{C V_2 + D \frac{V_2}{R_2}} = \frac{A R_2 + B}{C R_2 + D} \quad (6.84)$$

^{*2} R. S. Elliott, "An Introduction to Guided Waves and Microwave Circuits," Prentice Hall (1992).

式 (6.69), (6.71), (6.76), (6.78) を代入すると,

$$\begin{aligned}
z_{in,1} &= \frac{Z_{in,1}}{R_1} \\
&= \frac{1}{R_1} \cdot \frac{R_1(H_e + K_e) \cdot R_2 + R_1 R_2 (H_o + K_o)}{(H_o - K_o) \cdot R_2 + R_2 (H_e - K_e)} \\
&= \frac{(H_e + H_o) + (K_e + K_o)}{(H_e + H_o) - (K_e + K_o)} \\
&= \frac{(\Re(H) + \Im(H)) + (\Re(K) + \Im(K))}{(\Re(H) + \Im(H)) - (\Re(K) + \Im(K))} \\
&= \frac{H(s) + K(s)}{H(s) - K(s)}
\end{aligned} \tag{6.85}$$

同様にして, 端子 2-2' から回路を見た入力インピーダンス $Z_{in,2}$ は,

$$Z_{in,2} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{DV_1 + B(-I_1)}{CV_1 + A(-I_1)} = \frac{DV_1 + B\frac{V_1}{R_1}}{CV_1 + A\frac{V_1}{R_1}} = \frac{DR_1 + B}{CR_1 + A} \tag{6.86}$$

式 (6.69), (6.71), (6.76), (6.78) を代入すると,

$$\begin{aligned}
z_{in,2} &= \frac{Z_{in,2}}{R_2} \\
&= \frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_2(H_e - K_e) \cdot R_1 + R_1 R_2 (H_o + K_o)}{(H_o - K_o) \cdot R_1 + R_1 (H_e + K_e)} \\
&= \frac{(H_e + H_o) - (K_e - K_o)}{(H_e + H_o) + (K_e - K_o)} \\
&= \frac{(\Re(H) + \Im(H)) - (\Re(K) - \Im(K))}{(\Re(H) + \Im(H)) + (\Re(K) - \Im(K))} \\
&= \frac{H(s) - K^*(s)}{H(s) + K^*(s)} = \frac{H(s) - K(-s)}{H(s) + K(-s)}
\end{aligned} \tag{6.87}$$

6.5.6 インピーダンス行列と特性関数の関係

基本行列要素 A, B, C, D を用いてインピーダンス行列 $[Z]$ を表すと ($AD - BC = 1$),

$$[Z] = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} A & 1 \\ 1 & D \end{pmatrix} \tag{6.88}$$

これより,

$$Z_{11} = \frac{A}{C} = \frac{H_e + K_e}{H_o - K_o} R_1 \tag{6.89}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{C} = \frac{1}{H_o - K_o} \sqrt{R_1 R_2} \tag{6.90}$$

$$Z_{22} = \frac{D}{C} = \frac{H_e - K_e}{H_o - K_o} R_2 \tag{6.91}$$

6.5.7 アドミタンス行列と特性関数の関係

同様にして, A, B, C, D を用いてアドミタンス行列 $[Y]$ を表すと,

$$[Y] = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} D & -1 \\ -1 & A \end{pmatrix} \quad (6.92)$$

これより,

$$Y_{11} = \frac{D}{B} = \frac{H_e - K_e}{H_o + K_o} \cdot \frac{1}{R_1} \quad (6.93)$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{-1}{B} = \frac{-1}{H_o + K_o} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \quad (6.94)$$

$$Y_{22} = \frac{A}{B} = \frac{H_e + K_e}{H_o + K_o} \cdot \frac{1}{R_2} \quad (6.95)$$

6.5.8 終端開放, 終端短絡

端子 1-1' から回路を見た入力インピーダンス $Z_{in,1}$ は,

$$Z_{in,1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 + B(-I_2)}{CV_2 + D(-I_2)} \quad (6.96)$$

端子 2-2' の終端を開放, あるいは短絡したとき, 端子 1-1' から回路を見た入力インピーダンス $Z_{o,1}$, $Z_{s,1}$ は,

$$\frac{Z_{o,1}}{R_1} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{A}{C} = \frac{Z_{11}}{R_1} = \frac{H_e + K_e}{H_o - K_o} \quad (6.97)$$

$$\frac{Z_{s,1}}{R_1} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{B}{D} = \frac{1}{R_1 Y_{11}} = \frac{H_o + K_o}{H_e - K_e} \quad (6.98)$$

逆に, 端子 2-2' から回路を見た入力インピーダンス $Z_{in,2}$ は,

$$Z_{in,2} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{DV_1 + B(-I_1)}{CV_1 + A(-I_1)} \quad (6.99)$$

端子 1-1' の終端を開放, あるいは短絡したとき, 端子 2-2' から回路を見た入力インピーダンス $Z_{o,2}$, $Z_{s,2}$ は,

$$\frac{Z_{o,2}}{R_2} = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{D}{C} = \frac{Z_{22}}{R_2} = \frac{H_e - K_e}{H_o - K_o} \quad (6.100)$$

$$\frac{Z_{s,2}}{R_2} = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_1=0} = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{B}{A} = \frac{1}{R_2 Y_{22}} = \frac{H_o + K_o}{H_e + K_e} \quad (6.101)$$

6.6 特性関数と散乱行列の関係

端子 1-1' から回路を見た反射係数 Γ_1 は,

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \frac{Z_{in,1} - R_1}{Z_{in,1} + R_1} = \frac{\frac{AR_2+B}{CR_2+D} - R_1}{\frac{AR_2+B}{CR_2+D} + R_1} \\ &= \frac{(AR_2+B) - R_1(CR_2+D)}{(AR_2+B) + R_1(CR_2+D)} \\ &= S_{11}\end{aligned}\tag{6.102}$$

同様にして, 端子 2-2' から回路を見た反射係数 Γ_2 は,

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= \frac{Z_{in,2} - R_2}{Z_{in,2} + R_2} = \frac{\frac{DR_1+B}{CR_1+A} - R_2}{\frac{DR_1+B}{CR_1+A} + R_2} \\ &= \frac{(DR_1+B) - R_2(CR_1+A)}{(DR_1+B) + R_2(CR_1+A)} \\ &= S_{22}\end{aligned}\tag{6.103}$$

また, 反射係数 Γ_1, Γ_2 と特性関数 K との関係は,

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \frac{Z_{in,1} - R_1}{Z_{in,1} + R_1} = \frac{\frac{Z_{in,1}}{R_1} - 1}{\frac{Z_{in,1}}{R_1} + 1} = \frac{z_{in,1} - 1}{z_{in,1} + 1} \\ &= \frac{\frac{H(s)+K(s)}{H(s)-K(s)} - 1}{\frac{H(s)+K(s)}{H(s)-K(s)} + 1} = \frac{(H+K) - (H-K)}{(H+K) + (H-K)} = \frac{K}{H} \\ &= S_{11}\end{aligned}\tag{6.104}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= \frac{Z_{in,2} - R_2}{Z_{in,2} + R_2} = \frac{\frac{Z_{in,2}}{R_2} - 1}{\frac{Z_{in,2}}{R_2} + 1} = \frac{z_{in,2} - 1}{z_{in,2} + 1} \\ &= \frac{\frac{H(s)-K^*(s)}{H(s)+K^*(s)} - 1}{\frac{H(s)-K^*(s)}{H(s)+K^*(s)} + 1} = \frac{(H-K^*) - (H+K^*)}{(H-K^*) + (H+K^*)} = \frac{-K^*}{H} = \frac{-K(-s)}{H(s)} \\ &= S_{22}\end{aligned}\tag{6.105}$$

式 (6.58) とで, 散乱行列 $[S]$ は次のようになる.

$$[S] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K}{H} & \frac{1}{H} \\ \frac{1}{H} & \frac{-K^*}{H} \end{pmatrix} = \frac{1}{H(s)} \begin{pmatrix} K(s) & 1 \\ 1 & -K(-s) \end{pmatrix}\tag{6.106}$$

6.7 特性関数と入力インピーダンスの関係

反射係数を Γ とすると,

$$\Gamma^*(\omega) = \frac{z_{in}^*(\omega) - 1}{z_{in}^*(\omega) + 1} = \frac{z_{in}(-\omega) - 1}{z_{in}(-\omega) + 1} = \Gamma(-\omega) \quad (6.107)$$

所望の周波数応答 $|H(s)|^2$ は,

$$|H(s)|^2 = 1 + |K(s)|^2 = 1 + |\Gamma(s)|^2 |H(s)|^2 \quad (6.108)$$

特性関数 $K(s)$ を

$$K(s) = H(s)\Gamma(s) \quad (6.109)$$

とすると, 反射係数 $\Gamma(s)$ は,

$$\Gamma(s) = \frac{K(s)}{H(s)} \quad (6.110)$$

$$\Gamma(-s) = \frac{K(-s)}{H(-s)} \quad (6.111)$$

これより,

$$\begin{aligned} |\Gamma|^2 &= \Gamma\Gamma^* = \frac{K(s)}{H(s)} \frac{K(s)^*}{H(s)^*} \\ &= \Gamma(\omega)\Gamma(-\omega) = \frac{K(s)}{H(s)} \frac{K(-s)}{H(-s)} \quad (\text{偶関数}) \end{aligned} \quad (6.112)$$

よって,

$$\begin{aligned} H(s)H(s)^* &= 1 + K(s)K(s)^* \\ H(s)H(-s) &= 1 + K(s)K(-s) \end{aligned} \quad (6.113)$$

規格化入力インピーダンス z_{in}^+ は, $H\Gamma = K$ より,

$$z_{in}^+ = \frac{1 + \Gamma(s)}{1 - \Gamma(s)} = \frac{H(s)}{H(s)} \cdot \frac{1 + \Gamma(s)}{1 - \Gamma(s)} = \frac{H(s) + K(s)}{H(s) - K(s)} \quad (6.114)$$

特性関数 $K(s)$ を適切な関数で与え, 回路で実現可能な関数 $H(s)$ を求めることができれば, $\Gamma(s)$ がわかり, 上式より規格化入力インピーダンスを表す式が得られる. $K = -H\Gamma$ とすると, 反射係数は $-\Gamma$ となるので, 規格化入力インピーダンスは次のようになり, 双対的な回路が得られる^{*3}.

$$z_{in}^- = \frac{H(s) - K(s)}{H(s) + K(s)} = \frac{1}{z_{in}^+} = y_{in}^+ \quad (6.115)$$

^{*3} 双対的な回路の反射係数は互いに逆相である.

6.8 伝送特性

6.8.1 挿入損失, 反射損失

挿入損失 (insertion loss) は, 挿入伝送係数 S_I より, $20 \log_{10} |S_I|$ [dB]. ネットワークアナライザによる測定では, 挿入損失は S_{21} より, $L_A = -20 \log_{10} |S_{21}|$ [dB], 反射損失 (return loss) は S_{11} より, $L_R = -20 \log_{10} |S_{11}|$ [dB] として求めることが多い.

また, フィルタの設計においては, 動作伝送関数 H より, 損失 (transducer loss) α [dB] は

$$\alpha = 10 \log_{10} \left| \frac{P_{max}}{P_2} \right| = 10 \log_{10} |H|^2 = 20 \log_{10} |H| \quad (6.116)$$

より評価される.

動作伝送関数 $H(s)$ の偶関数 $H_e(s)$, 奇関数 $H_o(s)$ は,

$$H_e(s) = H_e(-s) = \Re(H(s)) = \frac{H(s) + H(-s)}{2} \quad (6.117)$$

$$H_o(s) = -H_o(-s) = \Im(H(s)) = \frac{H(s) - H(-s)}{2} \quad (6.118)$$

より,

$$\begin{aligned} |H(s)|^2 &= H(s)H^*(s) = H(s)H(-s) \\ &= \{H_e(s) + H_o(s)\}\{H_e(-s) + H_o(-s)\} \\ &= \{H_e(s) + H_o(s)\}\{H_e(s) - H_o(s)\} = H_e^2(s) - H_o^2(s) \end{aligned} \quad (6.119)$$

6.8.2 位相特性

動作伝送関数 $H(s)$ の位相 θ_H は,

$$\theta_H = \tan^{-1} \frac{\Im(H(s))/j}{\Re(H(s))} = \tan^{-1} \frac{H_o(s)/j}{H_e(s)} = \frac{1}{j} \tanh^{-1} \frac{H_o(s)}{H_e(s)} \quad (6.120)$$

6.8.3 群遅延特性

群遅延 (group delay) T_g は, $s = j\omega$ より,

$$T_g = \frac{d\theta_H}{d\omega} = \frac{ds}{d\omega} \frac{d\theta_H}{ds} = j \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{j} \tanh^{-1} \frac{H_o(s)}{H_e(s)} \right) \quad (6.121)$$

逆双曲線関数 $y = \tanh^{-1} x$ の微分は, $x = \tanh y$ より,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cosh^2 y} = \frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\cosh^2 y} = 1 - \tanh^2 y = 1 - x^2 \quad (6.122)$$

よって、

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 - x^2} \quad (6.123)$$

これより、

$$\begin{aligned} T_g &= \frac{d}{ds} \left(\tanh^{-1} \frac{H_o(s)}{H_e(s)} \right) = \frac{1}{1 - \left(\frac{H_o}{H_e} \right)^2} \cdot \frac{H'_o H_e - H_o H'_e}{H_e^2} \\ &= \frac{H'_o H_e - H_o H'_e}{H_e^2 - H_o^2} \end{aligned} \quad (6.124)$$

ここで、

$$\begin{aligned} 4(H'_o H_e - H_o H'_e) &= \{H(s) - H(-s)\}' \{H(s) + H(-s)\} \\ &\quad - \{H(s) - H(-s)\} \{(H(s) + H(-s))'\} \\ &= H'(s)H(s) - (-1)H'(-s)H(s) \end{aligned} \quad (6.125)$$

ただし、 $H'(s) = \frac{dH(s)}{ds}$ 。また、

$$\begin{aligned} 4(H_e^2 - H_o^2) &= \{H(s) - H(-s)\}^2 - \{H(s) + H(-s)\}^2 \\ &= 2H(s)H(-s) \end{aligned} \quad (6.126)$$

よって、

$$\begin{aligned} T_g &= \frac{H'_o H_e - H_o H'_e}{H_e^2 - H_o^2} = \frac{H'(s)H(s) + H'(-s)H(s)}{2H(s)H(-s)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{H'(s)}{H(s)} + \frac{H'(-s)}{H(-s)} \right\} \\ &= \text{Ev} \left(\frac{H'(s)}{H(s)} \right) \end{aligned} \quad (6.127)$$

CHAPTER 7

最平坦特性を有するフィルタ

平坦な周波数特性（バタワース特性）を持たせるフィルタの設計と特性について詳しく解説する。まず、フィルタの特性関数と伝送関数を定義し、その周波数応答が理想的な低域通過フィルタに近づくことを示している。さらに、周波数変換の概念を用いて、低域通過フィルタから高域通過、帯域通過、および帯域阻止フィルタへの変換と、それぞれのフィルタ特性を示している。これらのフィルタ特性を実現するはしご型回路の正規化素子値の導出として、2段および3段の例を用いて、入力インピーダンスの連分数展開から素子値を求める方法を示している。そして、任意の次数に対する正規化素子値の一般式も導出する。また、各タイプのフィルタにおける素子値の表と周波数特性の図も示している。

7.1 最平坦 (Maximally-flat) 特性

7.1.1 最平坦特性の特性関数

特性関数 $K(s)$ を、

$$K(s) \equiv s^N \quad (7.1)$$

とすると、

$$|K(s)|^2 = K(s)K(s)^* = K(s)K(-s) = s^N(-s)^N = (-s^2)^N \quad (7.2)$$

$$|H(s)|^2 = 1 + |K(s)|^2 = 1 + (-s^2)^N \quad (7.3)$$

$$\frac{1}{|\Gamma(s)|^2} = 1 + |K(s)|^{-2} = 1 + (-s^2)^{-N} \quad (7.4)$$

遮断角周波数 ω_c で角周波数 ω を規格化して、規格化角周波数 Ω を次式によって定義する。

$$s = j\Omega, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (7.5)$$

これより、 $|H|^2$ は、

$$|H|^2 = 1 + (-s^2)^N = 1 + \Omega^{2N} = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N} \quad (7.6)$$

ただし、 $\Omega = 1, \omega = \omega_c$ を遮断点と呼び、このとき、 $|H(\Omega)|^2$ は、 $|H(1)|^2 = 1 + 1^{2N} = 2$ である。また、 $\Omega = 0$ のとき、 $|H(0)|^2 = 1$ 。 $N \rightarrow \infty$ では、 $0 \leq \Omega \leq 1$ のとき $|H|^2 = 1$ で無損失伝送、 $\Omega \geq 1$ のとき $|H|^2 = \infty$ で損失が無限大（全く伝送しない）となり、理想的な **低域通過フィルタ** (lowpass filter) の特性となる。

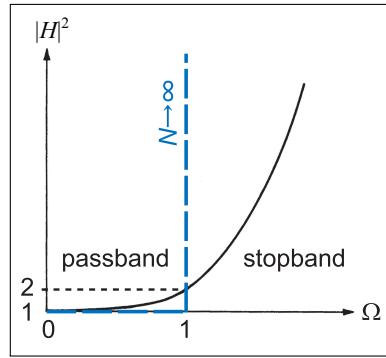


図 7.1. 低域通過の最平坦特性

7.1.2 特性関数の零点

特性関数の零点を求めるため因数分解する。まず準備として、

$$1 + (-s^2)^N = 0 \quad (7.7)$$

とおいて解くと、

$$\begin{aligned} (-s^2)^N &= -1 = e^{j(2n-1)\pi} \\ -s^2 &= e^{j\frac{2n-1}{N}\pi} \\ s &= \pm j e^{j\frac{2n-1}{2N}\pi} \end{aligned} \quad (7.8)$$

いま、 $\epsilon \equiv e^{j\frac{\pi}{2N}}$ とおくと、

$$\begin{aligned} H(s)H(-s) &= 1 + (-s^2)^N \\ &= (s - j\epsilon)(s - j\epsilon^3) \cdots (s - j\epsilon^{2N-1}) \cdot (s + j\epsilon)(s + j\epsilon^3) \cdots (s + j\epsilon^{2N-1}) \end{aligned} \quad (7.9)$$

実際の回路で実現できるように, $H(s)$ を複素平面の左半平面内のゼロ点の値を用いて因数分解すると,

$$H(s) = (s - j\epsilon)(s - j\epsilon^3) \cdots (s - j\epsilon^{2N-1}) = \prod_{n=1}^N (s - j\epsilon^{2n-1}) = \prod_{n=1}^N (s - s_n) \quad (7.10)$$

ここで,

$$s_n = j\epsilon^{2n-1} = j\epsilon^{j\frac{2n-1}{2N}\pi} = e^{j\frac{2n-1+N}{2N}\pi} \quad (7.11)$$

このとき, 反射係数 $\Gamma(s)$ は,

$$\Gamma(s) = \frac{\pm K(s)}{H(s)} = \pm \frac{s^N}{\prod_{n=1}^N (s - s_n)} \quad (7.12)$$

7.1.3 低域通過の最平坦特性

次数 $N = 2, 3, 4, 5$ に対して動作伝送関数および反射係数を計算すると次のようなる. 次数 N が大きくなると, 少しずつ理想の低域通過特性に近づいていくことがわかる.

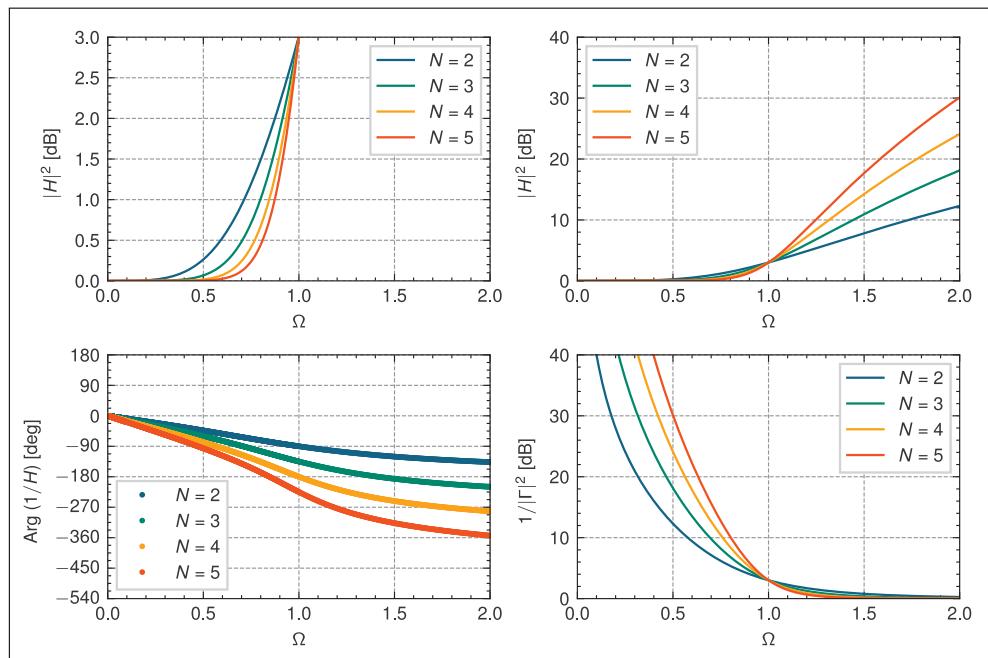


図 7.2. 低域通過の最平坦特性 ($n = 2, 3, 4, 5$)

7.1.4 低域通過から高域通過への周波数変換

原型の低域通過フィルタ (lowpass filter) を,

$$\hat{s} = j\hat{\Omega} \quad (7.13)$$

とすると, **高域通過フィルタ** (highpass filter) への周波数変換は,

$$\Omega = -\frac{1}{j\hat{\Omega}} \quad (7.14)$$

より次のようになる.

$$s = j\Omega = j\left(-\frac{1}{j\hat{\Omega}}\right) = \frac{1}{j\hat{\Omega}} = \frac{1}{\hat{s}} \quad (7.15)$$

下図は次数 $N = 2, 3, 4, 5$ に対する動作伝送関数および反射係数を示したもので, 周波数変換によって容易に高域通過特性が得られている.

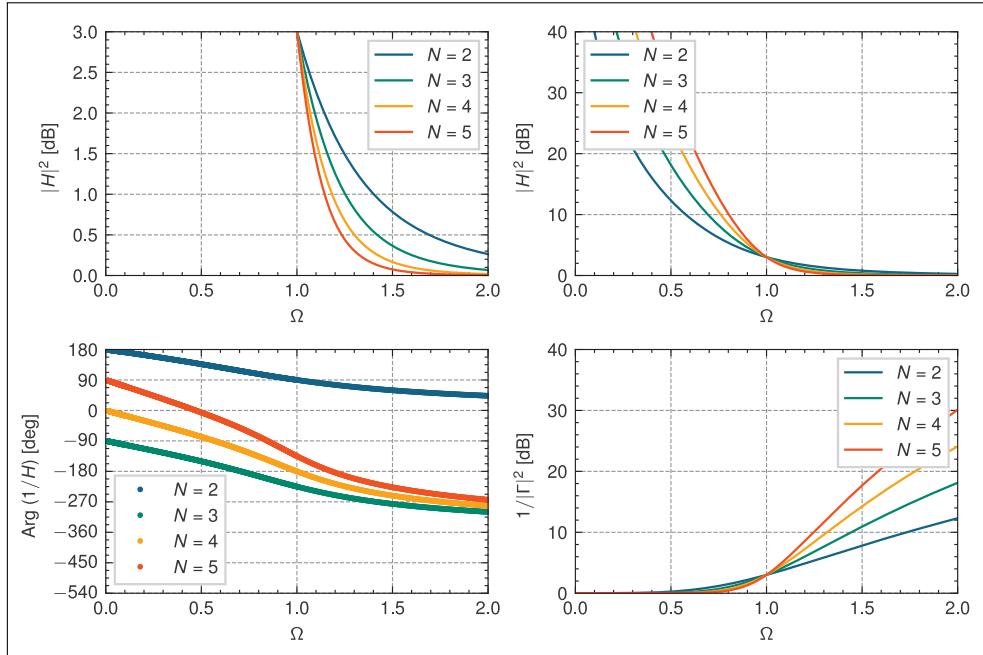


図 7.3. 高域通過の最平坦特性

7.1.5 低域通過から帯域通過への周波数変換

原型の低域通過フィルタ ($\hat{s} = j\hat{\Omega}$) から **帯域通過フィルタ** (bandpass filter) への周波数変換は,

$$s = j\Omega = \frac{j}{W} \left(\hat{\Omega} - \frac{1}{\hat{\Omega}} \right) = \frac{1}{W} \left(j\hat{\Omega} + \frac{1}{j\hat{\Omega}} \right) = \frac{1}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right) \quad (7.16)$$

ここで, W は比帯域幅を示し,

$$W = \frac{\omega_h - \omega_l}{\omega_0} \quad (7.17)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_l \omega_h} \quad (7.18)$$

ただし, ω_0 は中心角周波数, ω_l , ω_h を帯域の下限, 上限の角周波数を示す. 下図は次数 $N = 2, 3, 4, 5$ に対する帯域通過の動作伝送関数および反射係数を示したもので, 比帯域 $W = 0.3$ として周波数変換している.

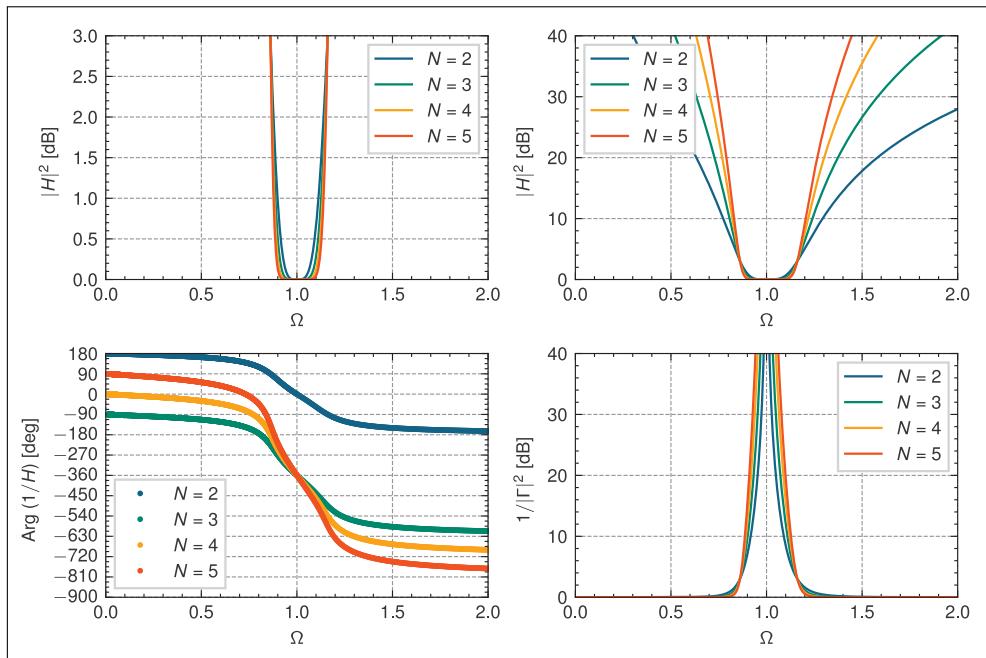


図 7.4. 帯域通過の最平坦特性 ($W = 0.3$)

7.1.6 低域通過から帯域阻止への周波数変換

原型の低域通過フィルタ ($\hat{s} = j\hat{\Omega}$) から**帯域阻止フィルタ** (bandstop filter) への周波数変換は,

$$s = j\Omega = -j\frac{1}{\Omega'} = -\frac{j}{\frac{1}{W} \left(\hat{\Omega} - \frac{1}{\hat{\Omega}} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{W} \left(j\hat{\Omega} + \frac{1}{j\hat{\Omega}} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right)} \quad (7.19)$$

ここで,

$$W = \frac{\omega_h - \omega_l}{\omega_0} \quad (7.20)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_l \omega_h} \quad (7.21)$$

ただし, W は比帯域幅, ω_0 は中心角周波数, ω_l , ω_h を帯域の下限, 上限の角周波数を示す. 同様にして, 比帯域 $W = 0.3$ として帯域阻止に周波数変換した特性を下図に示す.

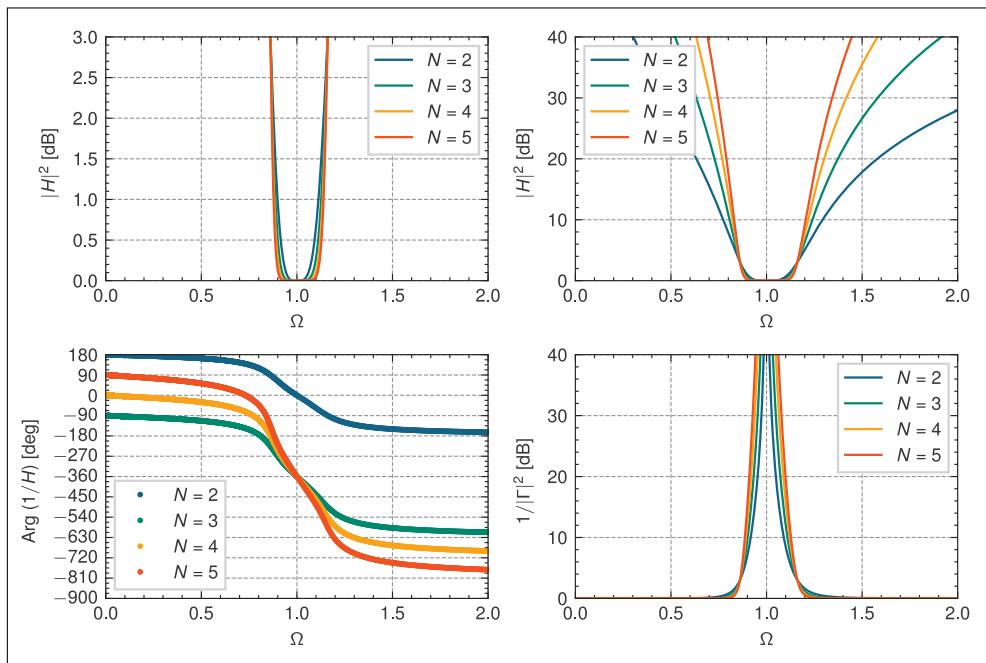


図 7.5. 帯域阻止の最平坦特性 ($W = 0.3$)

7.2 梯子型回路

梯子型回路の規格化入力インピーダンス $z_{in}(s)$ は、次のように連分数展開で表される。

$$z_{in}(s) = g_1 s + \frac{1}{g_2 s + \frac{1}{g_3 s + \frac{1}{g_4 s + \dots}}} \quad (7.22)$$

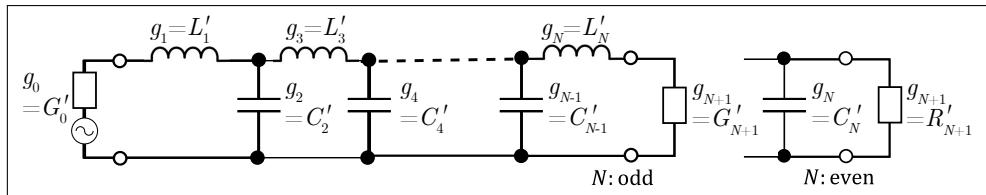


図 7.6. z_{in} により合成した原型低域通過フィルタ

逆に、規格化入力アドミタンス y_{in} が同様の形で連分数展開できる場合、図のような回路構成となる（上の回路に対して双対的な回路）。

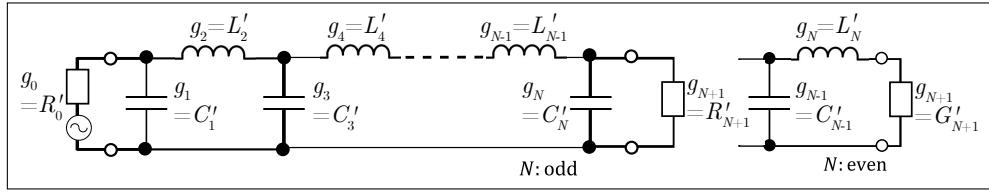


図 7.7. y_{in} により合成した原型低域通過フィルタ

7.3 最平坦特性を持つ2段の梯子型回路

$N = 2$ のとき, 特性関数 $K(s) = s^2$. このとき, $H(s) = 0$ のゼロ点 $s_n (n = 1, 2)$ は,

$$s_1 = e^{j\frac{2 \cdot 1 - 1 + 2}{2 \cdot 2} \pi} = e^{j\frac{3}{4} \pi} \quad (7.23)$$

$$s_2 = e^{j\frac{2 \cdot 2 - 1 + 2}{2 \cdot 2} \pi} = e^{j\frac{5}{4} \pi} = s_1^* \quad (7.24)$$

ただし, $*$ は複素共役を示す. よって, 動作伝送関数 $H(s)$ は,

$$H(s) = (s - s_1)(s - s_2) = s^2 - (s_1 + s_1^*)s + 1 = s^2 + \sqrt{2}s + 1 \quad (7.25)$$

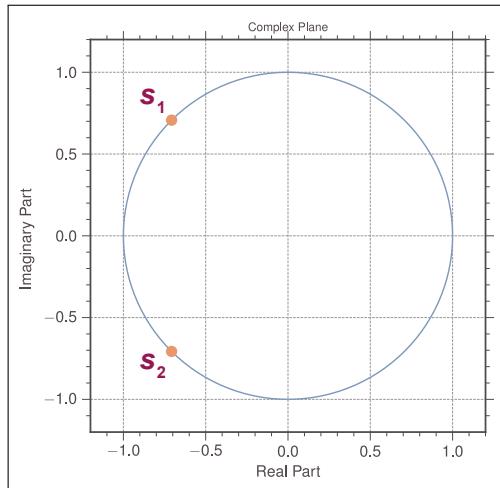


図 7.8. s_n の位置 ($N = 2$)

これより, 規格化入力インピーダンス z_{in}^\pm は,

$$z_{in}^\pm = \frac{(s^2 + \sqrt{2}s + 1) \pm s^2}{(s^2 + \sqrt{2}s + 1) \mp s^2} \quad (7.26)$$

これを, 終端負荷 1 の梯子型回路で構成するため, まず, 上式の上側符号の z_{in}^+ を連分数展開すると,

$$z_{in}^+ = \frac{2s^2 + \sqrt{2}s + 1}{\sqrt{2}s + 1} = \sqrt{2}s + \frac{1}{\sqrt{2}s + 1} \quad (7.27)$$

したがって、梯子型回路の素子値は次のようになる。

- 初段：直列素子 $L'_1 = g_1 = \sqrt{2}$
- 2段目：並列素子 $C'_2 = g_2 = \sqrt{2}$

一方、下側符号の z_{in^-} については、

$$z_{in^-}^- = \frac{1}{z_{in}^+} = y_{in}^+ \quad (7.28)$$

ゆえ、

- 初段：並列素子 $C'_1 = g_1 = \sqrt{2}$
- 2段目：直列素子 $L'_2 = g_2 = \sqrt{2}$

からなる梯子型回路が得られる（反射特性の符号は異なる）。なお、両者とも終端負荷は、

$$R'_3 = G'_3 = g_3 = 1 \quad (7.29)$$

7.4 最平坦特性を持つ3段の梯子型回路

$N = 3$ のとき、特性関数 $K(s) = s^3$ 。このとき、 $H(s) = 0$ のゼロ点 $s_n (n = 1, 2, 3)$ は、

$$s_1 = e^{j\frac{2 \cdot 1 - 1 + 3}{2 \cdot 3} \pi} = e^{j\frac{2}{3} \pi} \quad (7.30)$$

$$s_2 = e^{j\frac{2 \cdot 2 - 1 + 3}{2 \cdot 3} \pi} = e^{j\pi} = -1 \quad (7.31)$$

$$s_3 = e^{j\frac{2 \cdot 3 - 1 + 3}{2 \cdot 3} \pi} = e^{j\frac{4}{3} \pi} = s_1^* \quad (7.32)$$

よって、動作伝送関数 $H(s)$ は、

$$H(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = (s + 1)(s^2 + s + 1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1 \quad (7.33)$$

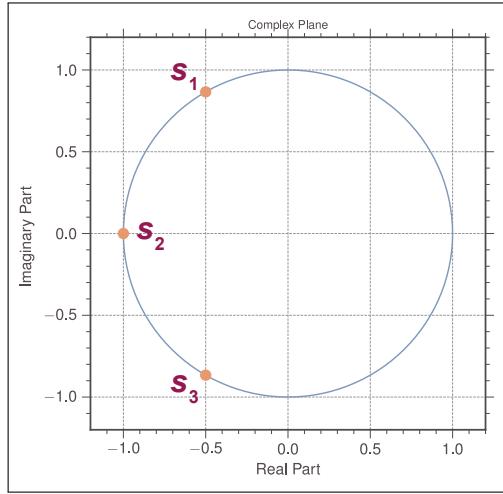


図 7.9. s_n の位置 ($N = 3$)

これより、規格化入力インピーダンス z_{in}^{\pm} は、

$$z_{in}^{\pm} = \frac{(s^3 + 2s^2 + 2s + 1) \pm s^3}{(s^3 + 2s^2 + 2s + 1) \mp s^3} \quad (7.34)$$

これを、終端負荷 1 の梯子型回路で構成しよう。まず、上式の上側符号の z_{in}^+ を連分数展開すると、

$$z_{in}^+ = \frac{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2s + 1} = s + \frac{1}{2s + \frac{1}{s+1}} \quad (7.35)$$

よって、次のような梯子型回路となる。

- 初段：直列素子 $L'_1 = g_1 = 1$
- 2 段目：並列素子 $C'_2 = g_2 = 2$
- 3 段目：直列素子 $L'_3 = g_3 = 1$

一方、下側符号の z_{in}^- では、 $z_{in}^- = \frac{1}{z_{in}^+}$ ゆえ、次のような双対的な梯子型回路でもよい。

- 初段：並列素子 $C'_1 = g_1 = 1$
- 2 段目：直列素子 $L'_2 = g_2 = 2$
- 3 段目：並列素子 $C'_3 = g_3 = 1$

なお、両者とも終端負荷は、

$$R'_4 = G'_4 = g_4 = 1 \quad (7.36)$$

7.5 最平坦特性を持つ低域通過梯子型回路の規格化素子値

低域通過梯子型回路は双対的な次のような回路で表され、 N 次の最平坦特性を有する梯子型リアクタンス回路を合成すると、規格化素子値 g_k は、次のようになる。

$$g_0 = 1 \quad (7.37)$$

$$g_k = 2 \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{2N} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (7.38)$$

$$g_{N+1} = 1 \quad (7.39)$$

ただし、 g_0 は入力の負荷抵抗、 g_{N+1} は終端負荷の抵抗を示す。

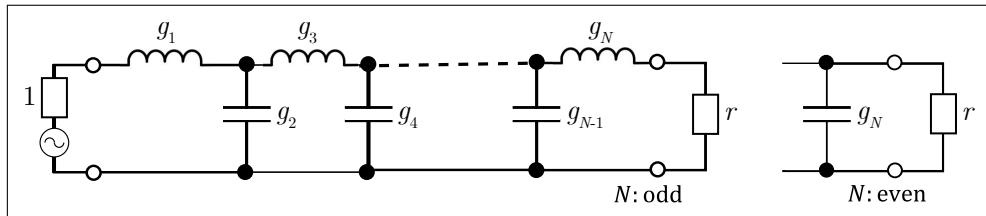


図 7.10. 入力インピーダンス z_{in}^+ により合成した梯子型回路

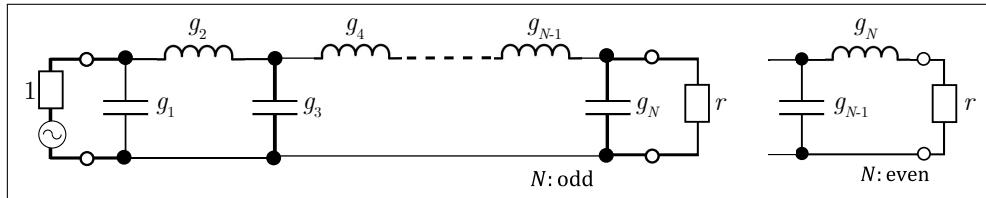


図 7.11. 入力インピーダンス z_{in}^- により合成した梯子型回路

最平坦特性を有する低域通過フィルタの規格化素子値 g_k を求めると次のようになる。

表 7.1 最平坦特性を有する低域通過フィルタの規格化素子値 g_k (最終終端抵抗は $g_{N+1} = 1$)

次数 N	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
1	2	1						
2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1					
3	1	2	1	1				
4	0.7654	1.8478	1.8478	0.7654	1			
5	0.6180	1.6180	2	1.6180	0.6180	1		
6	0.5176	$\sqrt{2}$	1.9318	1.9318	$\sqrt{2}$	0.5176	1	
7	0.4450	1.2470	1.8019	2	1.8019	1.2470	0.4450	1

これより、 $N = 2, 3, 4, 5$ について入力インピーダンス z_{in}^+ で合成した回路の特性を求める
と次のようになる。

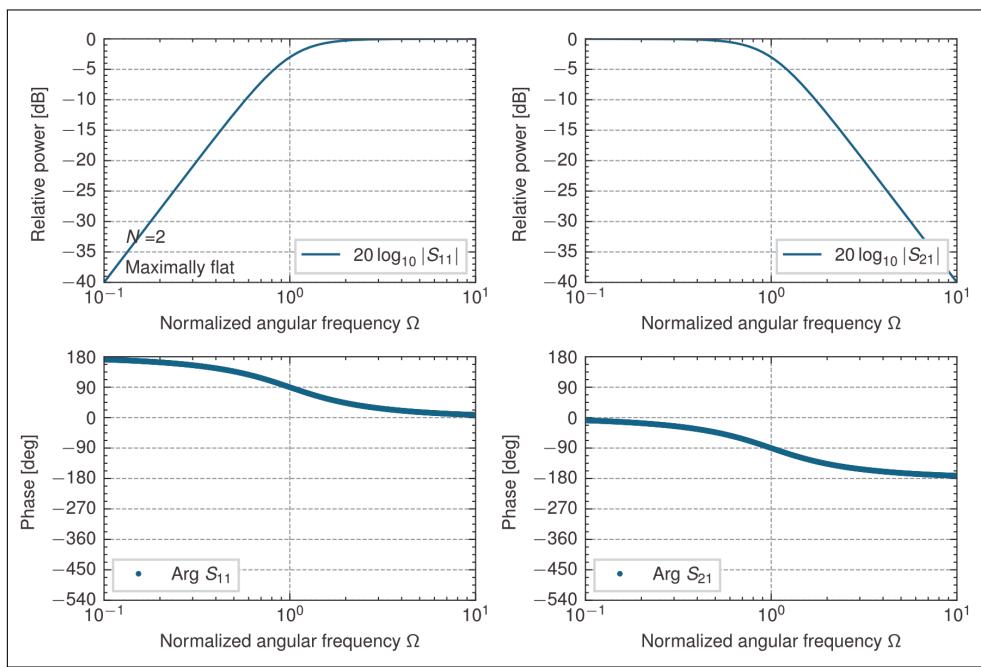


図 7.12. 2段梯子型回路の低域通過特性（入力インピーダンス z_{in}^+ ）

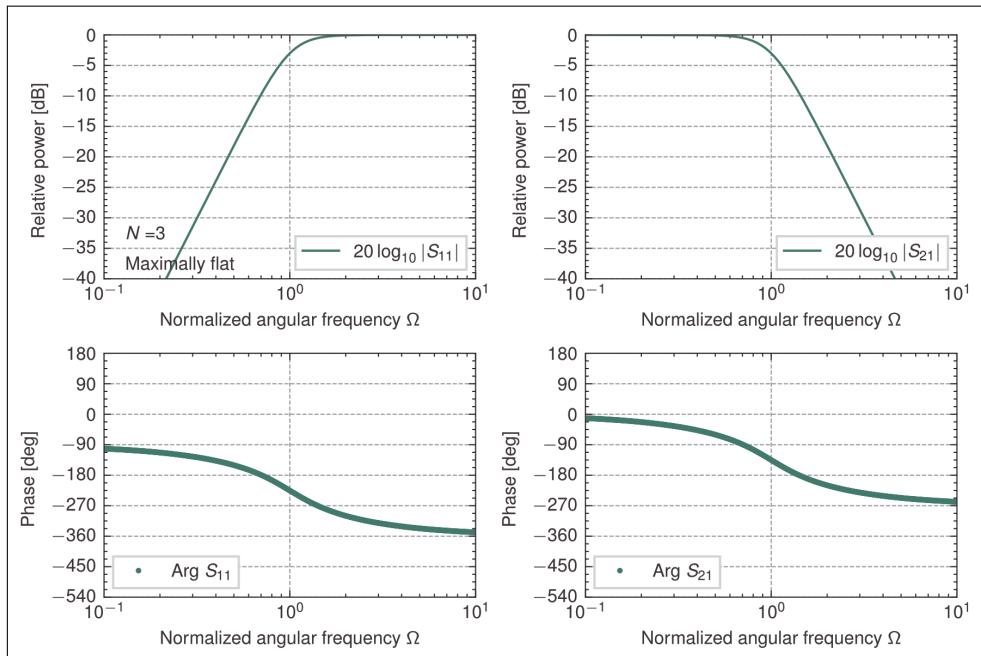


図 7.13. 3段梯子型回路の低域通過特性（入力インピーダンス z_{in}^+ ）

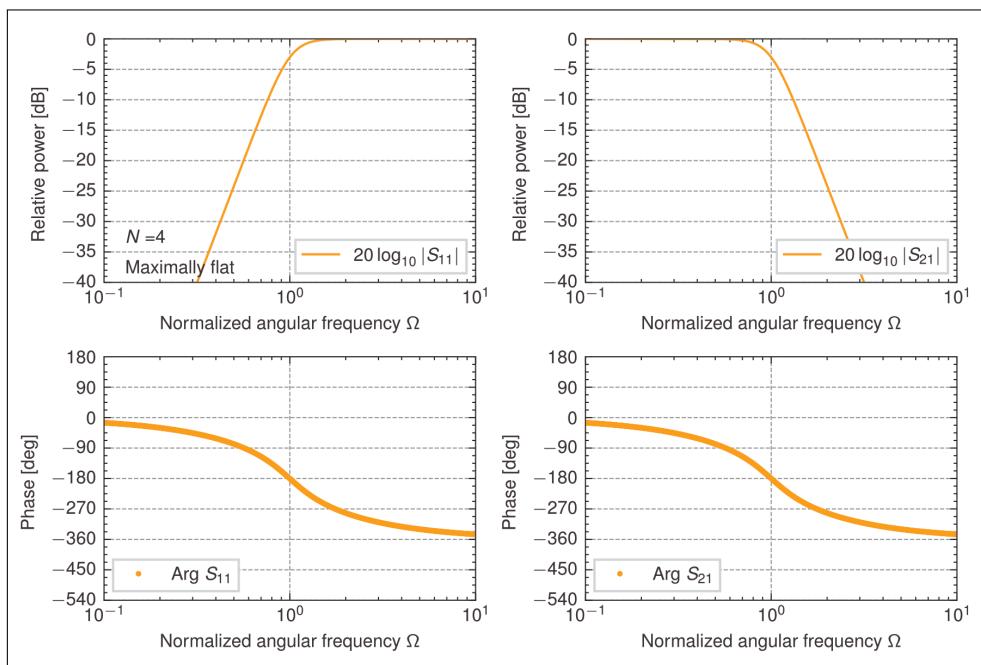


図 7.14. 4段梯子型回路の低域通過特性（入力インピーダンス z_{in}^+ ）

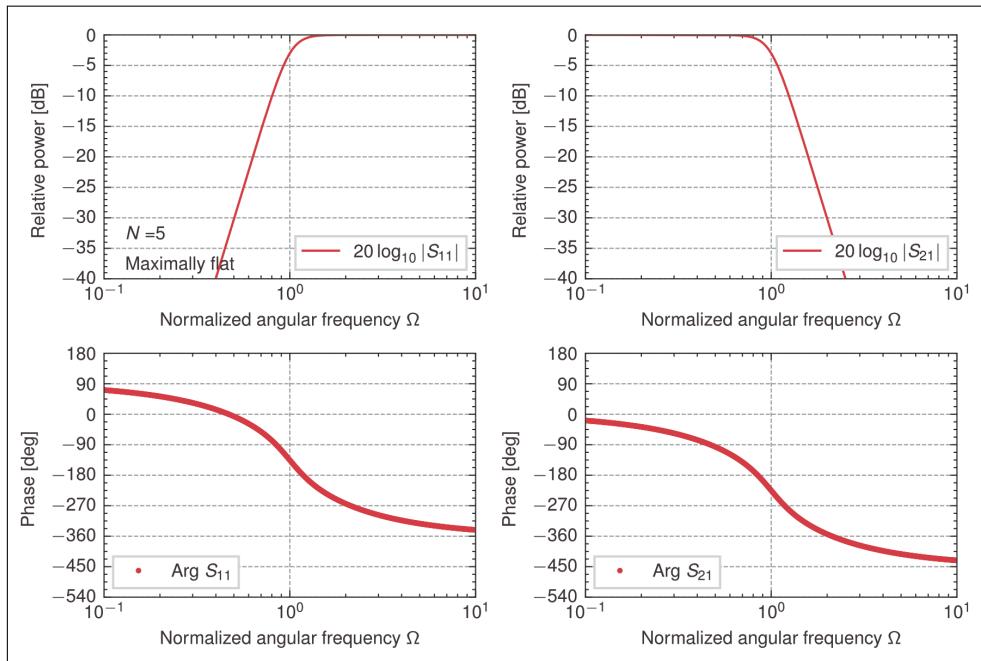


図 7.15. 5段梯子型回路の低域通過特性（入力インピーダンス z_{in}^+ ）

7.6 周波数変換により求めた最平坦特性を持つ高域通過梯子型回路の規格化素子値

高域通過梯子型回路は双対的な次のような回路で表され、 N 次の最平坦特性を有する梯子型リアクタンス回路の規格化素子値 \hat{g}_k は、次のようになる。

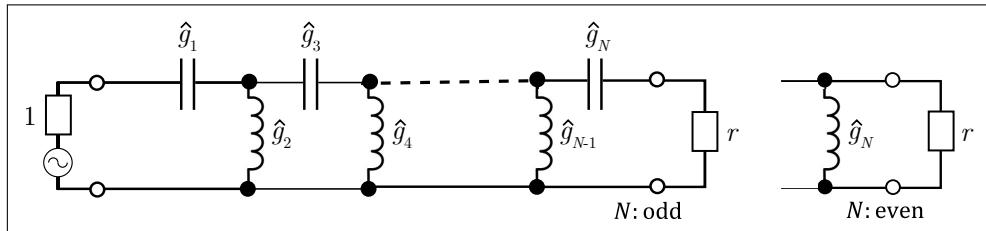


図 7.16. z_{in}^+ により合成した原型低域通過回路を周波数変換した高域通過梯子型回路

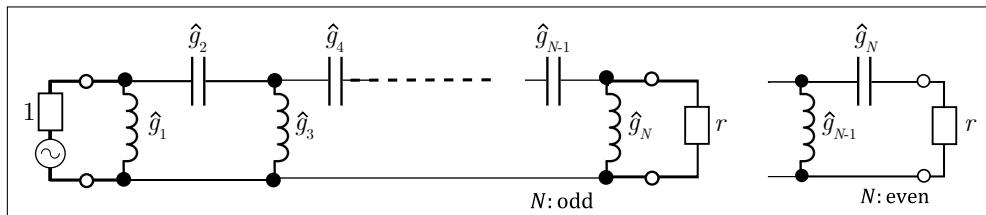


図 7.17. z_{in}^- により合成した原型低域通過回路を周波数変換した高域通過梯子型回路

最平坦特性を有する高域通過フィルタの規格化素子値 \hat{g}_k を求めると次のようになる。ただし、 $g_0 = 1$ 、 $g_{N+1} = 1$ 。これより、 $N = 2, 3, 4, 5$ について入力インピーダンス z_{in}^+ で合成

表 7.2 Butterworth 高域通過フィルタの規格化素子値 \hat{g}_k

次数 N	\hat{g}_1	\hat{g}_2	\hat{g}_3	\hat{g}_4	\hat{g}_5	\hat{g}_6	\hat{g}_7
2	0.7071	0.7071					
3	1.0000	0.5000	1.0000				
4	1.3066	0.5412	0.5412	1.3066			
5	1.6180	0.6180	0.5000	0.6180	1.6180		
6	0.5176	1.4142	1.9319	1.9319	1.4142	0.5176	
7	0.4450	1.2470	1.8019	2.0000	1.8019	1.2470	0.4450

した回路の特性を求めるとき次のようになる。

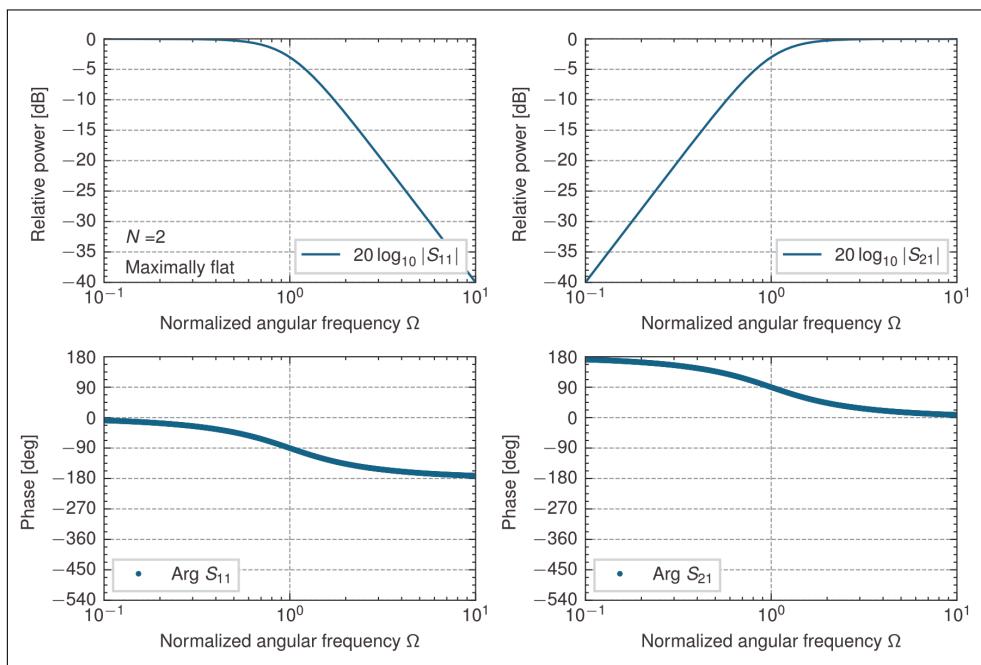


図 7.18. 2段梯子型回路の高域通過特性（入力インピーダンス z_{in}^+ ）

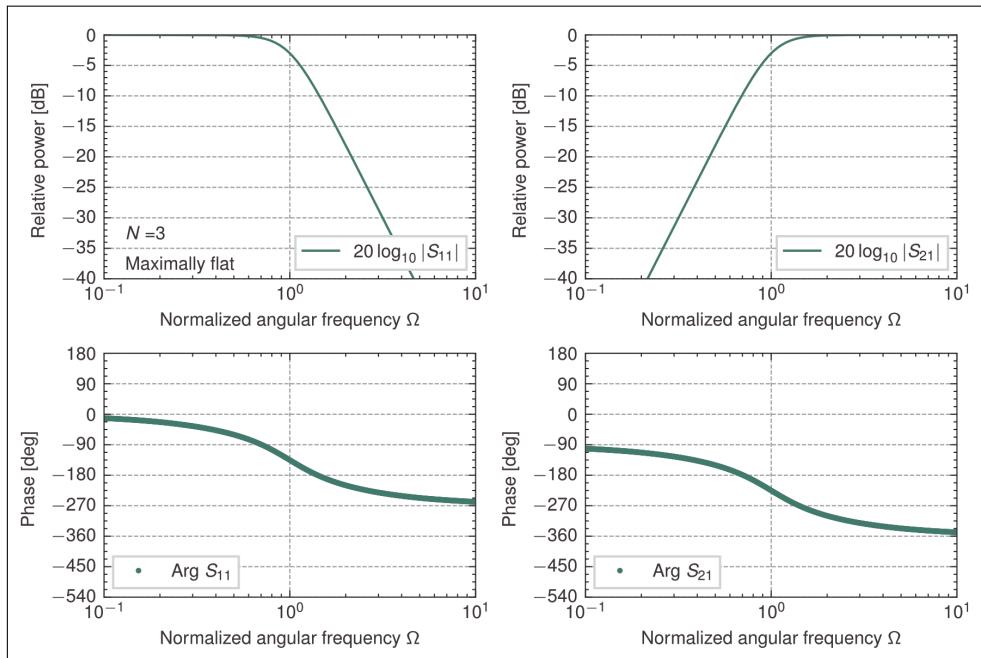


図 7.19. 3段梯子型回路の高域通過特性（入力インピーダンス z_{in}^+ ）

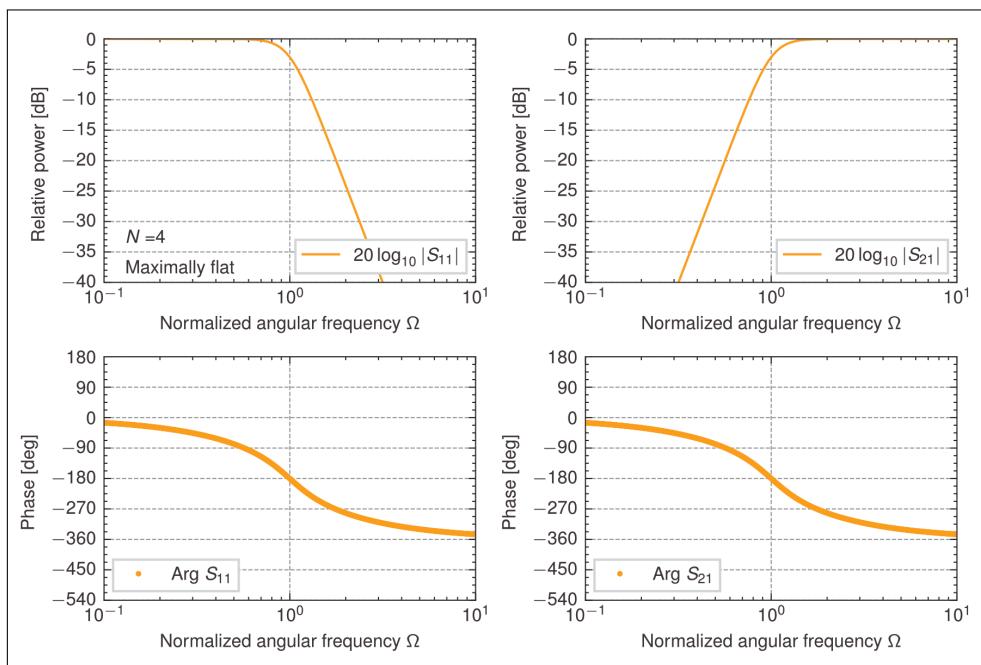


図 7.20. 4段梯子型回路の高域通過特性（入力インピーダンス z_{in}^+ ）

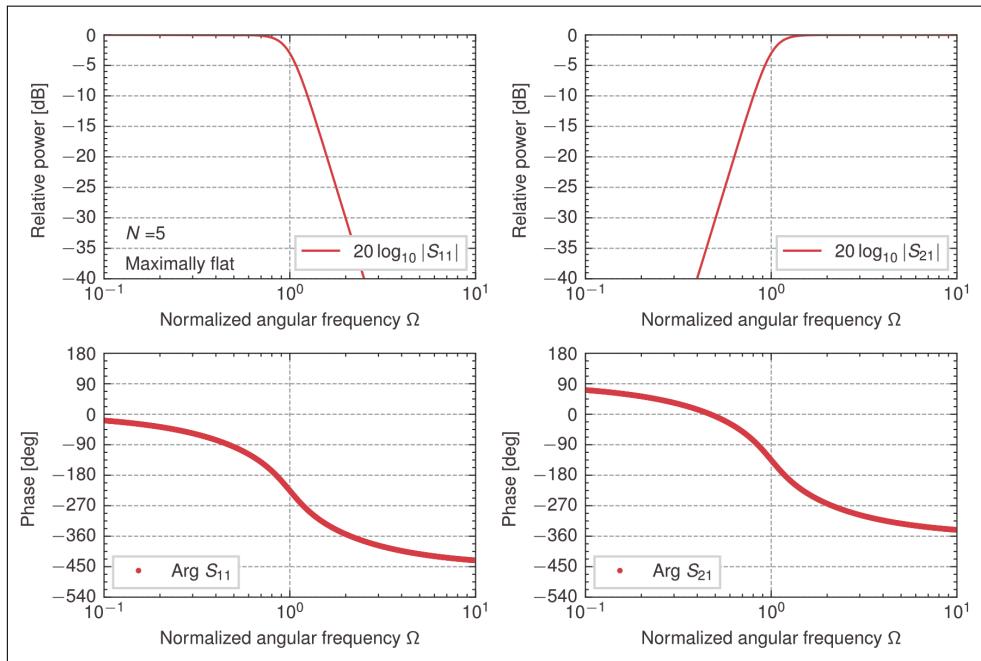


図 7.21. 5段梯子型回路の高域通過特性（入力インピーダンス z_{in}^+ ）

7.7 周波数変換により求めた最平坦特性を持つ帯域通過梯子型回路の規格化素子値

帯域通過フィルタは、原型低域通過フィルタを周波数変換して、

$$s = \frac{1}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right) \quad (7.40)$$

これより、直列素子の正規化インピーダンス z_k は、

$$z_k = sg_k = \frac{g_k}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right) = \hat{s} \frac{g_k}{W} + \frac{1}{\hat{s} \frac{W}{g_k}} \equiv \hat{s} \hat{l}_k + \frac{1}{\hat{s} \hat{c}_k} \quad (7.41)$$

直列接続された規格化インダクタンス \hat{l}_k 、規格化キャパシタンス \hat{c}_k は（直列共振回路）、

$$\hat{l}_k = \frac{g_k}{W} \equiv \hat{g}_k \quad (7.42)$$

$$\hat{c}_k = \frac{W}{g_k} \equiv \hat{g}'_k \quad (7.43)$$

また、並列素子の正規化アドミタンス y_k は、

$$y_k = sg_k = \frac{g_k}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right) = \hat{s} \frac{g_k}{W} + \frac{1}{\hat{s} \frac{W}{g_k}} \equiv \hat{s} \hat{c}_k + \frac{1}{\hat{s} \hat{l}_k} \quad (7.44)$$

並列接続された規格化キャパシタンス \hat{c}_k 、規格化インダクタンス \hat{l}_k は（並列共振回路）、

$$\hat{c}_k = \frac{g_k}{W} \equiv \hat{g}_k \quad (7.45)$$

$$\hat{l}_k = \frac{W}{g_k} \equiv \hat{g}'_k \quad (7.46)$$

したがって、帯域通過梯子型回路は双対的な次のような回路で表される。

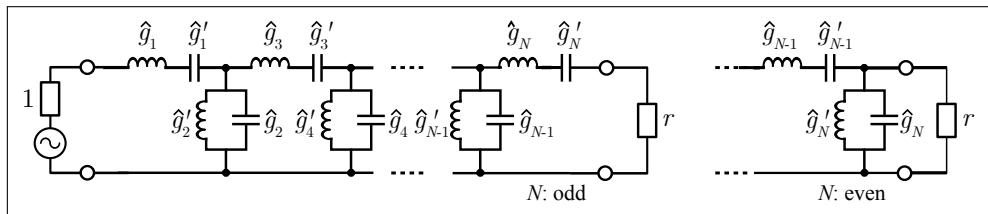


図 7.22. z_{in}^+ により合成した原型低域通過回路を周波数変換した帯域通過梯子型回路

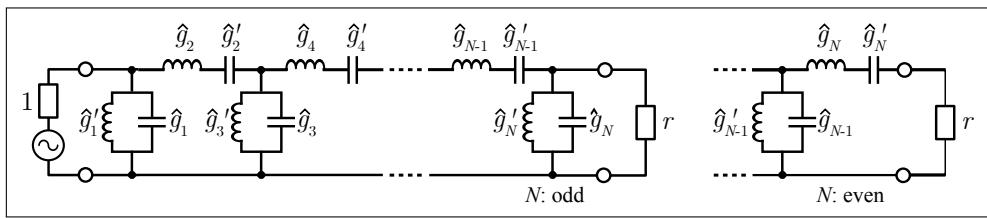


図 7.23. z_{in}^- により合成した原型低域通過回路を周波数変換した帯域通過梯子型回路

最平坦特性を有する帯域通過フィルタ（比帯域 $W = 0.3$ ）の規格化素子値 \hat{g}_k , \hat{g}'_k を求めると次のようになる。ただし, $g_0 = 1$, $g_{N+1} = 1$ 。これより, $N = 2, 3, 4, 5$ について入力イ

表 7.3 Butterworth 帯域通過フィルタ（比帯域 $W = 0.3$ ）の規格化素子値 \hat{g}_k , \hat{g}'_k

次数 N	\hat{g}_1	\hat{g}_2	\hat{g}_3	\hat{g}_4	\hat{g}_5	\hat{g}_6	\hat{g}_7
2	4.7140	4.7140					
	0.2121	0.2121					
3	3.3333	6.6667	3.3333				
	0.3000	0.1500	0.3000				
4	2.5512	6.1592	6.1592	2.5512			
	0.3920	0.1624	0.1624	0.3920			
5	2.0601	5.3934	6.6667	5.3934	2.0601		
	0.4854	0.1854	0.1500	0.1854	0.4854		
6	1.7255	4.7140	6.4395	6.4395	4.7140	1.7255	
	0.5796	0.2121	0.1553	0.1553	0.2121	0.5796	
7	1.4835	4.1566	6.0065	6.6667	6.0065	4.1566	1.4835
	0.6741	0.2406	0.1665	0.1500	0.1665	0.2406	0.6741

ンピーダンス z_{in}^+ で合成した回路の特性を求めるとき次のようになる。

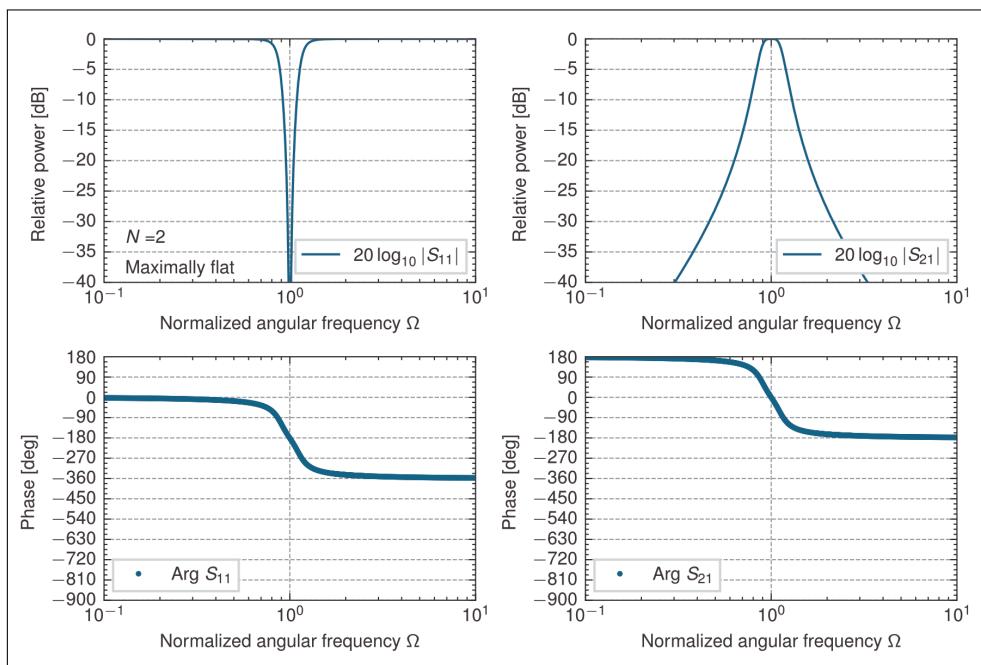


図 7.24. 2段梯子型回路の帯域通過特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

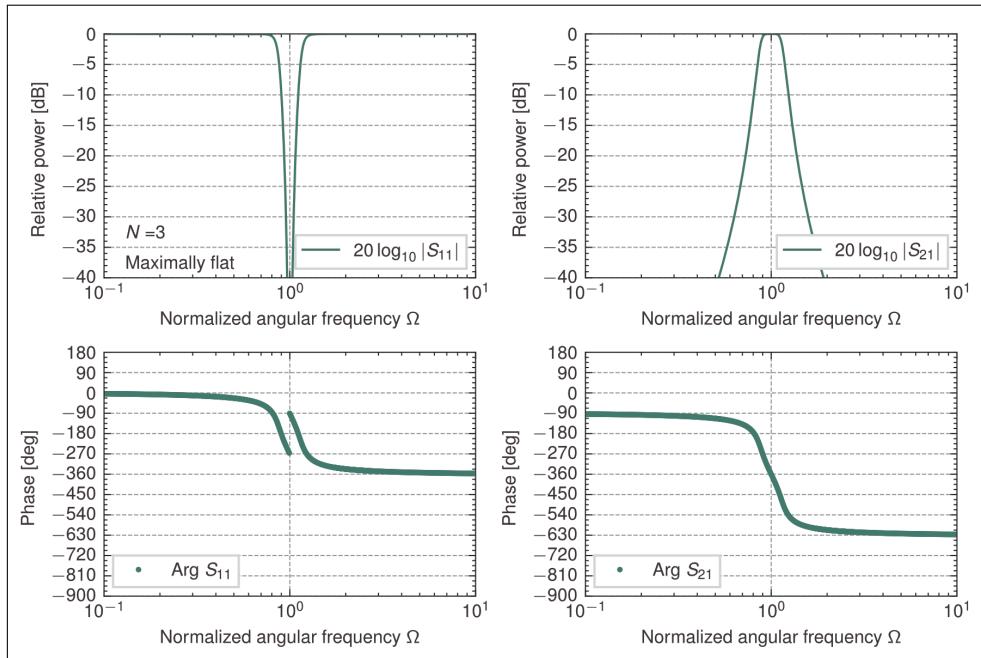


図 7.25. 3段梯子型回路の帯域通過特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

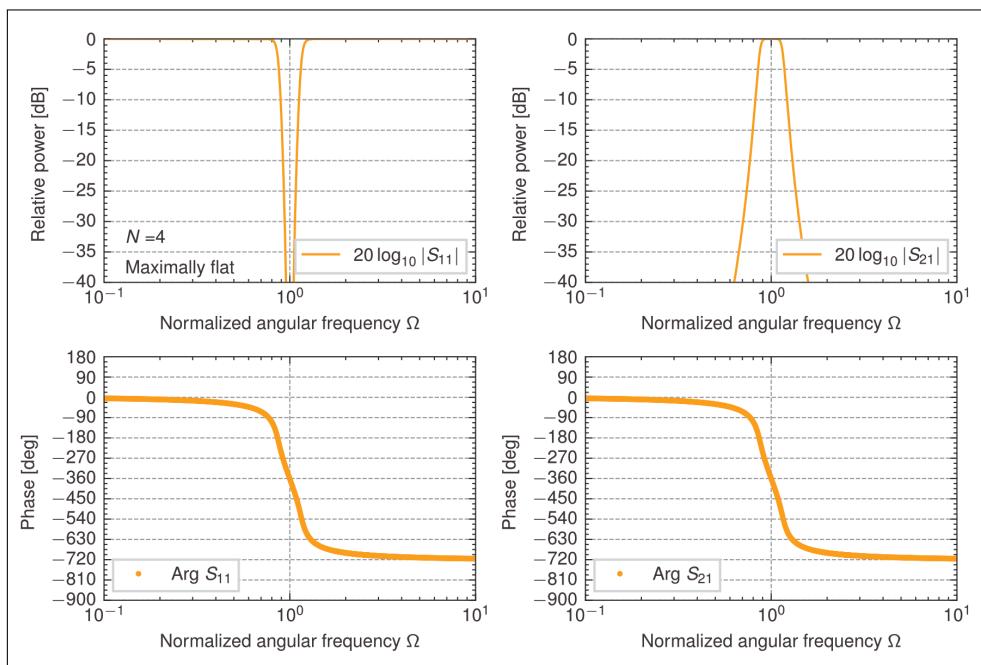


図 7.26. 4段梯子型回路の帯域通過特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

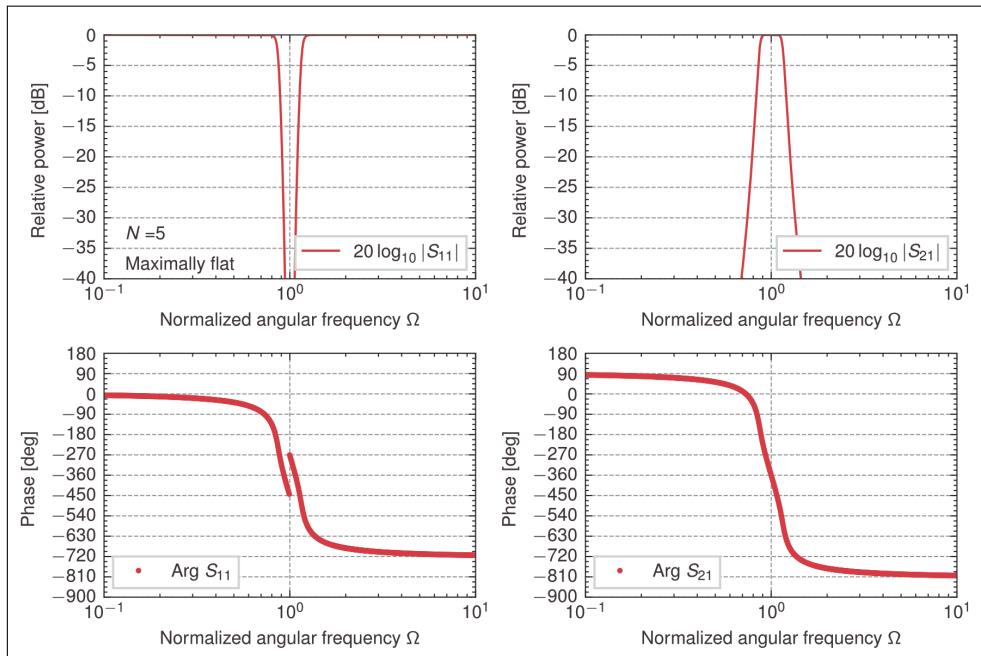


図 7.27. 5段梯子型回路の帯域通過特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

7.8 周波数変換により求めた最平坦特性を持つ帯域阻止梯子型回路の規格化素子値

帯域阻止フィルタは、周波数変換より、

$$s = \frac{1}{\frac{1}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right)} \quad (7.47)$$

これより、直列素子の正規化インピーダンス z_k は、

$$z_k = sg_k = \frac{g_k}{\frac{1}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right)} = \frac{1}{\hat{s} \frac{1}{Wg_k} + \frac{1}{\hat{s}Wg_k}} \equiv \frac{1}{\hat{s}\hat{c}_k + \frac{1}{\hat{s}\hat{l}_k}} = \frac{1}{\hat{y}_k} \quad (7.48)$$

並列接続された規格化キャパシタンス \hat{c}_k 、規格化インダクタンス \hat{l}_k は（並列共振回路）、

$$\hat{c}_k = \frac{1}{Wg_k} \equiv \hat{g}_k \quad (7.49)$$

$$\hat{l}_k = Wg_k \equiv \hat{g}'_k \quad (7.50)$$

また、並列素子の正規化アドミタンス y_k は、

$$y_k = sg_k = \frac{g_k}{\frac{1}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right)} = \frac{1}{\hat{s} \frac{1}{Wg_k} + \frac{1}{\hat{s}Wg_k}} \equiv \frac{1}{\hat{s}\hat{l}_k + \frac{1}{\hat{s}\hat{c}_k}} = \frac{1}{\hat{z}_k} \quad (7.51)$$

直列接続された規格化キャパシタンス \hat{l}_k 、規格化インダクタンス \hat{c}_k は（直列共振回路）、

$$\hat{l}_k = \frac{1}{Wg_k} \equiv \hat{g}_k \quad (7.52)$$

$$\hat{c}_k = Wg_k \equiv \hat{g}'_k \quad (7.53)$$

したがって、帯域阻止梯子型回路は双対的な次のような回路で表される。

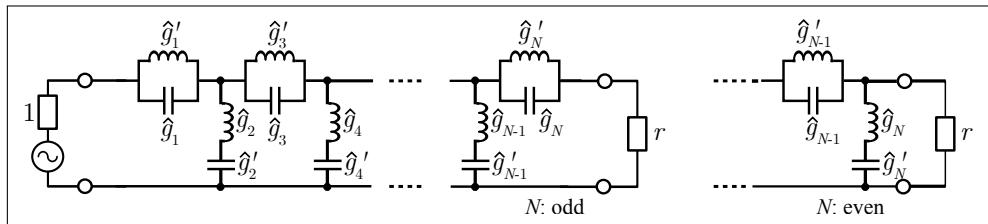


図 7.28. z_{in}^+ により合成した原型低域通過回路を周波数変換した帯域阻止梯子型回路

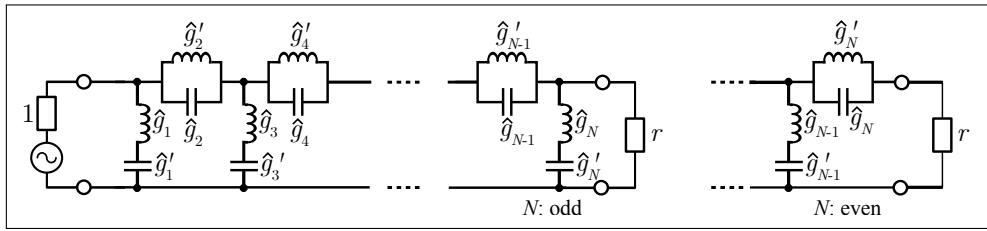


図 7.29. z_{in}^- により合成した原型低域通過回路を周波数変換した帯域阻止梯子型回路

最平坦特性を有する帯域阻止フィルタ（比帯域 $W = 0.3$ ）の規格化素子値 \hat{g}_k , \hat{g}'_k を求めると次のようになる。ただし, $g_0 = 1$, $g_{N+1} = 1$ 。これより, $N = 2, 3, 4, 5$ について

表 7.4 Butterworth 帯域阻止フィルタ（比帯域 $W = 0.3$ ）の規格化素子値 \hat{g}_k , \hat{g}'_k

次数 N	\hat{g}_1	\hat{g}_2	\hat{g}_3	\hat{g}_4	\hat{g}_5	\hat{g}_6	\hat{g}_7
2	2.3570	2.3570					
	0.4243	0.4243					
3	3.3333	1.6667	3.3333				
	0.3000	0.6000	0.3000				
4	4.3552	1.8040	1.8040	4.3552			
	0.2296	0.5543	0.5543	0.2296			
5	5.3934	2.0601	1.6667	2.0601	5.3934		
	0.1854	0.4854	0.6000	0.4854	0.1854		
6	6.4395	2.3570	1.7255	1.7255	2.3570	6.4395	
	0.1553	0.4243	0.5796	0.5796	0.4243	0.1553	
7	7.4899	2.6731	1.8499	1.6667	1.8499	2.6731	7.4899
	0.1335	0.3741	0.5406	0.6000	0.5406	0.3741	0.1335

て入力インピーダンス z_{in}^+ で合成した回路の特性を求めるときのようになる。

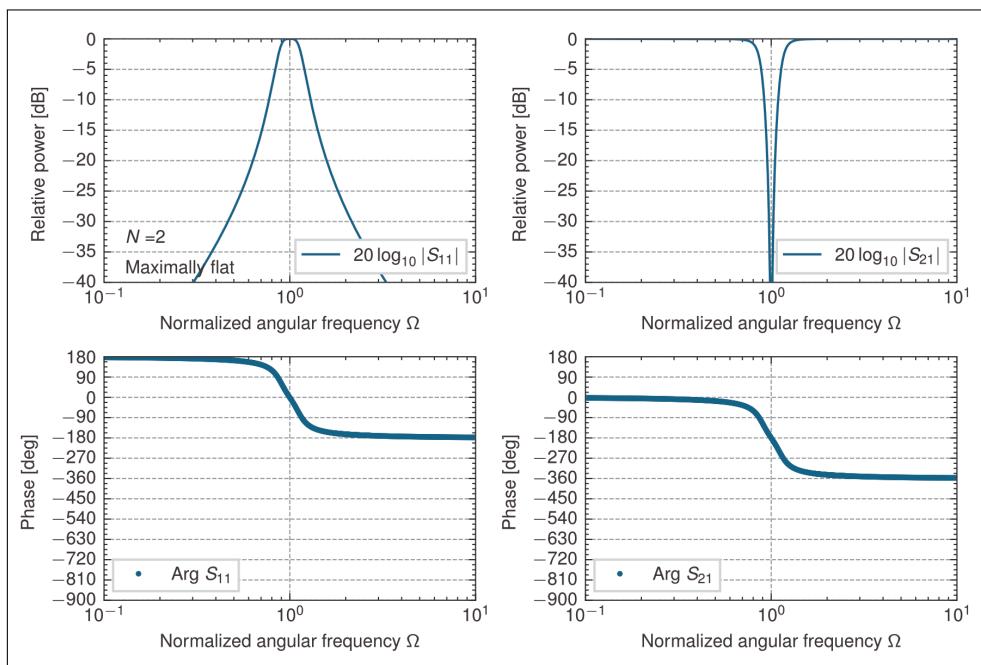


図 7.30. 2段梯子型回路の帯域阻止特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

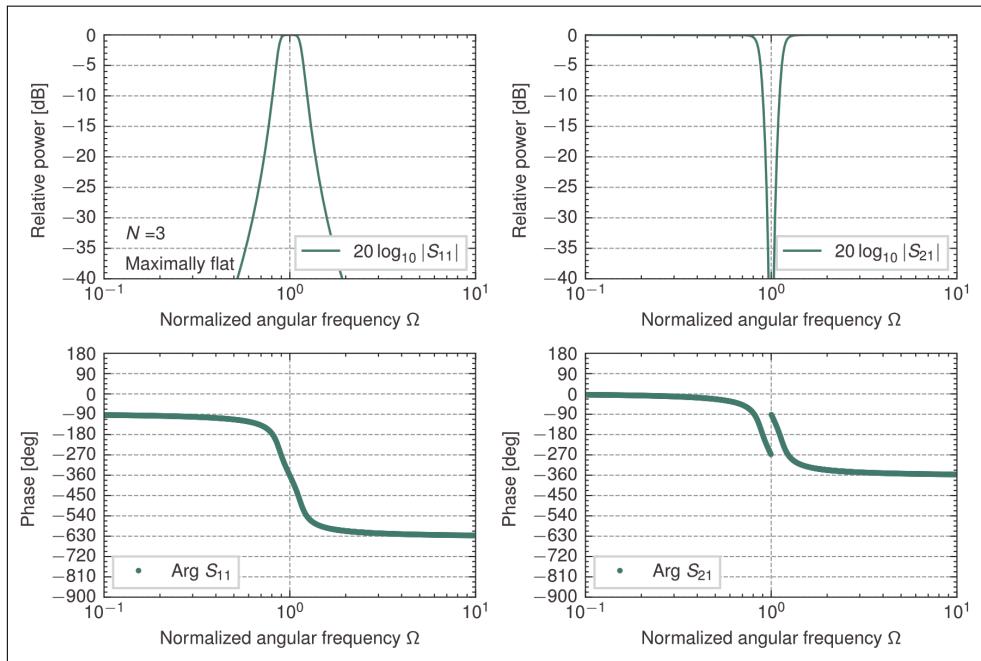


図 7.31. 3段梯子型回路の帯域阻止特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

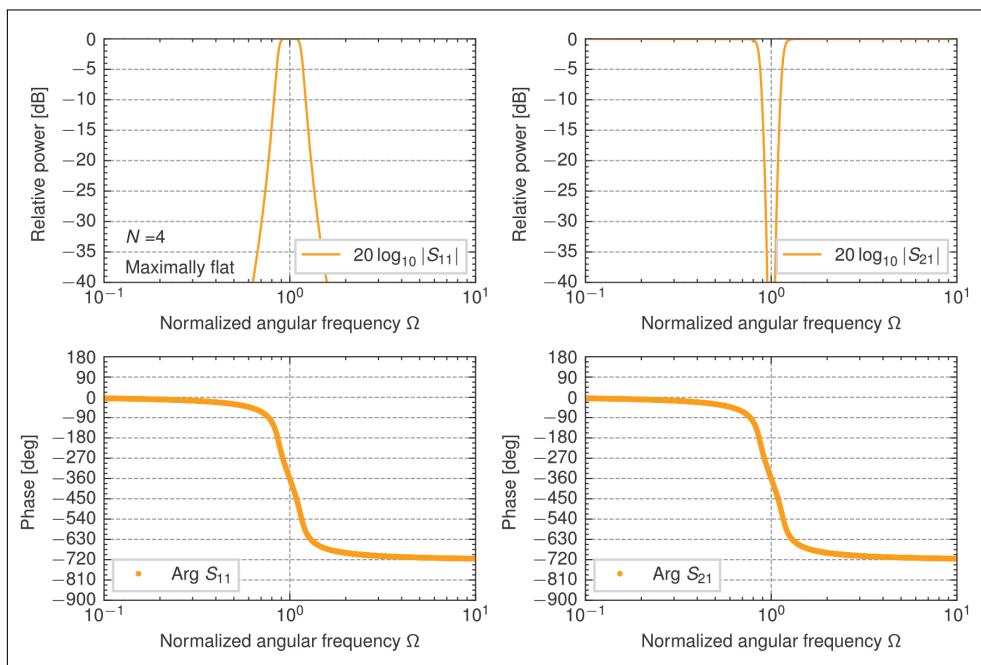


図 7.32. 4段梯子型回路の帯域阻止特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

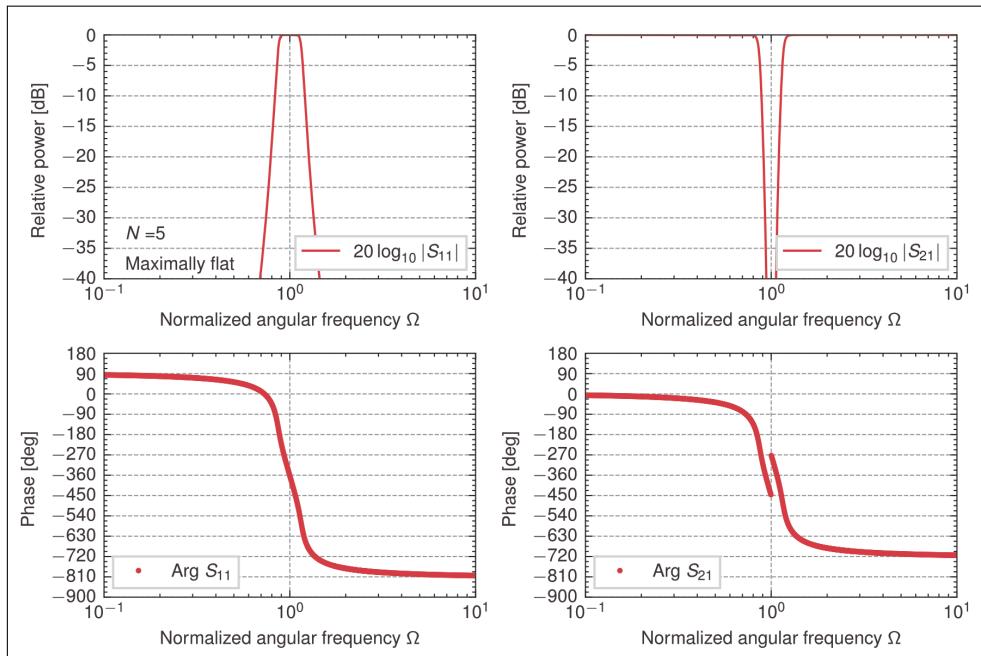


図 7.33. 5段梯子型回路の帯域阻止特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

7.9 最平坦特性を有する低域通過梯子型回路の規格化素子値の導出

最平坦特性の低域通過梯子型回路の規格化素子値の導出^{*1}を示そう。

最平坦特性の特性関数 $K(s) = s^N$ より、動作伝送関数 $H(s)$ は、

$$H(s) = \prod_{n=1}^N (s - j\epsilon^{2n-1}) \quad (7.54)$$

まず、

$$\epsilon \equiv e^{j\frac{\pi}{2N}} \quad (7.55)$$

とおき、次式を求めておく。

$$\epsilon^{\pm N} = \left(e^{j\frac{\pi}{2N}}\right)^{\pm N} = e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j \quad (7.56)$$

$$\epsilon^{\pm 2N} = \left(e^{j\frac{\pi}{2N}}\right)^{\pm 2N} = e^{\pm j\pi} = -1 \quad (7.57)$$

ここで、 $s \rightarrow \epsilon^2 s$ とした式を考えると、

$$\begin{aligned} H(\epsilon^2 s) &= \prod_{n=1}^N (\epsilon^2 s - j\epsilon^{2n-1}) = \prod_{n=1}^N \epsilon^2 (s - j\epsilon^{2n-3}) = \epsilon^{2N} \prod_{n'=0}^{N-1} (s - j\epsilon^{2n'-1}) \\ &= - \prod_{n=0}^{N-1} (s - j\epsilon^{2n-1}) \end{aligned} \quad (7.58)$$

これに $n = N$ の項を乗じると、

$$\begin{aligned} H(\epsilon^2 s) \cdot (s - j\epsilon^{2N-1}) &= H(\epsilon^2 s) \cdot (s + j\epsilon^{-1}) = -(s - j\epsilon^{2N-1}) \prod_{n=0}^{N-1} (s - j\epsilon^{2n-1}) \\ &= - \prod_{n=0}^N (s - j\epsilon^{2n-1}) \end{aligned} \quad (7.59)$$

上式の初項 ($n = 0$ の項) を分離して、

$$\begin{aligned} - \prod_{n=0}^N (s - j\epsilon^{2n-1}) &= -(s - j\epsilon^{-1}) \prod_{n=1}^N (s - j\epsilon^{2n-1}) \\ &= -(s - j\epsilon^{-1}) H(s) \end{aligned} \quad (7.60)$$

よって、次の関係が得られる。

$$-(s - j\epsilon^{-1}) H(s) = (s + j\epsilon^{-1}) H(\epsilon^2 s) \quad (7.61)$$

^{*1} 高橋秀俊, “Tschebyscheff 特性を有する梯子型ろ波器について,” 電気通信学会雑誌, vol.34, no.2, pp.65-74 (1951).

また, 級数展開した形を考え ($A_0 = 1$),

$$H(s) \equiv \sum_{i=0}^N A_i s^{N-i} \quad (7.62)$$

とおき, これについても $s \rightarrow \epsilon^2 s$ とした式を考えると,

$$H(\epsilon^2 s) = \sum_{i=0}^N A_i (\epsilon^2 s)^{N-i} = - \sum_{i=0}^N A_i \epsilon^{-2i} s^{N-i} \quad (7.63)$$

これらを上で求めた関係式に代入し,

$$(s - j\epsilon^{-1}) \sum_{i=0}^N A_i s^{N-i} = (s + j\epsilon^{-1}) \sum_{i=0}^N A_i \epsilon^{-2i} s^{N-i} \quad (7.64)$$

s について整理していくと,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N (1 - \epsilon^{-2i}) A_i s^{N-i+1} &= \sum_{i'=-1}^{N-1} (1 - \epsilon^{-2(i'+1)}) A_{i'+1} s^{N-i'} \\ &= j\epsilon^{-1} \sum_{i=0}^N (1 + \epsilon^{-2i}) A_i s^{N-i} \end{aligned} \quad (7.65)$$

そして, s について係数比較して,

$$(1 - \epsilon^{-2(i+1)}) A_{i+1} = j\epsilon^{-1} (1 + \epsilon^{-2i}) A_i \quad (7.66)$$

これより,

$$\begin{aligned} \frac{A_{i+1}}{A_i} &= \frac{j\epsilon^{-1}(1 + \epsilon^{-2i})}{1 - \epsilon^{-2(i+1)}} = \frac{j\epsilon^{-1}\epsilon^{-i}(\epsilon^i + \epsilon^{-i})}{\epsilon^{-(i+1)}(\epsilon^{i+1} - \epsilon^{-(i+1)})} = \frac{j(\epsilon^i + \epsilon^{-i})}{\epsilon^{i+1} - \epsilon^{-(i+1)}} \\ &= \frac{j2\cos\left(\frac{i\pi}{2N}\right)}{j\sin\left(\frac{(i+1)\pi}{2N}\right)} \end{aligned} \quad (7.67)$$

ここで,

$$\bar{s}_i \equiv 2\sin\left(\frac{i\pi}{2N}\right) \quad (7.68)$$

$$\bar{c}_i \equiv 2\cos\left(\frac{i\pi}{2N}\right) \quad (7.69)$$

とおくと,

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{\bar{c}_i}{\bar{s}_{i+1}} \quad (7.70)$$

ただし, $A_0 = 1$ とえ,

$$A_1 = A_0 \frac{\bar{c}_0}{\bar{s}_1} = \frac{\bar{c}_0}{\bar{s}_1} \quad (7.71)$$

$$A_2 = A_1 \frac{\bar{c}_1}{\bar{s}_2} = \frac{\bar{c}_0 \bar{c}_1}{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \quad (7.72)$$

.....

$$A_i = A_{i-1} \frac{\bar{c}_i}{\bar{s}_{i-1}} = \frac{\bar{c}_0 \bar{c}_1 \cdots \bar{c}_{i-1}}{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \cdots \bar{s}_i}, \quad \cdots \quad (7.73)$$

ここで,

$$\bar{s}_0 = 0, \quad \bar{s}_i = -\bar{s}_{-i} = \bar{s}_{2N-i}, \quad \bar{s}_N = 2 \quad (7.74)$$

$$\bar{c}_0 = 2, \quad \bar{c}_i = \bar{c}_{-i} = \bar{s}_{N-i}, \quad \bar{c}_N = 0 \quad (7.75)$$

さらに, 加法定理等で得られる関係式を整理しておく.

$$2\bar{s}_{i\pm j} = \bar{s}_i \bar{c}_j \pm \bar{c}_i \bar{s}_j, \quad \bar{s}_{2i} = \bar{s}_i \bar{c}_i \quad (7.76)$$

$$2\bar{c}_{i\pm j} = \bar{c}_i \bar{c}_j \mp \bar{s}_i \bar{s}_j, \quad \bar{c}_{2i} = \bar{c}_i^2 - \bar{s}_i^2 \quad (7.77)$$

また,

$$\bar{s}_i \bar{c}_j = \bar{s}_{i+j} + \bar{s}_{i-j} \quad (7.78)$$

$$\bar{c}_i \bar{s}_j = \bar{s}_{i+j} - \bar{s}_{i-j} \quad (7.79)$$

$$\bar{c}_i \bar{c}_j = \bar{c}_{i+j} - \bar{c}_{i-j} \quad (7.80)$$

$$\bar{s}_i \bar{s}_j = -\bar{c}_{i+j} + \bar{c}_{i-j} \quad (7.81)$$

これらより,

$$\begin{aligned} \bar{s}_i \bar{s}_{i+1} - \bar{s}_1 \bar{s}_{2i} &= -\bar{c}_{2i+1} + \bar{c}_{-1} - (-\bar{c}_{1+2i} + \bar{c}_{1-2i}) = \bar{c}_{-1} - \bar{c}_{2i-1} \\ &= -\bar{c}_{(i-1)+i} + \bar{c}_{(i-1)-i} = \bar{s}_{i-1} \bar{s}_i \end{aligned} \quad (7.82)$$

$$\begin{aligned} \bar{s}_i \bar{s}_{i+1} - \bar{s}_3 \bar{s}_{2i-2} &= -\bar{c}_{2i+1} + \bar{c}_{-1} - (-\bar{c}_{1+2i} + \bar{c}_{5-2i}) = \bar{c}_{-1} - \bar{c}_{2i-5} \\ &= -\bar{c}_{(i-3)+(i-2)} + \bar{c}_{(i-3)-(i-2)} = \bar{s}_{i-3} \bar{s}_{i-2} \end{aligned} \quad (7.83)$$

さらに,

$$\begin{aligned} \bar{s}_i \bar{s}_{i+1} - \bar{s}_j \bar{s}_{2i-(j-1)} &= -\bar{c}_{2i+1} + \bar{c}_{-1} - (-\bar{c}_{1+2i} + \bar{c}_{5-2i}) = \bar{c}_{-1} - \bar{c}_{2i-5} \\ &= -\bar{c}_{(i-3)+(i-2)} + \bar{c}_{(i-3)-(i-2)} = \bar{s}_{i-3} \bar{s}_{i-2} \end{aligned} \quad (7.84)$$

A_i について再記して,

$$A_1 = \frac{2}{\bar{s}_1} \quad (7.85)$$

$$A_2 = \frac{2\bar{s}_2}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2} \quad (7.86)$$

$$A_3 = \frac{2\bar{s}_2 \bar{s}_4}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3} \quad (7.87)$$

.....

$$A_i = \frac{2\bar{s}_2 \bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-2}}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-1}^2 \bar{s}_i} \quad (7.88)$$

.....

規格化入力インピーダンス z_{in} を次のように連分数展開して、梯子型回路を求めていく。

$$z_{in}(s) = g_1 s + \frac{1}{g_2 s + \frac{1}{g_3 s + \frac{1}{g_4 s + \cdots}}} \quad (7.89)$$

ただし、 g_k ($k = 1, 2, \dots, N$) は梯子型回路の規格化素子値、 N は素子数 (段数)、 r は終端負荷を示し、次のような関係式が得られる。

$$z_{in} \equiv \frac{P_0(s)}{P_1(s)} = g_1 s + \frac{1}{\frac{P_1(s)}{P_2(s)}} \quad (7.90)$$

$$\frac{P_1(s)}{P_2(s)} = g_2 s + \frac{1}{\frac{P_2(s)}{P_3(s)}} \quad (7.91)$$

.....

$$\frac{P_{k-1}(s)}{P_k(s)} = g_k s + \frac{1}{\frac{P_k(s)}{P_{k+1}(s)}} \quad (7.93)$$

.....

$$\frac{P_{N-1}(s)}{P_N(s)} = g_N s + r \quad (7.95)$$

あるいは、

$$P_0 = g_1 s P_1 + P_2 \quad (7.96)$$

$$P_1 = g_2 s P_2 + P_3 \quad (7.97)$$

.....

$$P_{k-1} = g_k s P_k + P_{k+1}, \quad \cdots \quad (7.98)$$

ここで、

$$P_0(s) \equiv S(s) \pm K(s) \quad (7.99)$$

$$P_1(s) \equiv S(s) \mp K(s) \quad (7.100)$$

これらの式より, P_2 , P_3 , \dots と順次, 次数の低い多項式になるように g_1 , g_2 , \dots , g_k , \dots を決めていければよい。まず, $P_0(s)$ は,

$$\begin{aligned} P_0(s) &= S(s) + s^N = (A_0 + 1)s^N + \sum_{i=1}^N A_i s^{N-i} \\ &= 2s^N + \frac{2}{\bar{s}_1} s^{N-1} + \frac{2\bar{s}_2}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2} s^{N-2} + \frac{2\bar{s}_2 \bar{s}_4}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3} s^{N-3} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{2\bar{s}_2 \bar{s}_4 \dots \bar{s}_{2i-2}}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \dots \bar{s}_{i-1}^2 \bar{s}_i} s^{N-i} + \dots \end{aligned} \quad (7.101)$$

次に, $P_1(s)$ は,

$$\begin{aligned} P_1(s) &= S(s) - s^N = \sum_{i=1}^N A_i s^{N-i} \\ &= \frac{2}{\bar{s}_1} s^{N-1} + \frac{2\bar{s}_2}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2} s^{N-2} + \frac{2\bar{s}_2 \bar{s}_4}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3} s^{N-3} + \dots + \frac{2\bar{s}_2 \bar{s}_4 \dots \bar{s}_{2i-2}}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \dots \bar{s}_{i-1}^2 \bar{s}_i} s^{N-i} + \dots \end{aligned} \quad (7.102)$$

ここで,

$$P_0(s) = g_1 s P_1(s) + P_2(s) \quad (7.103)$$

より, g_1 を,

$$g_1 = \frac{P_0(s) \text{の最高次 } N \text{ の係数}}{P_1(s) \text{の最高次 } N-1 \text{ の係数}} = \frac{A_0 + 1}{A_1} = \frac{1 + 1}{\frac{2}{\bar{s}_1}} = \bar{s}_1 \quad (7.104)$$

とすれば, $P_2(s)$ の s^N の係数はゼロとなる。これより,

$$\begin{aligned} P_2(s) &= P_0(s) - \bar{s}_1 s P_1(s) \\ &= (A_1 - \bar{s}_1 A_2) s^{N-1} + (A_2 - \bar{s}_1 A_3) s^{N-2} + \dots + (A_i - \bar{s}_1 A_{i+1}) s^{N-i} + \dots \end{aligned} \quad (7.105)$$

ここで,

$$A_1 - \bar{s}_1 A_2 = \frac{2}{\bar{s}_1} - \bar{s}_1 \frac{2\bar{s}_2}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2} = 0 \quad (7.106)$$

$$\begin{aligned} A_2 - \bar{s}_1 A_3 &= \frac{2\bar{s}_2}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2} - \bar{s}_1 \frac{2\bar{s}_2 \bar{s}_4}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3} = \frac{2\bar{s}_2}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3} (\bar{s}_2 \bar{s}_3 - \bar{s}_1 \bar{s}_4) = \frac{2\bar{s}_2}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3} \bar{s}_1 \bar{s}_2 \\ &= \frac{2\bar{s}_2}{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3} \end{aligned} \quad (7.107)$$

さらに,

$$\begin{aligned} A_3 - \bar{s}_1 A_4 &= \frac{2\bar{s}_2 \bar{s}_4}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3} - \bar{s}_1 \frac{2\bar{s}_2 \bar{s}_4 \bar{s}_6}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3^2 \bar{s}_4} = \frac{2\bar{s}_2 \bar{s}_4}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3^2 \bar{s}_4} (\bar{s}_3 \bar{s}_4 - \bar{s}_1 \bar{s}_6) = \frac{2\bar{s}_2 \bar{s}_4}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2^2 \bar{s}_3^2 \bar{s}_4} \bar{s}_2 \bar{s}_3 \\ &= \frac{2\bar{s}_2 \bar{s}_4}{\bar{s}_1^2 \bar{s}_2 \bar{s}_3 \bar{s}_4} \end{aligned} \quad (7.108)$$

また,

$$\begin{aligned}
A_i - \bar{s}_1 A_{i+1} &= \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-2}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-1}^2\bar{s}_i} - \bar{s}_1 \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-2}\bar{s}_{2i}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-1}^2\bar{s}_i^2\bar{s}_{i+1}} \\
&= \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-2}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-1}^2\bar{s}_i^2\bar{s}_{i+1}} (\bar{s}_i\bar{s}_{i+1} - \bar{s}_1\bar{s}_{2i}) \\
&= \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-2}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-1}^2\bar{s}_i^2\bar{s}_{i+1}} \bar{s}_{i-1}\bar{s}_i \\
&= \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-2}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-2}^2\bar{s}_{i-1}\bar{s}_i\bar{s}_{i+1}}
\end{aligned} \tag{7.109}$$

よって, $P_2(s)$ は,

$$P_2(s) = \frac{2\bar{s}_2}{\bar{s}_1\bar{s}_2\bar{s}_3}s^{N-2} + \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2\bar{s}_3\bar{s}_4}s^{N-3} + \cdots + \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-2}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-2}^2\bar{s}_{i-1}\bar{s}_i\bar{s}_{i+1}}s^{N-i} + \cdots \tag{7.110}$$

次に,

$$P_1(s) = g_2 s P_2(s) + P_3(s) \tag{7.111}$$

これより, g_2 を,

$$g_2 = \frac{P_1(s) \text{の最高次 } N-1 \text{ の係数}}{P_2(s) \text{の最高次 } N-2 \text{ の係数}} = \frac{\frac{2}{\bar{s}_1}}{\frac{2\bar{s}_2}{\bar{s}_1\bar{s}_2\bar{s}_3}} = \bar{s}_3 \tag{7.112}$$

とすれば, $P_3(s)$ の s^{N-1} の係数はゼロとなる. これより,

$$\begin{aligned}
P_3(s) &= P_1(s) - \bar{s}_3 s P_2(s) \\
&= A_2 s^{N-2} + \cdots + A_{i-1} s^{N-(i-1)} + \cdots \\
&\quad - \bar{s}_3 \left(\frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2\bar{s}_3\bar{s}_4} s^{N-2} + \cdots + \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-2}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-2}^2\bar{s}_{i-1}\bar{s}_i\bar{s}_{i+1}} s^{N-i+1} + \cdots \right)
\end{aligned} \tag{7.113}$$

ここで,

$$A_2 - \bar{s}_3 \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2\bar{s}_3\bar{s}_4} = \frac{2\bar{s}_2}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2} - \bar{s}_3 \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2\bar{s}_3\bar{s}_4} = 0 \tag{7.114}$$

$$\begin{aligned}
A_3 - \bar{s}_3 \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4\bar{s}_6}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2\bar{s}_3\bar{s}_4\bar{s}_5} &= \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2\bar{s}_3} - \bar{s}_3 \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4\bar{s}_6}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2\bar{s}_3\bar{s}_4\bar{s}_5} \\
&= \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2\bar{s}_3\bar{s}_4\bar{s}_5} (\bar{s}_4\bar{s}_5 - \bar{s}_3\bar{s}_6) \\
&= \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2\bar{s}_3\bar{s}_4\bar{s}_5} \bar{s}_1\bar{s}_2 = \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4}{\bar{s}_1\bar{s}_2\bar{s}_3\bar{s}_4\bar{s}_5}
\end{aligned} \tag{7.115}$$

さらに,

$$\begin{aligned}
A_{i-1} &= \bar{s}_3 \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-2}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-2}^2\bar{s}_{i-1}\bar{s}_i\bar{s}_{i+1}} \\
&= \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-4}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-2}^2\bar{s}_{i-1}} - \bar{s}_3 \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-2}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-2}^2\bar{s}_{i-1}\bar{s}_i\bar{s}_{i+1}} \\
&= \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-4}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-2}^2\bar{s}_{i-1}\bar{s}_i\bar{s}_{i+1}} (\bar{s}_i\bar{s}_{i+1} - \bar{s}_3\bar{s}_{2i-2}) \\
&= \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-4}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-2}^2\bar{s}_{i-1}\bar{s}_i\bar{s}_{i+1}} \bar{s}_{i-3}\bar{s}_{i-2} \\
&= \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-4}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-4}^2\bar{s}_{i-3}\bar{s}_{i-2}\bar{s}_{i-1}\bar{s}_i\bar{s}_{i+1}}
\end{aligned} \tag{7.116}$$

したがって,

$$P_3(s) = \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4}{\bar{s}_1\bar{s}_2\bar{s}_3\bar{s}_4\bar{s}_5} s^{N-3} + \cdots + \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2i-4}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_{i-4}^2\bar{s}_{i-3}\bar{s}_{i-2}\bar{s}_{i-1}\bar{s}_i\bar{s}_{i+1}} s^{N-(i-1)} + \cdots \tag{7.117}$$

同様にして、一般項については、

$$\begin{aligned}
P_k(s) &= \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2k-2}}{\bar{s}_1\bar{s}_2 \cdots \bar{s}_{2k-1}} s^{N-k} + \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2k-2}\bar{s}_{2k}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2 \cdots \bar{s}_{2k-1}\bar{s}_{2k}} s^{N-k-1} + \cdots \\
&\quad + \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2k-2+2i}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2^2 \cdots \bar{s}_i^2\bar{s}_{i+1} \cdots \bar{s}_{2k-1+i}} s^{N-(k-i)} + \cdots
\end{aligned} \tag{7.118}$$

連分数展開は、

$$P_{k-1}(s) = g_k s P_k(s) + P_{k+1}(s) \tag{7.119}$$

ゆえ、 g_k を次のように決めれば、 $P_{k-1}(s)$ の s^{N-k+1} の係数はゼロとなる。これより、 g_k の一般式は、

$$g_k = \frac{P_{k-1}(s) \text{の最高次 } N-k+1 \text{ の係数}}{P_k(s) \text{の最高次 } N-k \text{ の係数}} = \frac{\frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2(k-1)-2}}{\bar{s}_1\bar{s}_2 \cdots \bar{s}_{2(k-1)-1}}}{\frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2k-2}}{\bar{s}_1\bar{s}_2 \cdots \bar{s}_{2k-1}}} = \frac{\bar{s}_{2k-2}\bar{s}_{2k-1}}{\bar{s}_{2k-2}} = \bar{s}_{2k-1} \tag{7.120}$$

ここで、

$$\bar{s}_i \equiv 2 \sin \left(\frac{i\pi}{2N} \right) \tag{7.121}$$

よって、**規格化素子値** g_k は次のように導出できた。

$$g_k = 2 \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{2N} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \tag{7.122}$$

最後の項については, $k = N-1, N$ のとき,

$$\begin{aligned} P_{N-1}(s) &= \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2(N-1)-2}}{\bar{s}_1\bar{s}_2 \cdots \bar{s}_{2(N-1)-1}} s + \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2(N-1)}}{\bar{s}_1^2\bar{s}_2 \cdots \bar{s}_{2(N-1)}} \\ &= \frac{2\bar{s}_{2N-1}\bar{s}_{2N-2}}{\bar{s}_{2N-2}} s + \frac{2\bar{s}_{2N-1}}{\bar{s}_1} = 2\bar{s}_1 s + 2 \end{aligned} \quad (7.123)$$

$$P_N(s) = \frac{2\bar{s}_2\bar{s}_4 \cdots \bar{s}_{2N-2}}{\bar{s}_1\bar{s}_2 \cdots \bar{s}_{2N-1}} = 2 \quad (7.124)$$

また,

$$g_N = \bar{s}_{2N-1} = \bar{s}_1 \quad (7.125)$$

よって, 終端抵抗 r は,

$$\begin{aligned} r &= \frac{P_{N-1}(s)}{P_N(s)} - g_N s \\ &= \frac{2\bar{s}_1 s + 2}{2} - \bar{s}_1 s = 1 \end{aligned} \quad (7.126)$$

CHAPTER 8

等リップル特性を有するフィルタ

チェビシェフフィルタの設計と特性について詳しく解説する。まず、チェビシェフ多項式を用いてフィルタの特性関数を定義し、通過帯域における等リップル特性を数学的に導く。次に、この特性を実現するための零点の位置を複素平面上で分析し、それらが楕円上に配置されることを示している。さらに、低域通過フィルタを基本として、周波数変換によって高域通過、帯域通過、および帯域阻止フィルタをどのように設計できるかを、具体的な正規化素子値の計算式と周波数応答の図を用いて網羅的に説明する。理想変成器を用いた偶数次フィルタの終端整合についても触れ、理論と実践の両面からチェビシェフフィルタの実現方法を示していく。

8.1 等リップル (Chebyshev) 特性

8.1.1 チェビシェフ多項式を用いた特性関数

特性関数 $K(s)$ を、 $s = j\Omega$ より、

$$K(s) = K(j\Omega) \equiv \varepsilon T_N(\Omega) \quad (8.1)$$

ここで、 $T_N(\Omega)$ は N 次の**チェビシェフ多項式** (Chebyshev polynomial) を示し、

$$T_N(\Omega) = \begin{cases} (-1)^N \cosh(N \cosh^{-1} |\Omega|) & (\Omega < -1) \\ \cos(N \cos^{-1} \Omega) & (|\Omega| \leq 1) \\ \cosh(N \cosh^{-1} \Omega) & (\Omega > 1) \end{cases} \quad (8.2)$$

また, ε は通過域のリップルの大きさを決めるパラメータ (実数) である. これより,

$$\begin{aligned}|K(s)|^2 &= K(s)K(s)^* = K(s)K(-s) = K(j\Omega)K(-j\Omega) \\&= \varepsilon T_N(\Omega) \cdot \varepsilon T_N(-\Omega) = \varepsilon^2 T_N^2(\Omega)\end{aligned}\quad (8.3)$$

$$|H(s)|^2 = 1 + |K(s)|^2 = 1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega) \quad (8.4)$$

ここで, 遮断点 $\Omega = 1$ のとき, $|H|^2$ は, $T_N(1) = 1$ より,

$$|H|^2 \Big|_{\Omega=1} = 1 + \varepsilon^2 T_N^2(1) = 1 + \varepsilon^2 \quad (8.5)$$

通過域のリップルの最大値は,

$$|H|_{max} = \sqrt{1 + \varepsilon^2} \quad (8.6)$$

デジベル値は, $L_{Ar} = 10 \log_{10}(1 + \varepsilon^2)$ [dB]. 逆に, ε は,

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{L_{Ar}}{10}} - 1} \quad (8.7)$$

8.1.2 動作伝送関数の因数分解

等リップル特性 $H(s)$ を s に関して因数分解するため, $|H(s)|^2 = 0$ の根を求める. $s = j\Omega$ より, $\Omega = -js$ とえ,

$$|H(s)|^2 = 1 + \varepsilon^2 T_N^2(-js) = 0 \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned}T_N^2(-js) &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \\T_N(-js) &= \pm \frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon} = \pm \frac{j}{\varepsilon}\end{aligned}\quad (8.9)$$

ここで, $T_N(\Omega) = \cos(N \cos^{-1} \Omega)$ とえ,

$$\pm \frac{j}{\varepsilon} = \cos\{N \cos^{-1}(-js)\} \quad (8.10)$$

いま,

$$\cos^{-1}(-js) \equiv x + jy \quad (8.11)$$

とおくと, 加法定理および

$$\cos j\alpha = \cosh \alpha \quad (8.12)$$

$$\sin j\alpha = j \sinh \alpha \quad (8.13)$$

より,

$$\begin{aligned}
 \pm \frac{j}{\varepsilon} &= \cos\{N(x + jy)\} \\
 &= \cos Nx \cos jNy - \sin Nx \sin jNy \\
 &= \cos Nx \cosh Ny - j \sin Nx \sinh Ny
 \end{aligned} \tag{8.14}$$

上式の実部より,

$$\cos Nx \cosh Ny = 0 \tag{8.15}$$

$\cosh Ny \geq 1$ が成り立つ。よって, $\cos Nx = 0$ が成り立つ。したがって, $\cos Nx = 0$ を満たす Nx は,

$$Nx = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{8.16}$$

よって, x は,

$$x = \pm \frac{(2n+1)\pi}{2N} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \tag{8.17}$$

このとき, $\sin Nx = \pm 1$ 。一方, 上で示した $\pm \frac{j}{\varepsilon}$ の虚部より,

$$\begin{aligned}
 \pm \frac{1}{\varepsilon} &= \sin Nx \sinh Ny \\
 \frac{1}{\varepsilon} &= \pm \sinh Ny
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

よって, y は,

$$y = \pm \frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \tag{8.19}$$

ここで, $-js = \cos(x + jy)$ より, 零点 s は,

$$\begin{aligned}
 s &= j \cos(x + jy) \\
 &= j(\cos x \cosh y - j \sin x \sinh y) \\
 &= j \cos x \cosh y + \sin x \sinh y \\
 &\equiv \sigma_n + j\omega_n = s_n
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

実現可能な回路を得るためにには, 複素平面の左半面にある零点 s_n を選べばよいので, $\Re(s_n) = \sigma_n < 0$ が成り立つ,

$$\sigma_n = -\sin \frac{(2n+1)\pi}{2N} \sinh a \tag{8.21}$$

$$\omega_n = \cos \frac{(2n+1)\pi}{2N} \cosh a \tag{8.22}$$

ここで,

$$a = \frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \tag{8.23}$$

8.1.3 動作伝送関数の零点

$|H(s)|^2$ は,

$$\begin{aligned} |H(s)|^2 &= 1 + \varepsilon^2 T_N^2(-js) = 1 + \varepsilon^2 \left\{ 2^{N-1} (-js)^N + \dots \right\}^2 \\ &= \varepsilon^2 2^{2(N-1)} (-1)^N s^{2N} + \dots \end{aligned} \quad (8.24)$$

零点 s_n より動作伝送関数 $H(s)$, さらには反射係数 $\Gamma(s)$ は,

$$H(s) = \pm \varepsilon 2^{N-1} (-j)^N \prod_{n=1}^N (s - s_n) \quad (8.25)$$

$$\Gamma(s) = \frac{K(s)}{H(s)} = \pm \frac{T_N(\Omega)}{2^{N-1} (-j)^N \prod_{n=1}^N (s - s_n)} \quad (8.26)$$

また, 上で求めた σ_n , ω_n より,

$$\sin^2 \frac{(2n+1)\pi}{2N} + \cos^2 \frac{(2n+1)\pi}{2N} = \frac{\sigma_n^2}{\sinh^2 a} + \frac{\omega_n^2}{\cosh^2 a} = 1 \quad (8.27)$$

これより, 零点 s_n は複素平面のだ円 (直交するだ円の軸は実軸と虚軸) 上にあることがわかる. 下の図は, $N = 2, 3, 4, 5$ の 0.5dB 等リップル特性における s_n を各々, プロットしたもので, s_n がだ円上にあることが確認できる.

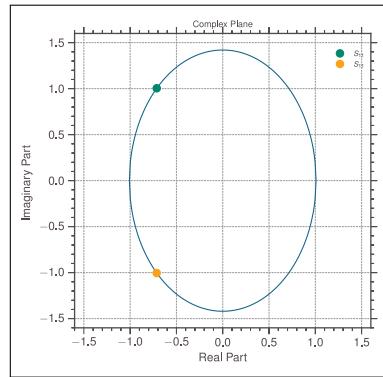


図 8.1. s_n の位置 ($N = 2$)

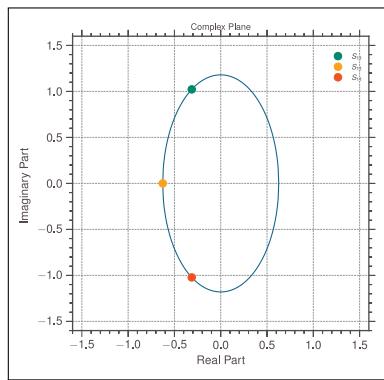


図 8.2. s_n の位置 ($N = 3$)

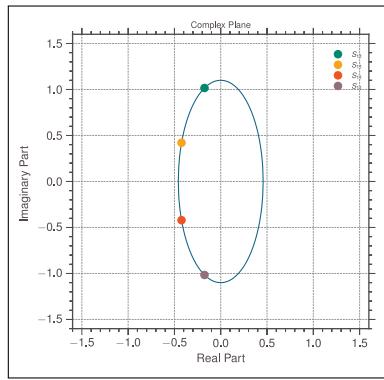


図 8.3. s_n の位置 ($N = 4$)

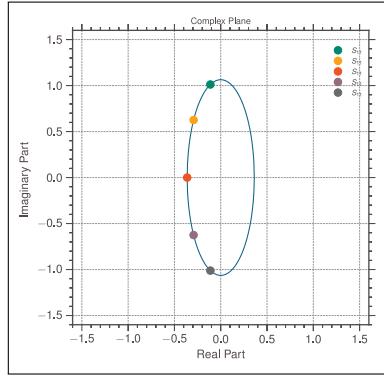


図 8.4. s_n の位置 ($N = 5$)

8.1.4 周波数特性

$|H|^2$ dB, $\text{Arg}(1/H)$ deg, $1/|\Gamma|^2$ dB の周波数特性を示すと次のようになり, $N = 2$ から, 順次, 段数 N を増やした特性を追加してプロットしている。

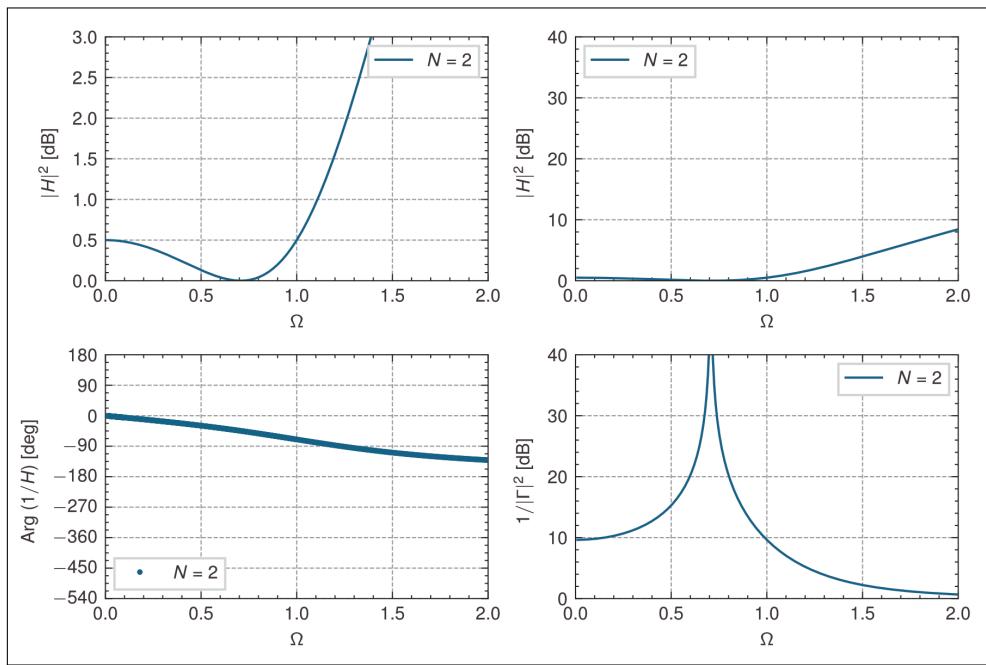


図 8.5. 0.5dB の等リップル特性の低域通過特性 ($N = 2$)

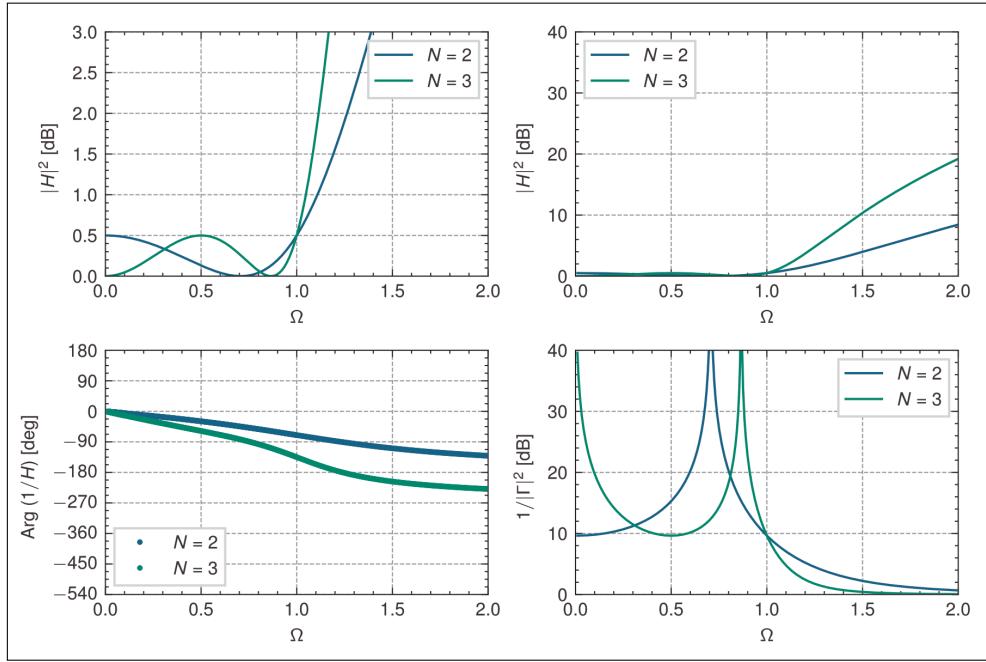


図 8.6. 0.5dB の等リップル特性の低域通過特性 ($N = 2, 3$)

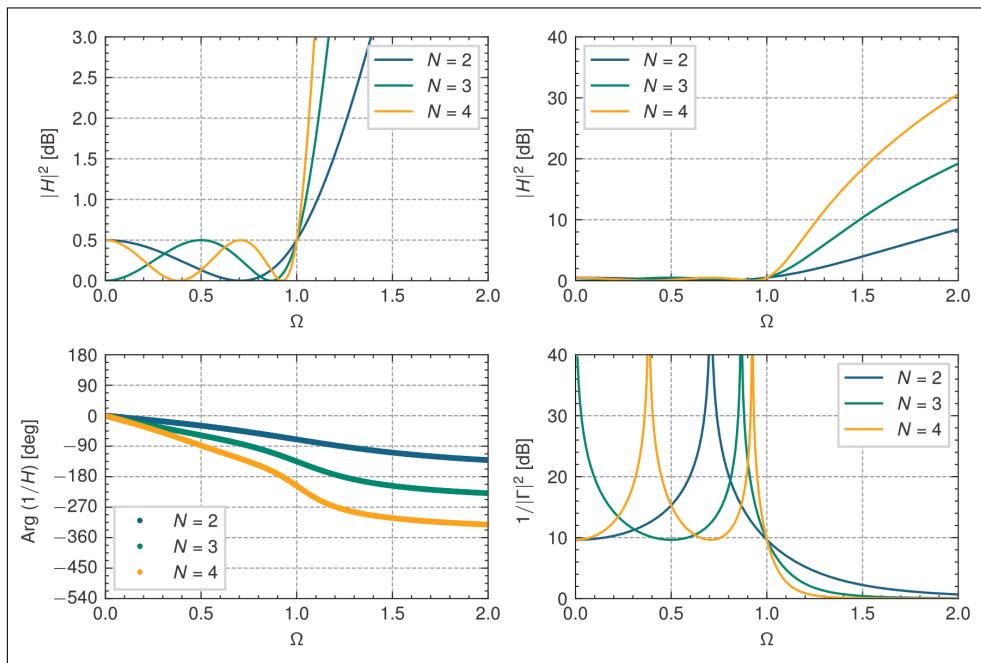


図 8.7. 0.5dB の等リップル特性の低域通過特性 ($N = 2, 3, 4$)

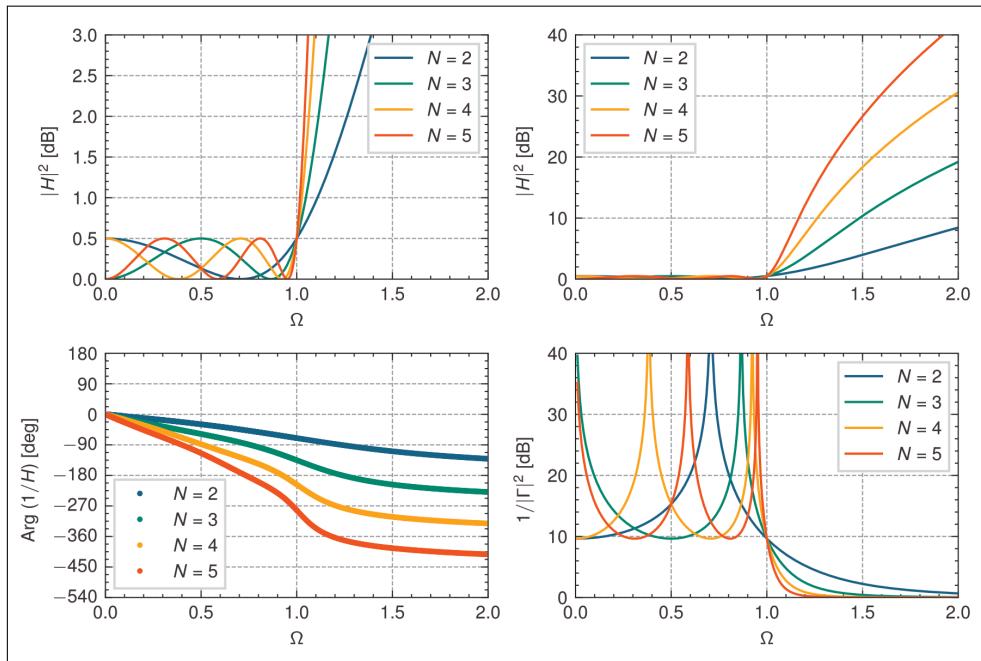


図 8.8. 0.5dB の等リップル特性の低域通過特性 ($N = 2, 3, 4, 5$)

リップルを 0.05dB としたときは次のようになり、帯域内はもちろん所定のリップルとなるが、帯域外は上の図（リップル 0.5dB）に比べて緩やかな特性に変化していることが確認できる。

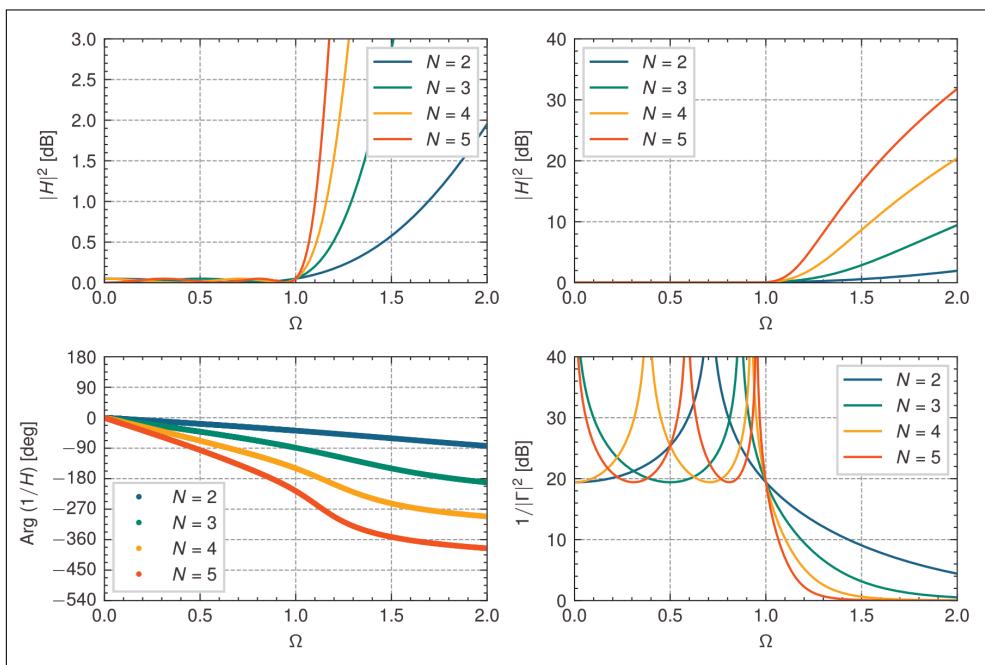


図 8.9. 0.05dB の等リップル特性の低域通過特性 ($N = 2, 3, 4, 5$)

8.2 等リップル特性の周波数変換

8.2.1 低域通過から高域通過への周波数変換

$N = 2, 3, 4, 5$ について周波数変換した高域通過の $|H|^2$ dB, $\text{Arg}(1/H)$ deg, $1/|\Gamma|^2$ dB の周波数特性を示すと次のようになる。

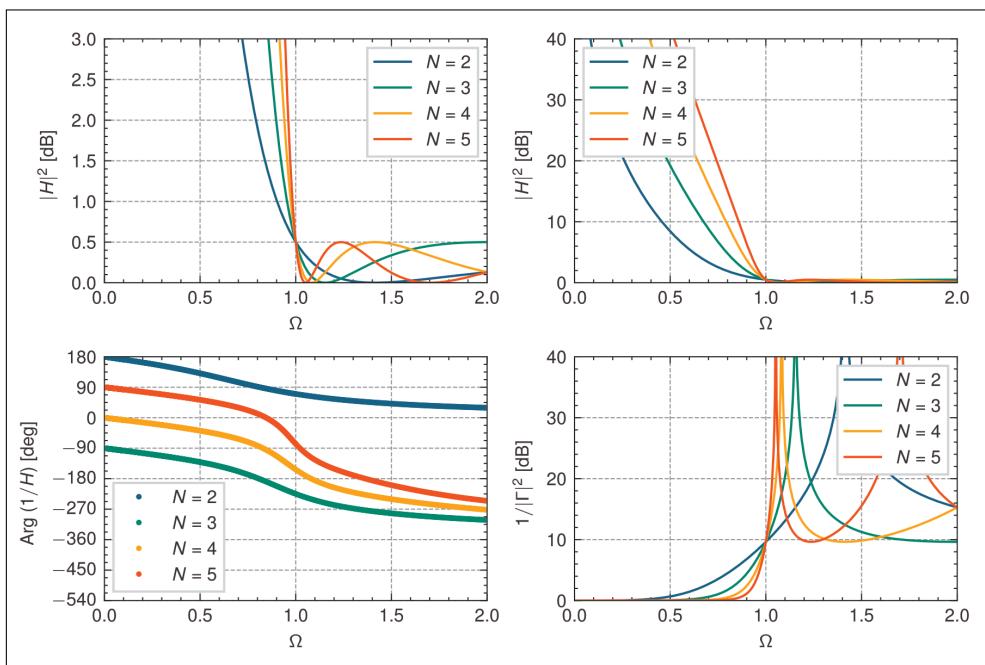


図 8.10. 0.5dB の等リップル特性の高域通過特性 ($N = 2, 3, 4, 5$)

8.2.2 低域通過から帯域通過への周波数変換

比帯域 $W = 0.3$ で周波数変換した帯域通過の $|H|^2$ dB, $\text{Arg}(1/H)$ deg, $1/|\Gamma|^2$ dB の周波数特性を示すと次のようになり, $N = 2$ から, 順次, 段数 N を増やした特性を追加してプロットしている.

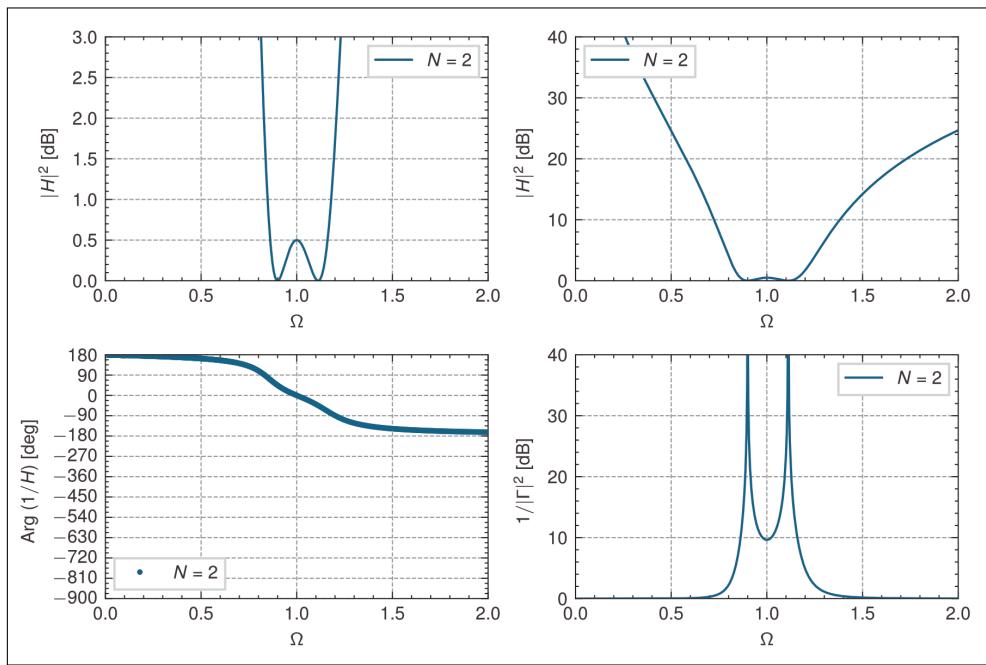


図 8.11. 0.5dB の等リップル特性の帯域通過特性 ($N = 2, W = 0.3$)

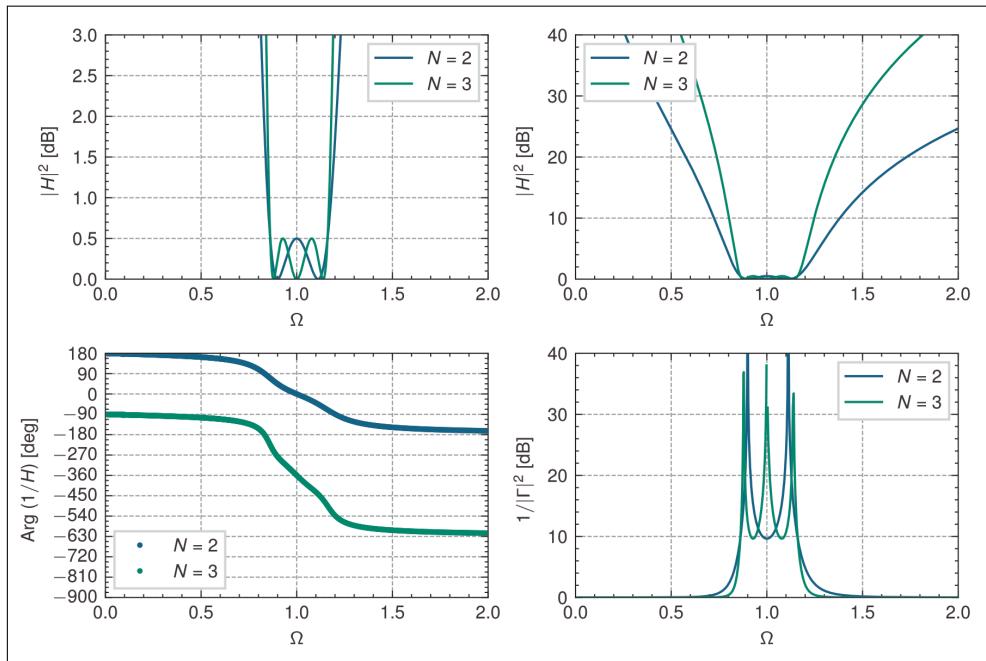


図 8.12. 0.5dB の等リップル特性の帯域通過特性 ($N = 2, 3, W = 0.3$)

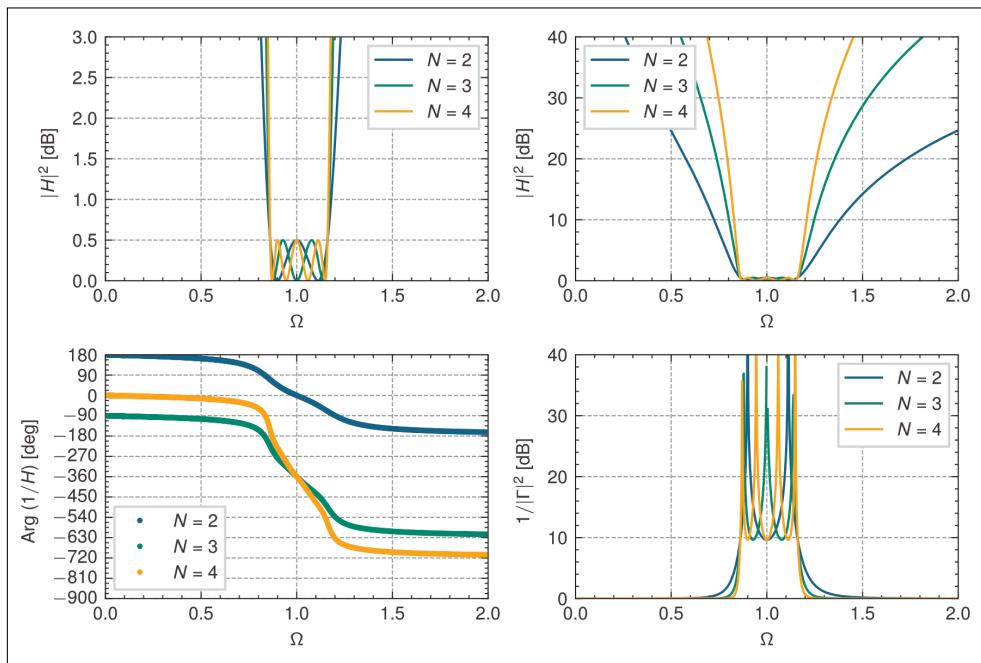


図 8.13. 0.5dB の等リップル特性の帯域通過特性 ($N = 2, 3, 4, W = 0.3$)

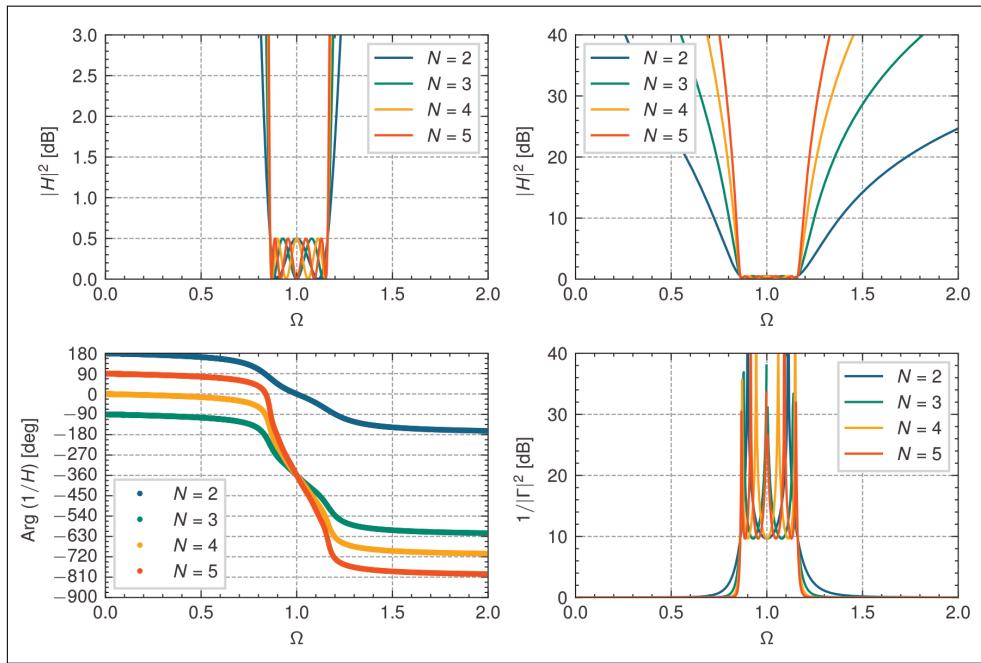


図 8.14. 0.5dB の等リップル特性の帯域通過特性 ($N = 2, 3, 4, 5, W = 0.3$)

8.2.3 低域通過から帯域阻止への周波数変換

$N = 2, 3, 4, 5$ について周波数変換した帯域阻止の周波数特性を示すと次のようになる。

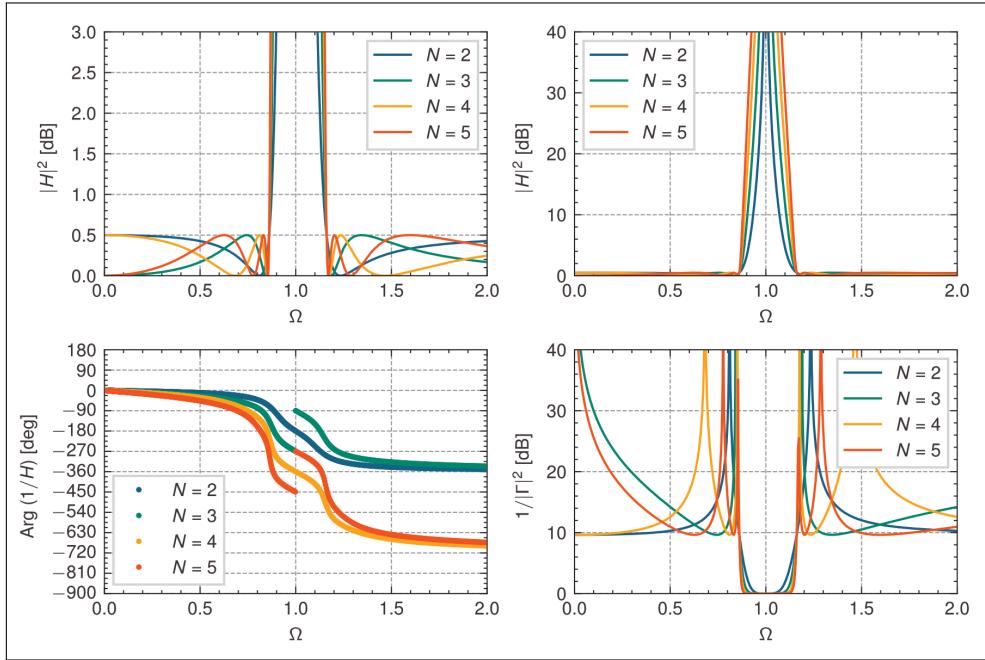


図 8.15. 0.5dB の等リップル特性の高域通過特性 ($N = 2, 3, 4, 5$)

8.3 等リップル特性を持つ低域通過梯子型回路の規格化素子値

N 次のチェビシェフ特性を有する梯子型リアクタンス回路を合成すると、規格化素子値 g_k は、

$$g_1 = \frac{2u_1}{\eta} \quad (8.28)$$

$$g_k = \frac{4u_{k-1}u_k}{v_{k-1}g_{k-1}} \quad (k = 2, 3, \dots, N) \quad (8.29)$$

$$g_{N+1} = \begin{cases} 1 & (N: \text{奇数}) \\ \coth^2 \frac{\zeta}{4} & (N: \text{偶数}) \end{cases} \quad (8.30)$$

ただし、 $g_0 = 1$ である。また、 g_{N+1} は終端負荷の抵抗（最終段が直列素子の場合）あるいはコンダクタンス（最終段が並列素子の場合）を示す。ここで、

$$\zeta = \ln \left[\coth \left(\frac{L_{Ar}}{17.37} \right) \right] \quad (8.31)$$

$$\eta = \sinh \left(\frac{\zeta}{2N} \right) \quad (8.32)$$

$$u_k = \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{2N} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (8.33)$$

$$v_k = \eta^2 + \sin^2 \left(\frac{k\pi}{N} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (8.34)$$

ただし, L_{Ar} はリップルのピーク値 [dB] を示す.

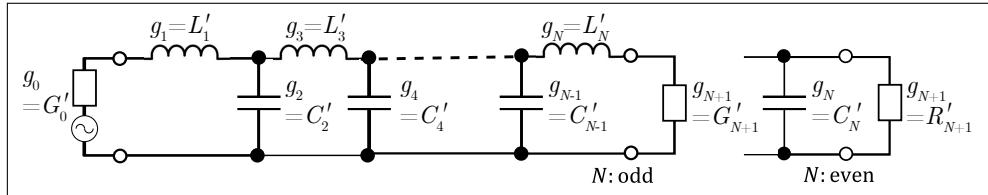


図 8.16. 入力インピーダンス z_{in}^+ により合成した梯子型回路

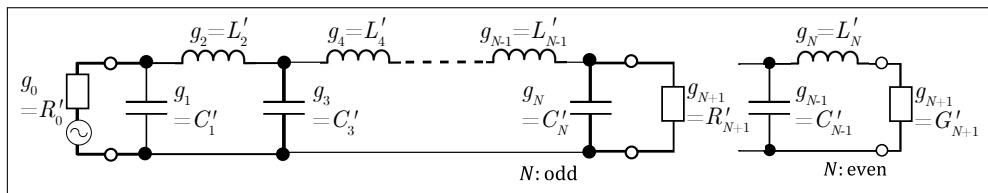


図 8.17. 入力インピーダンス z_{in}^- により合成した梯子型回路

等リップル (0.04365 dB) を有する低域通過フィルタの規格化素子値 g_k を求めると次のようになる. ただし, $g_0 = 1$, 終端負荷の素子値は N が奇数のとき $g_{N+1} = 1$, N が偶数のとき $g_{N+1}|_{L_{Ar}=0.04365} = 1.2222$. このとき, 通過域の反射のピーク値は -20 dB である. 奇数

表 8.1 等リップル (0.04365 dB) 低域通過フィルタの規格化素子値 g_k

次数 N	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
2	0.6667	0.5455	—	—	—	—	—	$g_3 = 1.2222$
3	0.8535	1.1039	0.8535	—	—	—	—	$g_4 = 1.0000$
4	0.9333	1.2923	1.5795	0.7636	—	—	—	$g_5 = 1.2222$
5	0.9732	1.3723	1.8032	1.3723	0.9732	—	—	$g_6 = 1.0000$
6	0.9958	1.4131	1.8950	1.5505	1.7272	0.8148	—	$g_7 = 1.2222$
7	1.0097	1.4368	1.9414	1.6216	1.9414	1.4368	1.0097	$g_8 = 1.0000$

次のチェビシェフ特性の場合, 梯子型回路の終端負荷は $g_{N+1} = 1$ であるのに対し, 偶数次の場合, 終端負荷は $g_{N+1} \neq 1$ であるが, 両者ともに各々の負荷に対して所定の伝送特性が得られる. 当然, 偶数次の回路に $r = 1$ の終端負荷を接続しても所定の特性は得られない. しかしながら, 梯子型回路と終端負荷の間に理想変成器 ($n : 1$) を挿入して, 梯子型回路から変成器 (終端負荷は $r = 1$) を見た規格化入力インピーダンス (梯子型回路の最終段が並列素子の場合), あるいは規格化入力アドミタンス (最終段が直列素子の場合) を g_{N+1} とすれば, 所定の特性を得ることができる. 梯子型回路の最終段が並列素子の場合, 規格化入

力インピーダンス $z_{in} = g_{N+1}$ となるように,

$$z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{nV_2}{\frac{-1}{n}I_2} = n^2 \frac{V_2}{-I_2} = n^2 = g_{N+1} \quad (8.35)$$

よって, $n = \sqrt{g_{N+1}}$ ゆえ, 理想変成器の入出力端子の電圧, 電流の関係は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{g_{N+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{N+1}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (8.36)$$

梯子型回路の最終段が直列素子の場合, 規格化入力アドミタンスが $y_{in} = g_{N+1}$ となるように,

$$\frac{1}{y_{in}} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{nV_2}{\frac{-1}{n}I_2} = n^2 \frac{V_2}{-I_2} = n^2 = \frac{1}{g_{N+1}} \quad (8.37)$$

よって, $n = \frac{1}{\sqrt{g_{N+1}}}$ ゆえ, 理想変成器の入出力端子の電圧, 電流の関係は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{N+1}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{g_{N+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

これより, $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ について入力インピーダンス z_{in}^+ で合成した回路の特性を求めると次のようになる.

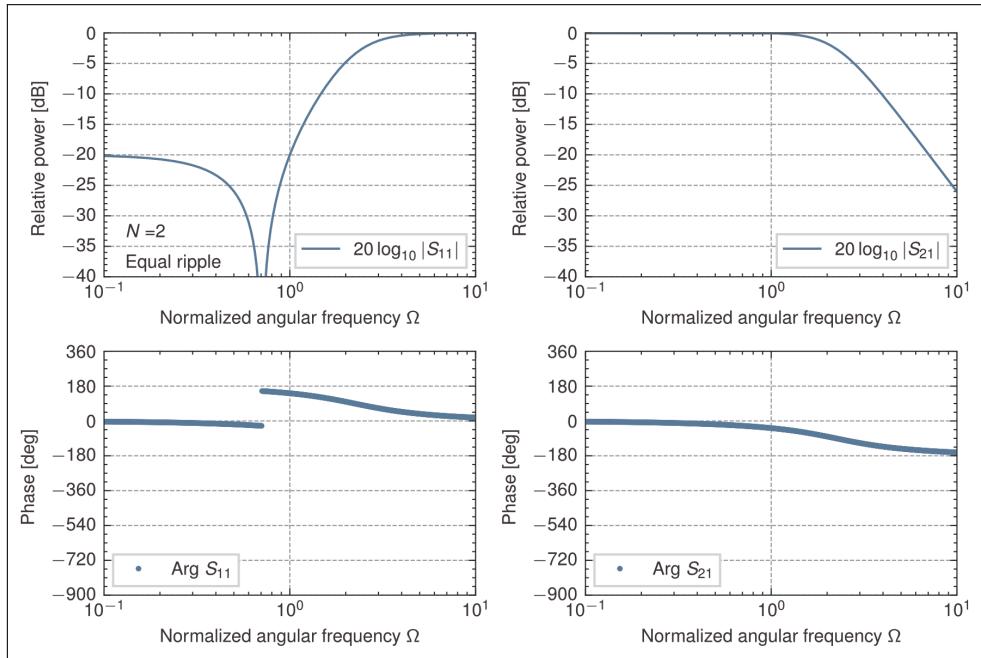


図 8.18. 2段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル低域通過特性 (z_{in}^+)

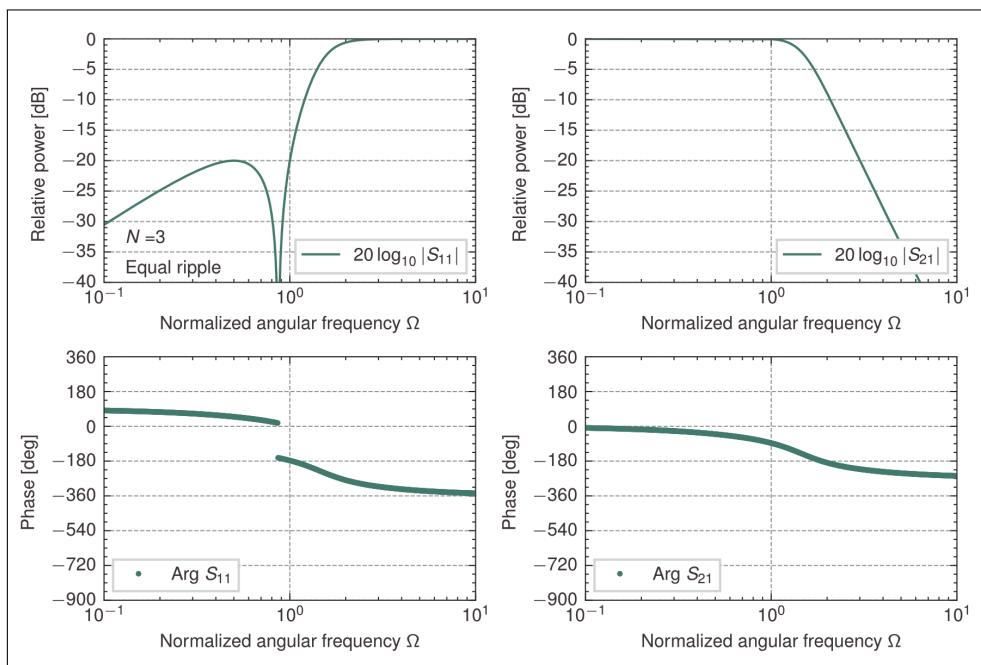


図 8.19. 3段梯子型回路の0.04365dB（反射=−20dB）等リップル低域通過特性（ z_{in}^+ ）

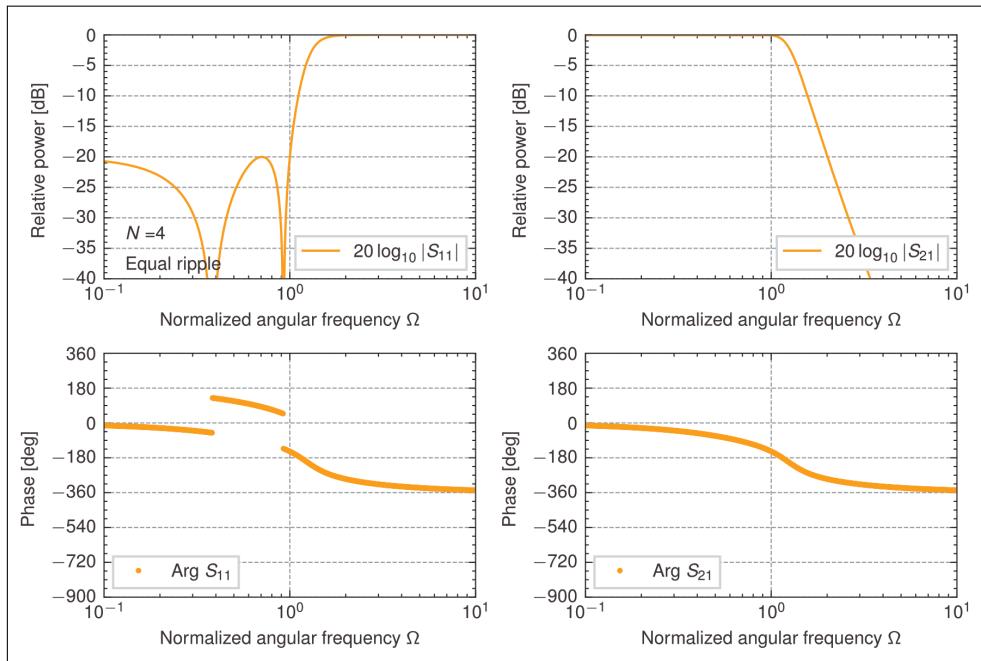


図 8.20. 4段梯子型回路の0.04365dB（反射=−20dB）等リップル低域通過特性（ z_{in}^+ ）

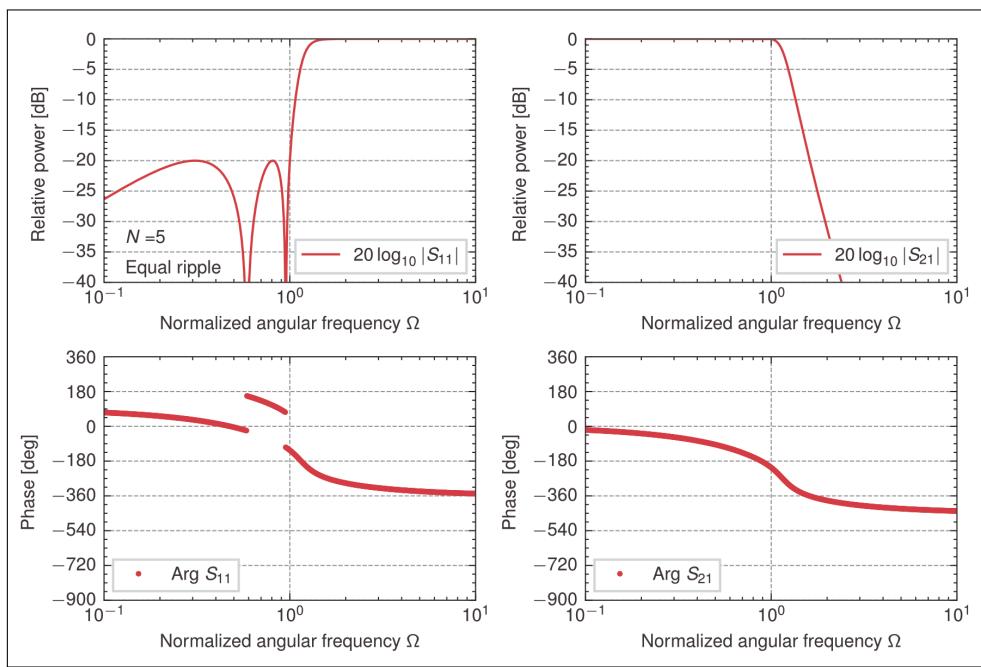


図 8.21. 5段梯子型回路の0.04365dB(反射=−20dB)等リップル低域通過特性(z_{in}^+)

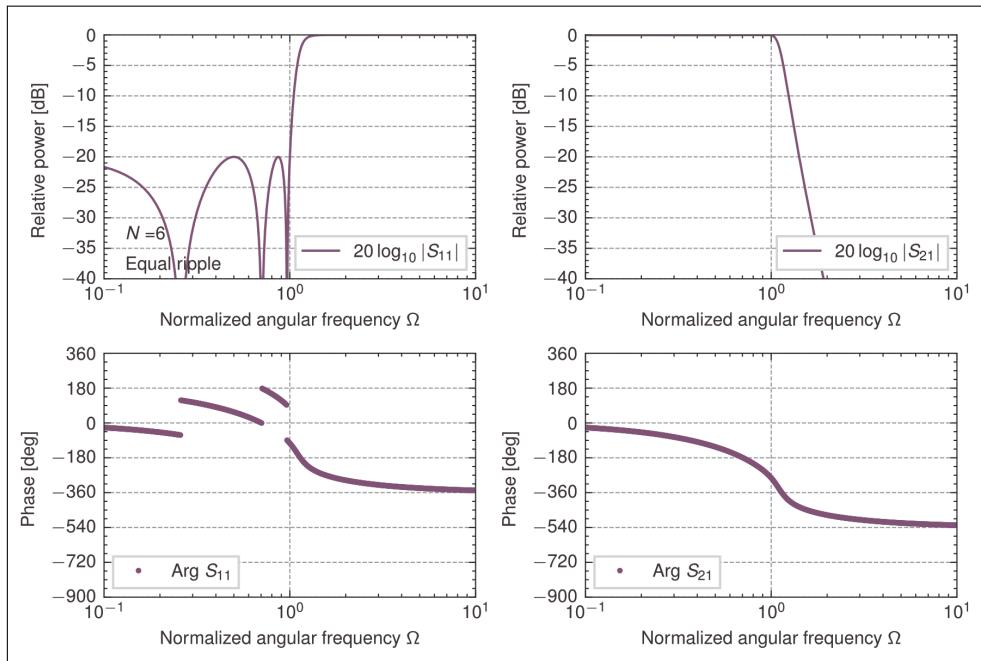


図 8.22. 6段梯子型回路の0.04365dB(反射=−20dB)等リップル低域通過特性(z_{in}^+)

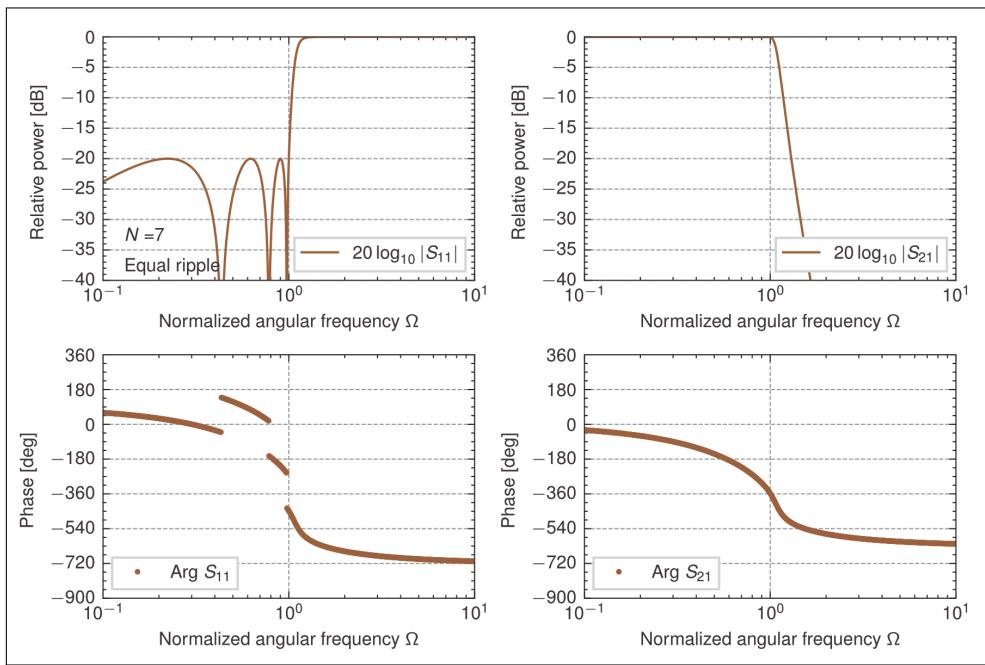


図 8.23. 7段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル低域通過特性 (z_{in}^+)

8.4 周波数変換により求めた等リップル特性を持つ高域通過梯子型回路の規格化素子値

高域通過フィルタは、周波数変換 $s = \frac{1}{\hat{s}}$ より、梯子型回路の直列素子の規格化インピーダンス z_k 、並列素子の規格化アドミタンス y_k は (入力の抵抗は 1),

$$z_k = sg_k = \frac{g_k}{\hat{s}} \equiv \frac{1}{\hat{s}\hat{g}_k} = \frac{1}{\hat{y}_k} \quad (8.39)$$

$$y_k = sg_k = \frac{g_k}{\hat{s}} \equiv \frac{1}{\hat{s}\hat{g}_k} = \frac{1}{\hat{z}_k} \quad (8.40)$$

よって、高域通過フィルタの規格化素子値 \hat{g}_k は,

$$\hat{g}_k = \frac{1}{g_k} \quad (8.41)$$

高域通過梯子型回路は双対的な次のような回路となる.

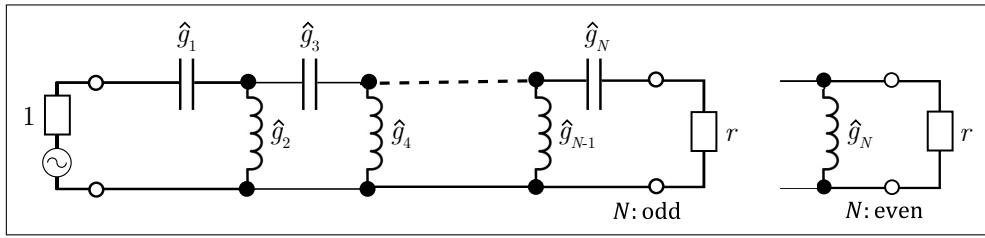


図 8.24. z_{in}^+ により合成した原型低域通過回路を周波数変換した高域通過梯子型回路

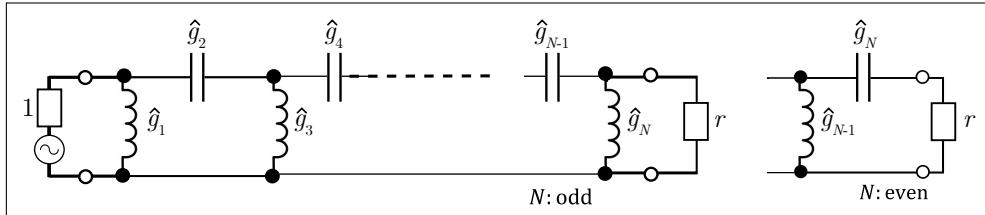


図 8.25. z_{in}^- により合成した原型低域通過回路を周波数変換した高域通過梯子型回路

等リップル (0.04365 dB) 特性を有する高域通過フィルタの規格化素子値 \hat{g}_k を求めると次のようになる。ただし、入力抵抗 $g_0 = 1$ 、終端負荷の素子値は N が奇数のとき $g_{N+1} = 1$ 、 N が偶数のとき $g_{N+1}|_{L_{Ar}=0.04365} = 1.2222$ 。このとき、通過域の反射のピーク値は -20 dB。これ

表 8.2 等リップル (0.04365 dB) 高域通過フィルタの規格化素子値 \hat{g}_k

次数 N	\hat{g}_1	\hat{g}_2	\hat{g}_3	\hat{g}_4	\hat{g}_5	\hat{g}_6	\hat{g}_7
2	1.5000	1.8333					
3	1.1717	0.9059	1.1717				
4	1.0715	0.7738	0.6331	1.3097			
5	1.0275	0.7287	0.5546	0.7287	1.0275		
6	1.0042	0.7076	0.5277	0.6450	0.5790	1.2274	
7	0.9903	0.6960	0.5151	0.6167	0.5151	0.6960	0.9903

より、 $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ について入力インピーダンス z_{in}^+ で回路合成し、偶数次 $N = 2, 4, 6$ については終端に理想変成器を追加して周波数応答を求めるようになる。

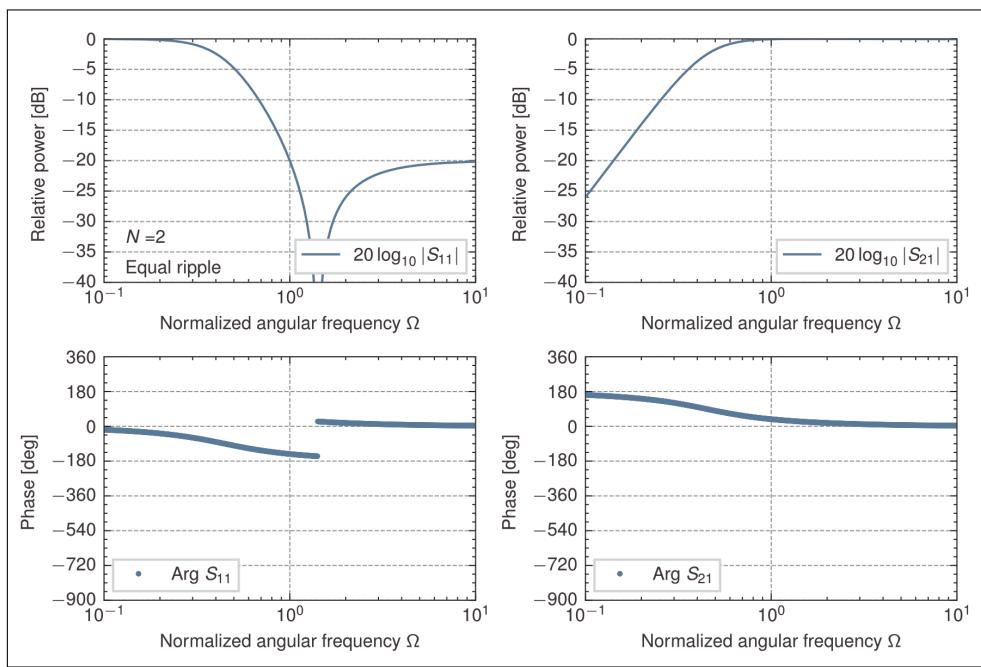


図 8.26. 理想変成器を接続した 2 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル高域通過特性 (z_{in}^+)

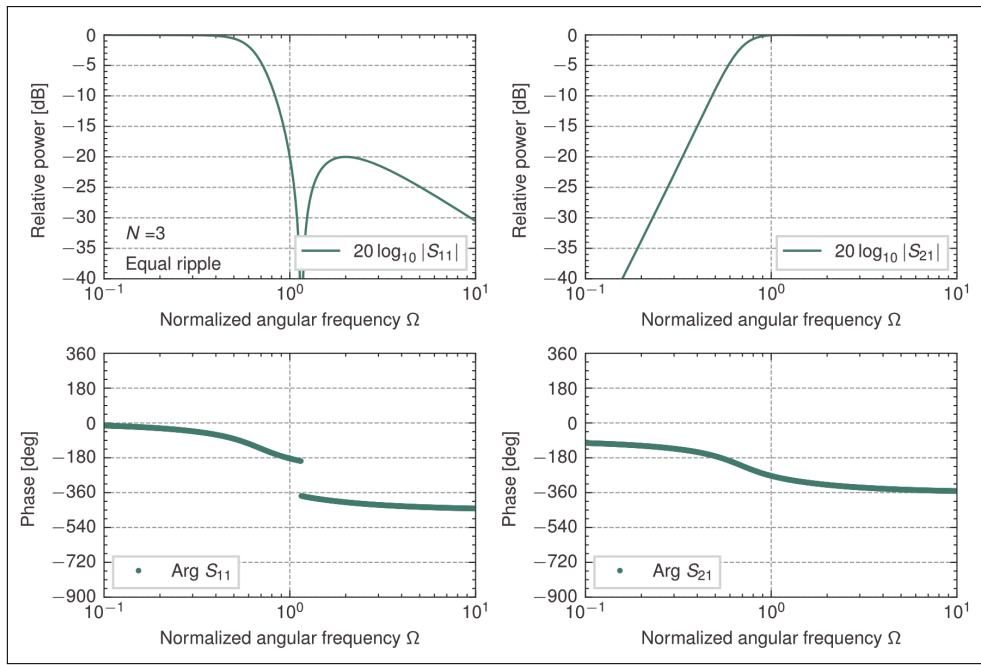


図 8.27. 3 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル高域通過特性 (z_{in}^+)

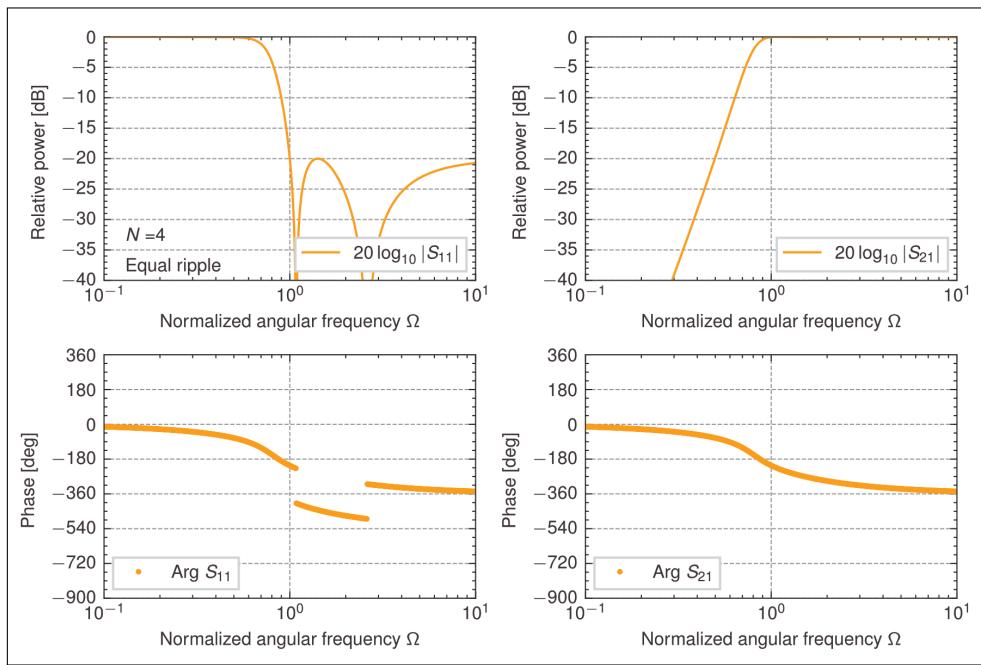


図 8.28. 理想変成器を接続した 4 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル高域通過特性 (z_{in}^+)

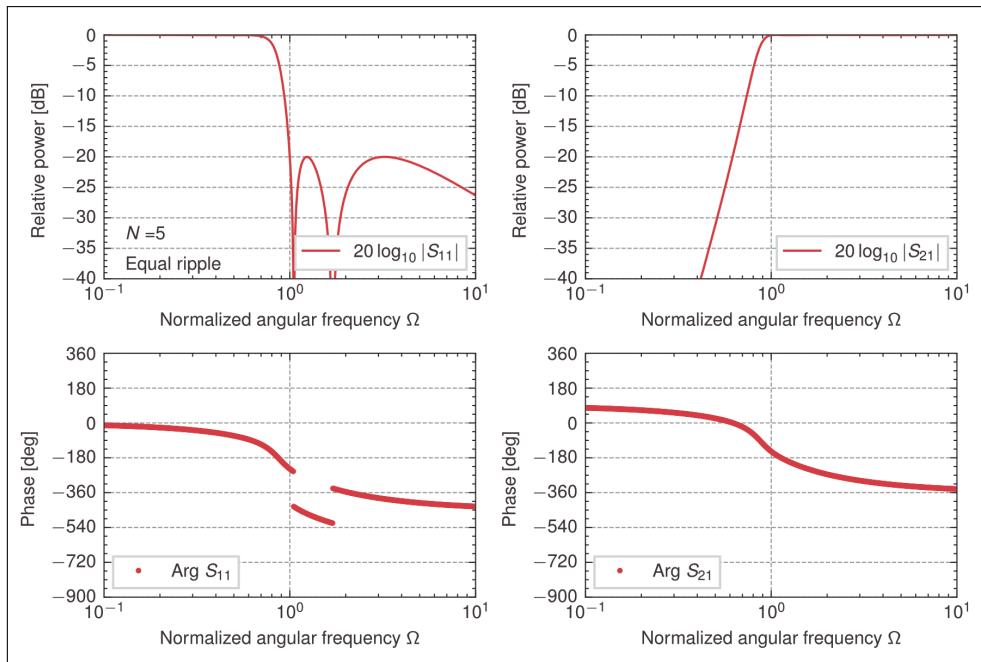


図 8.29. 5 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル高域通過特性 (z_{in}^+)

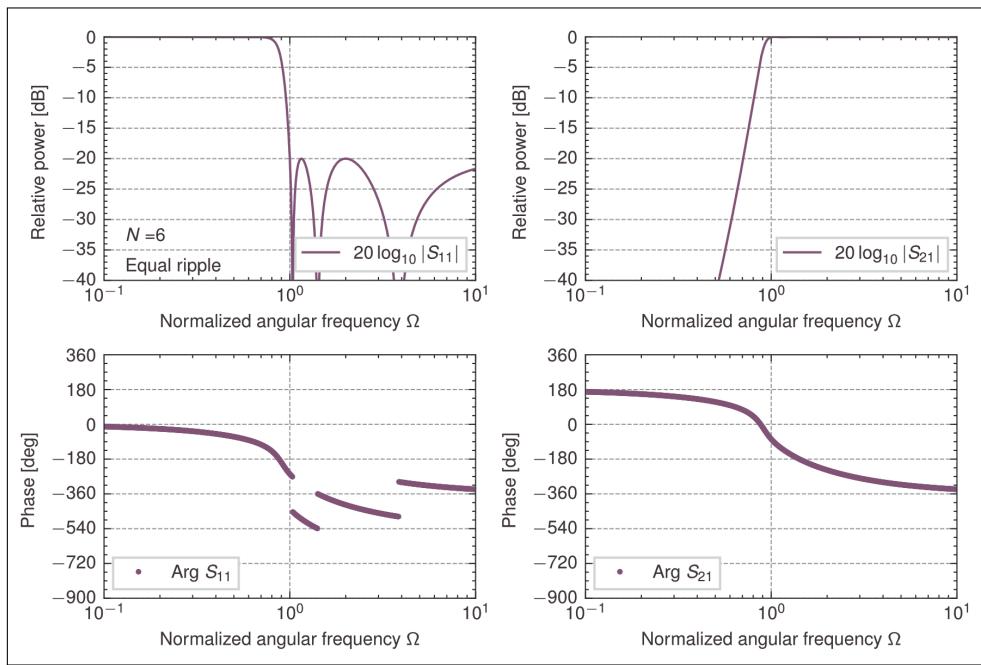


図 8.30. 理想変成器を接続した 6 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル高域通過特性 (z_{in}^+)

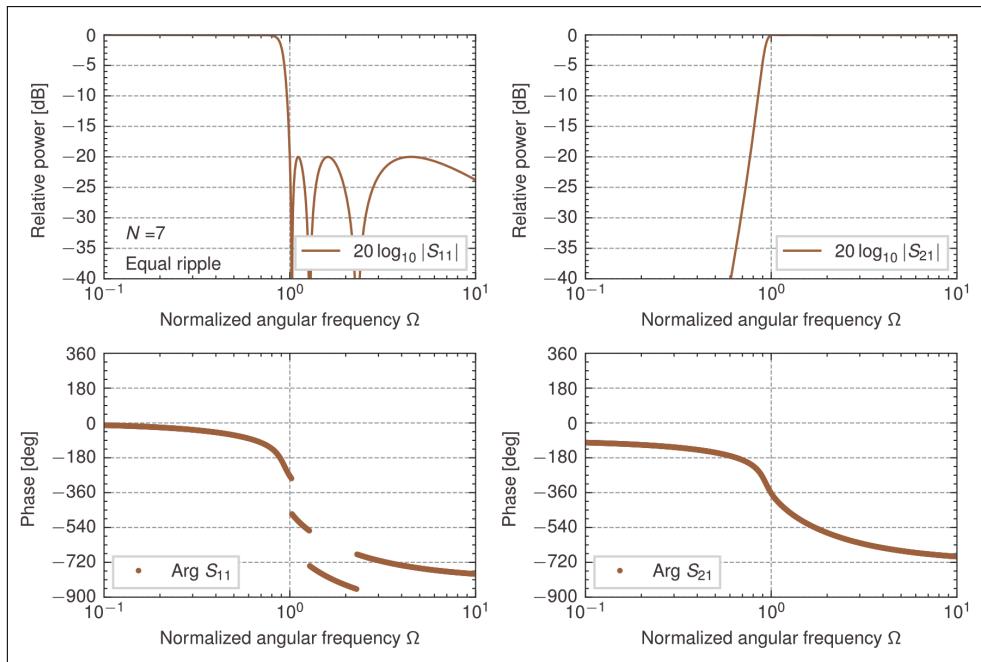


図 8.31. 7 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル高域通過特性 (z_{in}^+)

8.5 周波数変換により求めた等リップル特性を持つ帯域通過梯子型回路の規格化素子値

帯域通過フィルタは、原型低域通過フィルタを周波数変換して、

$$s = \frac{1}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right) \quad (8.42)$$

これより、直列素子の正規化インピーダンス z_k は、

$$z_k = sg_k = \frac{g_k}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right) = \hat{s} \frac{g_k}{W} + \frac{1}{\hat{s} \frac{W}{g_k}} \equiv \hat{s} \hat{l}_k + \frac{1}{\hat{s} \hat{c}_k} \quad (8.43)$$

直列接続された規格化インダクタンス \hat{l}_k 、規格化キャパシタンス \hat{c}_k は（直列共振回路）、

$$\hat{l}_k = \frac{g_k}{W} \equiv \hat{g}_k \quad (8.44)$$

$$\hat{c}_k = \frac{W}{g_k} \equiv \hat{g}'_k \quad (8.45)$$

また、並列素子の正規化アドミタンス y_k は、

$$y_k = sg_k = \frac{g_k}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right) = \hat{s} \frac{g_k}{W} + \frac{1}{\hat{s} \frac{W}{g_k}} \equiv \hat{s} \hat{c}_k + \frac{1}{\hat{s} \hat{l}_k} \quad (8.46)$$

並列接続された規格化キャパシタンス \hat{c}_k 、規格化インダクタンス \hat{l}_k は（並列共振回路）、

$$\hat{c}_k = \frac{g_k}{W} \equiv \hat{g}_k \quad (8.47)$$

$$\hat{l}_k = \frac{W}{g_k} \equiv \hat{g}'_k \quad (8.48)$$

したがって、帯域通過梯子型回路は双対的な次のような回路となる。

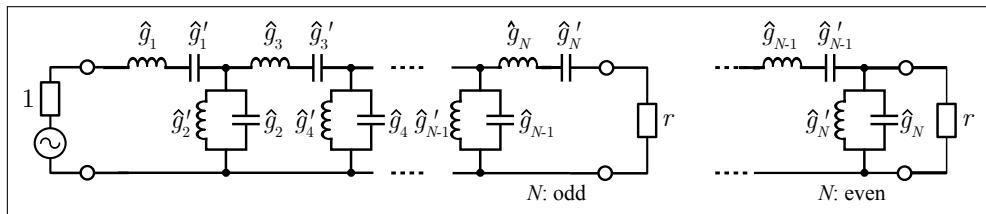


図 8.32. z_{in}^+ により合成した原型低域通過回路を周波数変換した帯域通過梯子型回路

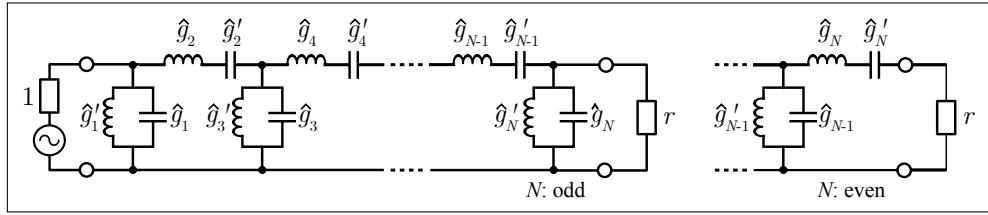


図 8.33. z_{in}^- により合成した原型低域通過回路を周波数変換した帯域通過梯子型回路

等リップル (0.04365 dB) 帯域 ($W = 0.3$) 通過特性を有する帯域通過フィルタの規格化素子値 \hat{g}_k を求めると次のようになる。ただし、入力抵抗 $g_0 = 1$ 、終端負荷の素子値は N が奇数のとき $g_{N+1} = 1$ 、 N が偶数のとき $g_{N+1}|_{L_{Ar}=0.04365} = 1.2222$ 。このとき、通過域の反射のピーク値は -20 dB。これより、 $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 、比帯域 $W = 0.3$ について入力イン

表 8.3 等リップル (0.04365 dB) 帯域通過フィルタ (比帯域 $W = 0.3$) の規格化素子値 \hat{g}_k , \hat{g}'_k

次数 N	\hat{g}_1	\hat{g}_2	\hat{g}_3	\hat{g}_4	\hat{g}_5	\hat{g}_6	\hat{g}_7
2	2.2223	1.8182					
	0.4500	0.5500					
3	2.8449	3.6796	2.8449				
	0.3515	0.2718	0.3515				
4	3.1108	4.3078	5.2651	2.5452			
	0.3215	0.2321	0.1899	0.3929			
5	3.2441	4.5743	6.0106	4.5743	3.2441		
	0.3083	0.2186	0.1664	0.2186	0.3083		
6	3.3194	4.7105	6.3167	5.1682	5.7573	2.7158	
	0.3013	0.2123	0.1583	0.1935	0.1737	0.3682	
7	3.3658	4.7894	6.4714	5.4053	6.4714	4.7894	3.3658
	0.2971	0.2088	0.1545	0.1850	0.1545	0.2088	0.2971

ピーダンス z_{in}^+ で回路合成し、偶数次 $N = 2, 4, 6$ については終端に理想変成器を追加して周波数応答を求めるときのようになる。

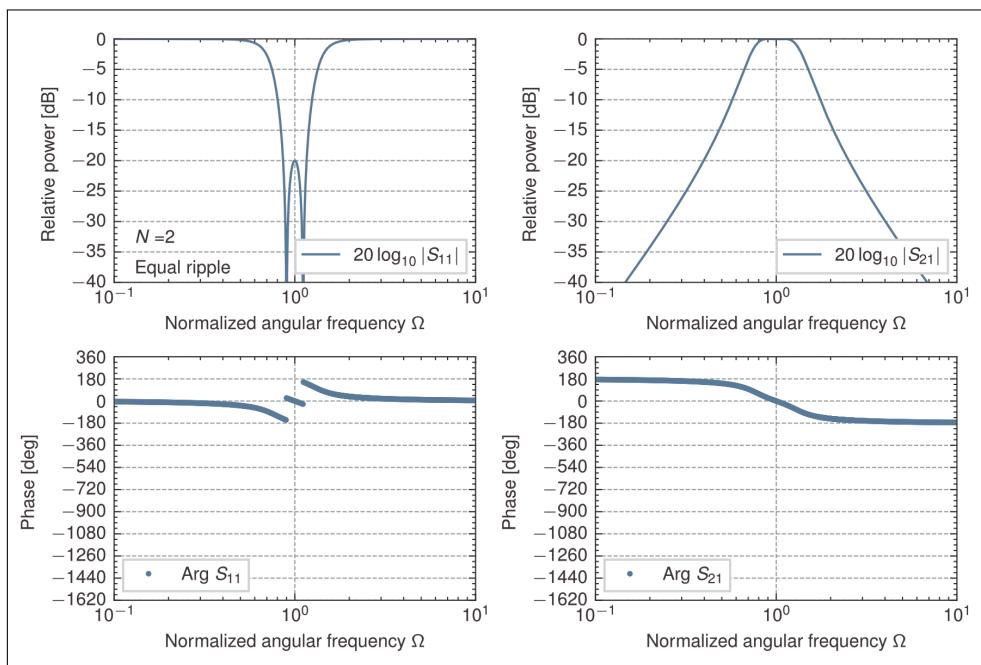


図 8.34. 理想変成器を接続した 2 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル帯域通過特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

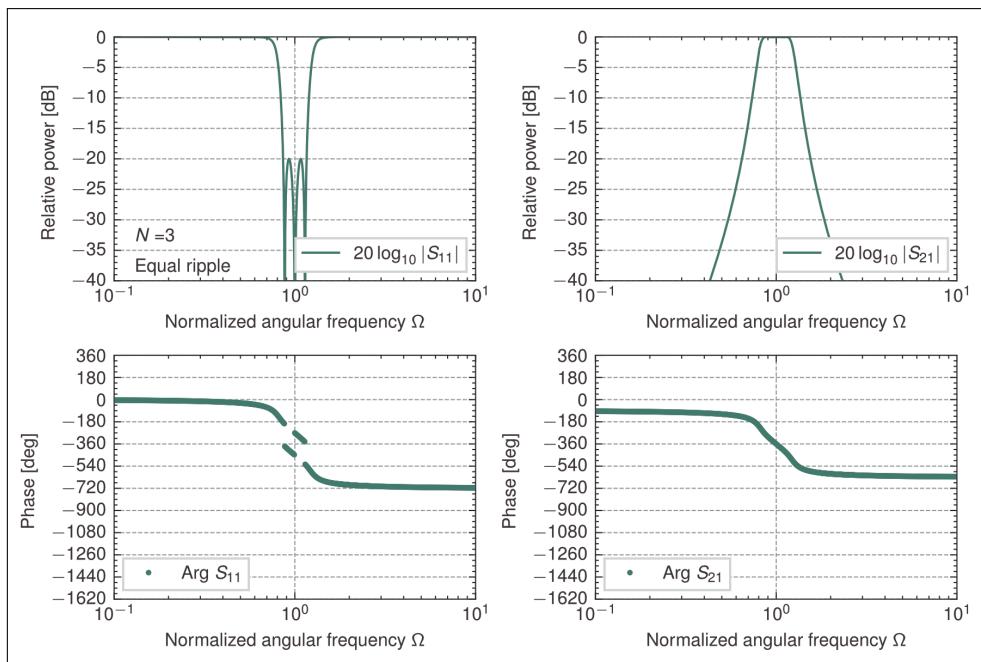


図 8.35. 3 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル帯域通過特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

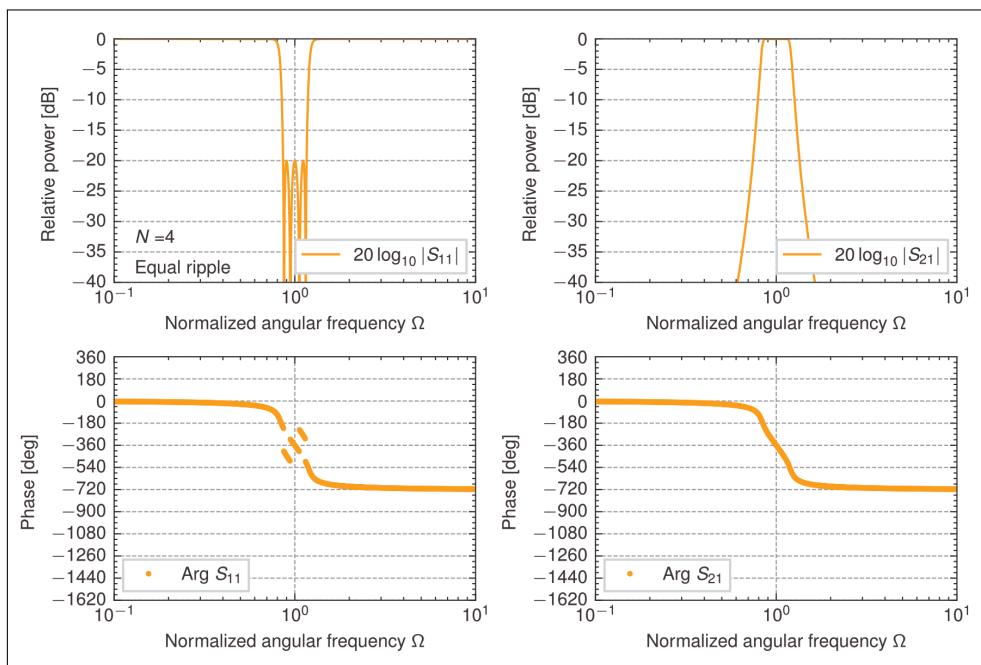


図 8.36. 理想変成器を接続した 4 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル帯域通過特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

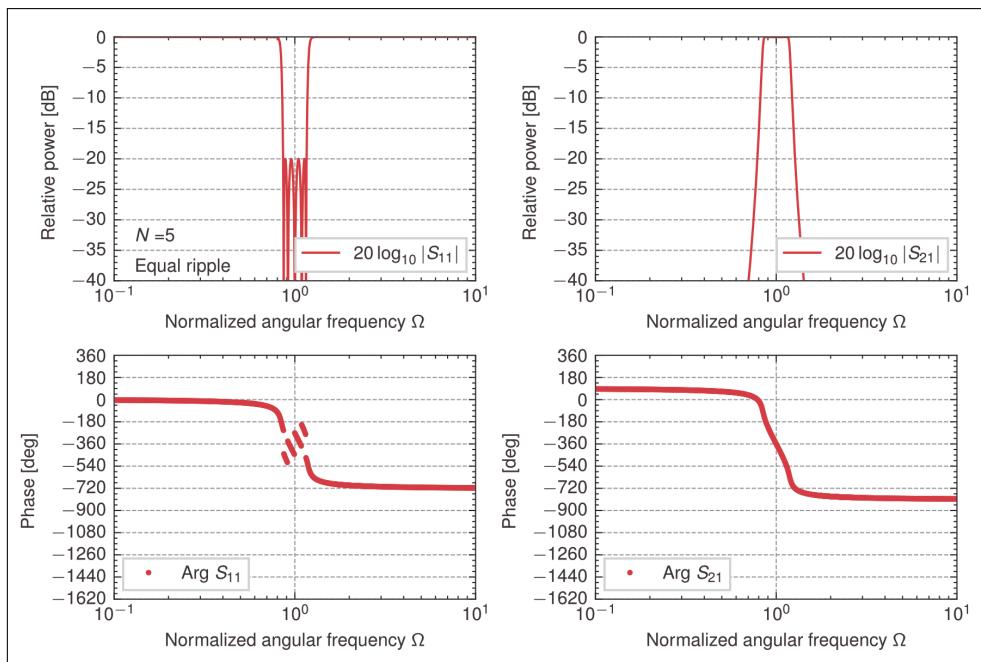


図 8.37. 5 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル帯域通過特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

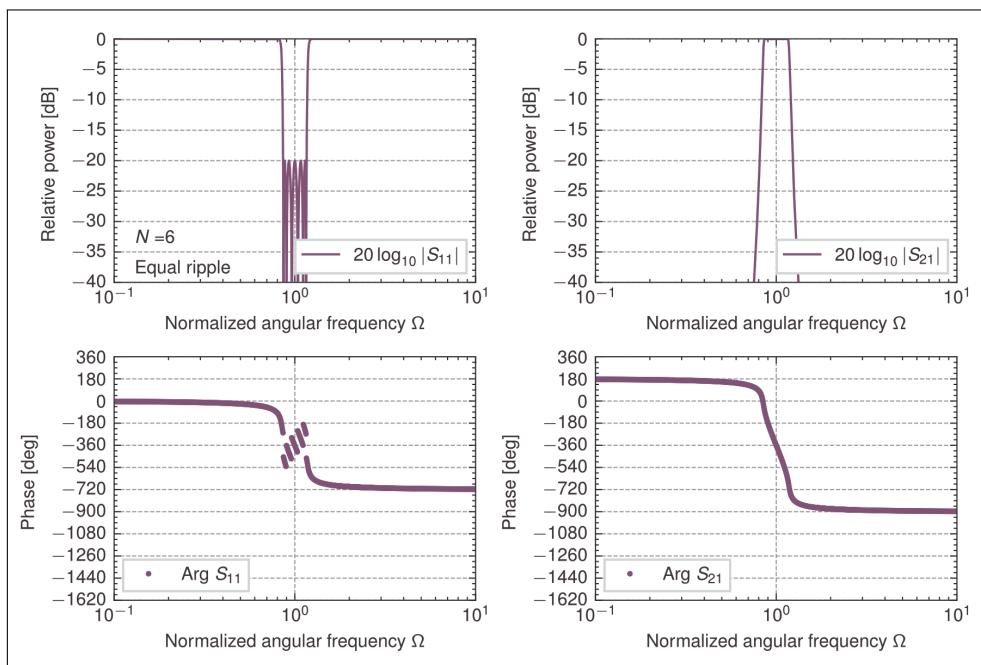


図 8.38. 理想変成器を接続した 6 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル帯域通過特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

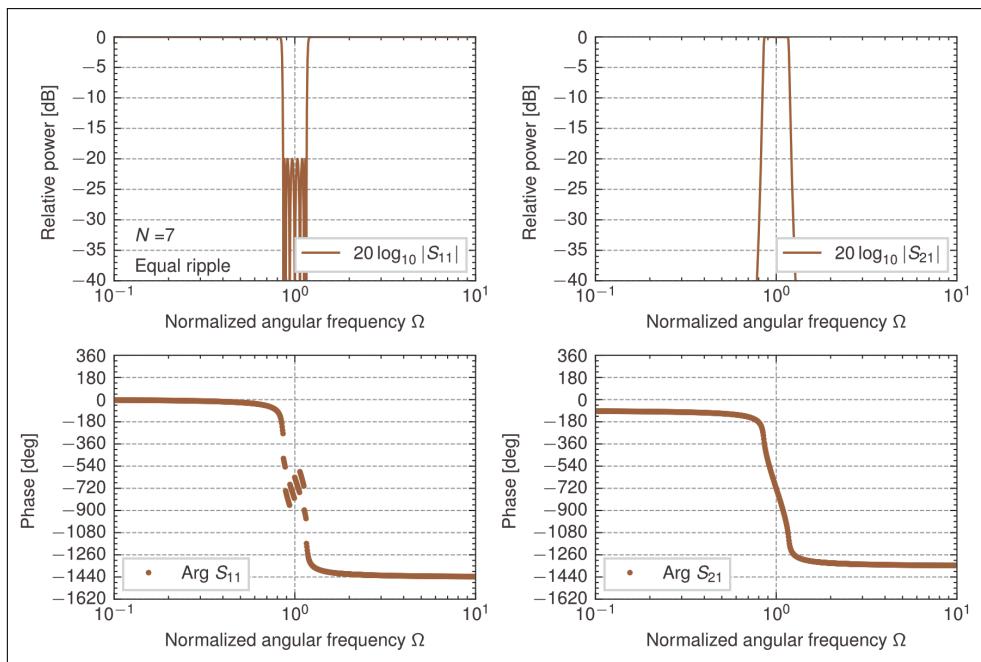


図 8.39. 7 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル帯域通過特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

8.6 周波数変換により求めた等リップル特性を持つ帯域阻止梯子型回路の規格化素子値

帯域阻止フィルタは、周波数変換より、

$$s = \frac{1}{\frac{1}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right)} \quad (8.49)$$

これより、直列素子の正規化インピーダンス z_k は、

$$z_k = sg_k = \frac{g_k}{\frac{1}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right)} = \frac{1}{\hat{s} \frac{1}{Wg_k} + \frac{1}{\hat{s}Wg_k}} \equiv \frac{1}{\hat{s}\hat{c}_k + \frac{1}{\hat{s}\hat{l}_k}} = \frac{1}{\hat{y}_k} \quad (8.50)$$

並列接続された規格化キャパシタンス \hat{c}_k 、規格化インダクタンス \hat{l}_k は（並列共振回路）、

$$\hat{c}_k = \frac{1}{Wg_k} \equiv \hat{g}_k \quad (8.51)$$

$$\hat{l}_k = Wg_k \equiv \hat{g}'_k \quad (8.52)$$

また、並列素子の正規化アドミタンス y_k は、

$$y_k = sg_k = \frac{g_k}{\frac{1}{W} \left(\hat{s} + \frac{1}{\hat{s}} \right)} = \frac{1}{\hat{s} \frac{1}{Wg_k} + \frac{1}{\hat{s}Wg_k}} \equiv \frac{1}{\hat{s}\hat{l}_k + \frac{1}{\hat{s}\hat{c}_k}} = \frac{1}{\hat{z}_k} \quad (8.53)$$

直列接続された規格化キャパシタンス \hat{l}_k 、規格化インダクタンス \hat{c}_k は（直列共振回路）、

$$\hat{l}_k = \frac{1}{Wg_k} \equiv \hat{g}_k \quad (8.54)$$

$$\hat{c}_k = Wg_k \equiv \hat{g}'_k \quad (8.55)$$

したがって、帯域通阻止梯子型回路は双対的な次のような回路となる。

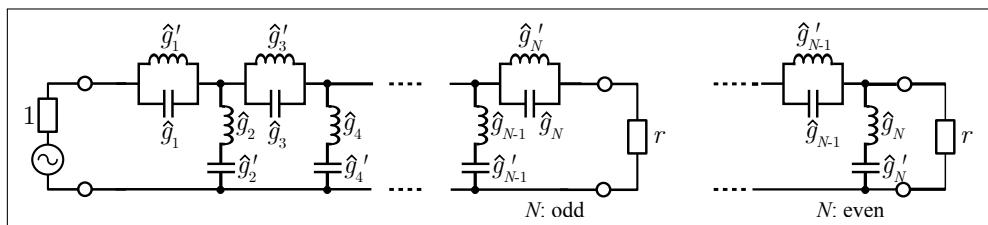


図 8.40. z_{in}^+ により合成した原型低域通過回路を周波数変換した帯域阻止梯子型回路

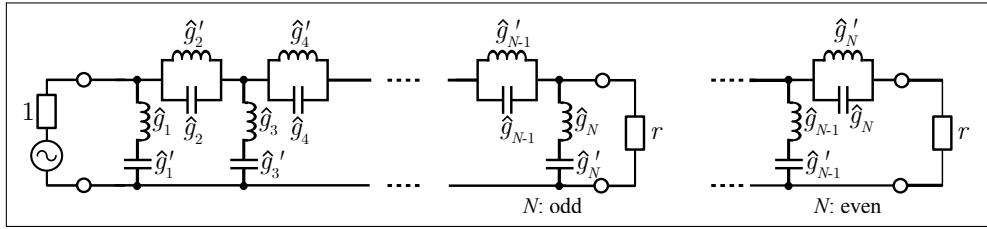


図 8.41. z_{in}^- により合成した原型低域通過回路を周波数変換した帯域阻止梯子型回路

等リップル (0.04365 dB) 帯域 ($W = 0.3$) 素子特性を有する帯域阻止フィルタの規格化素子値 \hat{g}_k を求めると次のようになる。ただし、入力抵抗 $g_0 = 1$ 、終端負荷の素子値は N が奇数のとき $g_{N+1} = 1$ 、 N が偶数のとき $g_{N+1}|_{L_{Ar}=0.04365} = 1.2222$ 。このとき、通過域の反射のピーク値は -20 dB。これより、 $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 、比帯域 $W = 0.3$ について入力イン

表 8.4 等リップル (0.04365 dB) 帯域阻止フィルタ (比帯域 $W = 0.3$) の規格化素子値 \hat{g}_k, \hat{g}'_k

次数 N	\hat{g}_1	\hat{g}_2	\hat{g}_3	\hat{g}_4	\hat{g}_5	\hat{g}_6	\hat{g}_7
2	4.9999	6.1110					
	0.2000	0.1636					
3	3.9056	3.0197	3.9056				
	0.2560	0.3312	0.2560				
4	3.5717	2.5793	2.1103	4.3655			
	0.2800	0.3877	0.4739	0.2291			
5	3.4250	2.4291	1.8486	2.4291	3.4250		
	0.2920	0.4117	0.5410	0.4117	0.2920		
6	3.3473	2.3588	1.7590	2.1499	1.9299	4.0912	
	0.2987	0.4239	0.5685	0.4651	0.5182	0.2444	
7	3.3012	2.3199	1.7169	2.0556	1.7169	2.3199	3.3012
	0.3029	0.4310	0.5824	0.4865	0.5824	0.4310	0.3029

ピーダンス z_{in}^+ で回路合成し、偶数次 $N = 2, 4, 6$ については終端に理想変成器を追加して周波数応答を求めるようになる。

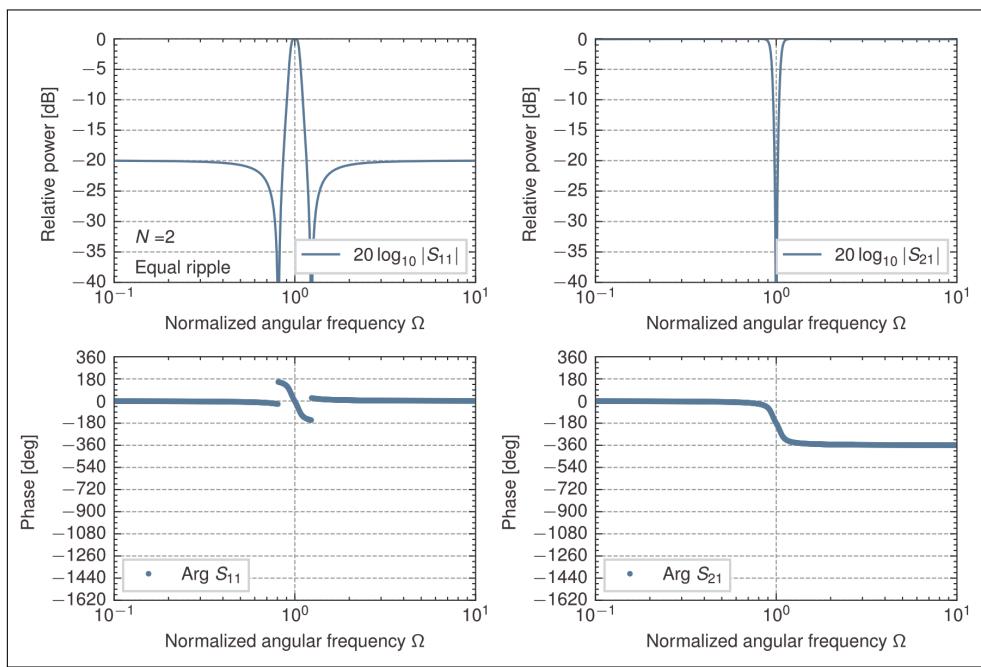


図 8.42. 理想変成器を接続した 2 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル帯域阻止特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

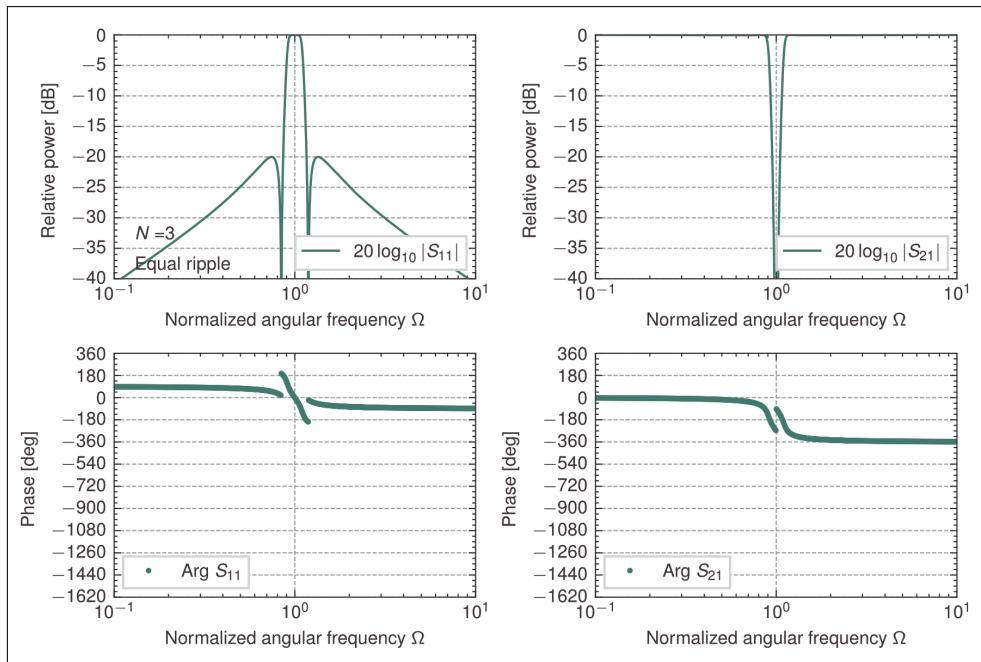


図 8.43. 理想変成器を接続した 3 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル帯域阻止特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

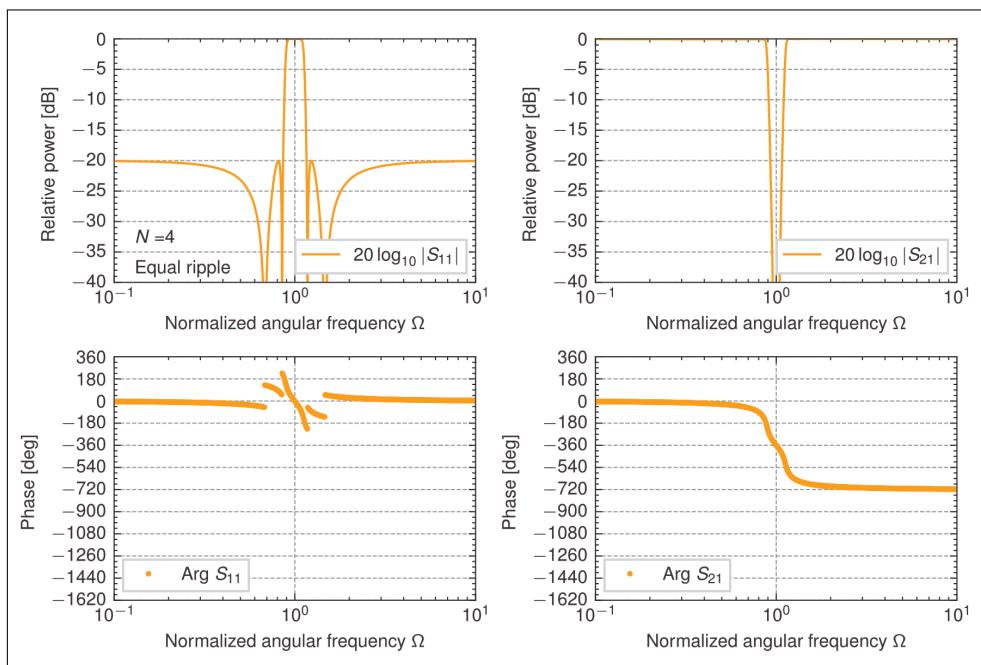


図 8.44. 理想変成器を接続した 4 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル帯域阻止特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

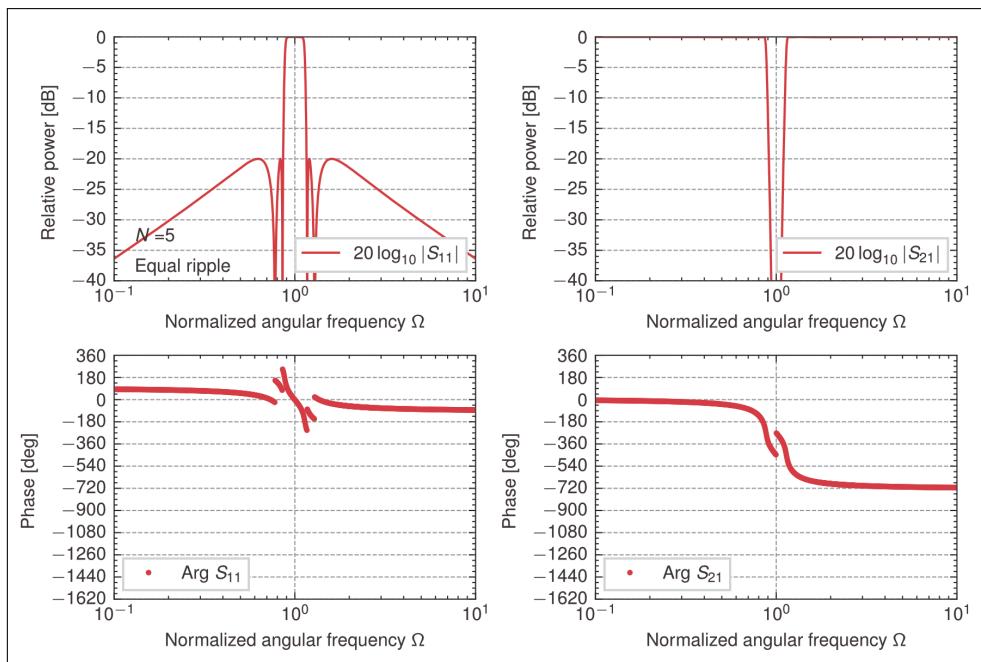


図 8.45. 理想変成器を接続した 5 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル帯域阻止特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

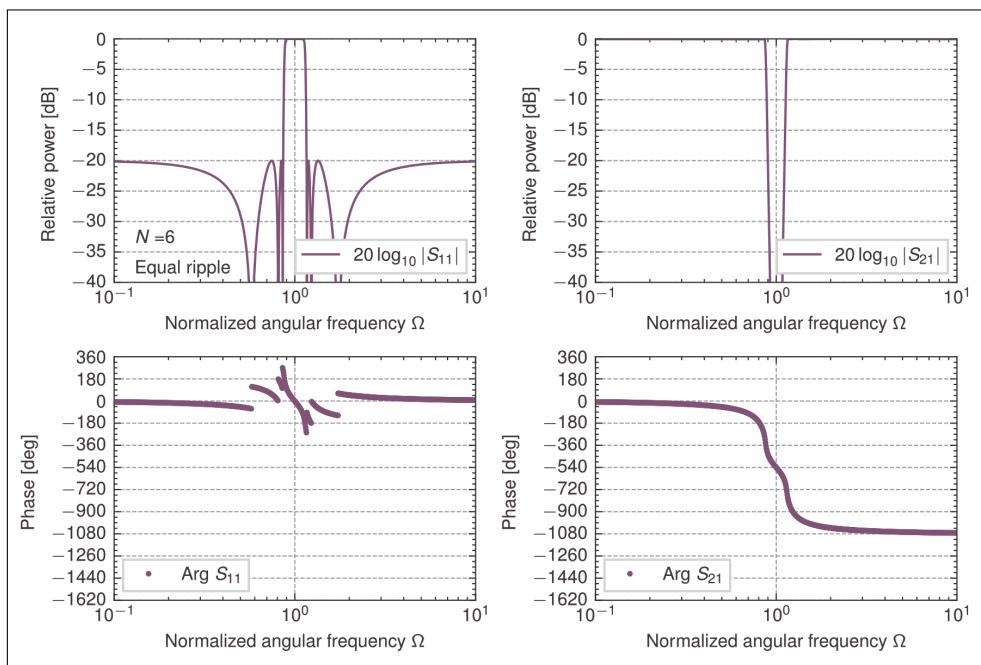


図 8.46. 理想変成器を接続した 6 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル帯域阻止特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

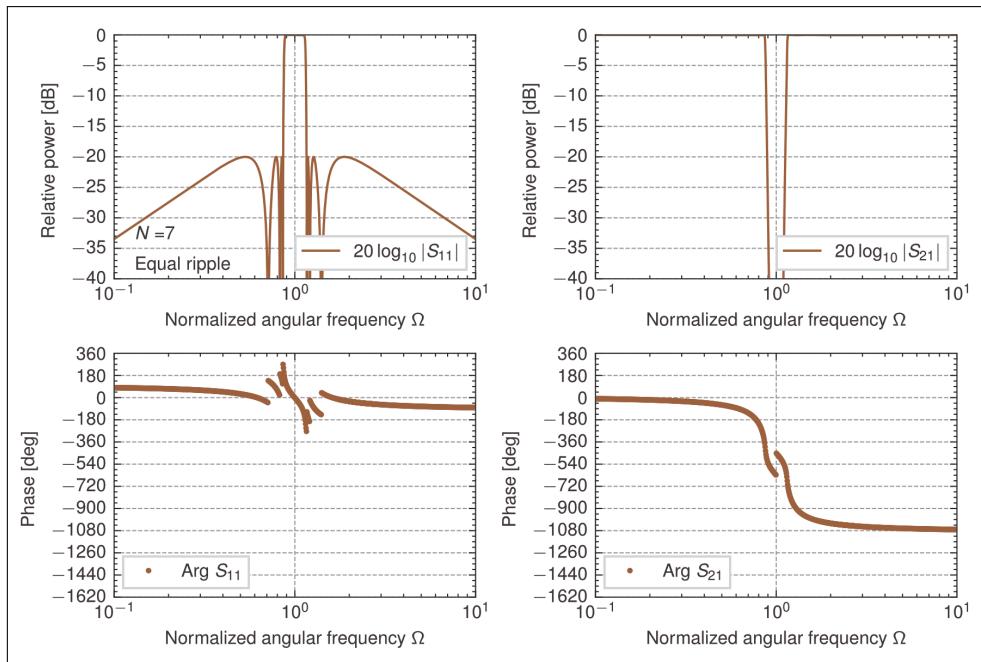


図 8.47. 理想変成器を接続した 7 段梯子型回路の 0.04365dB (反射=−20dB) 等リップル帯域阻止特性 (z_{in}^+ , $W = 0.3$)

参考文献

- [1] G. C. Temes and S. K. Mitra, *Modern Filter Theory and Design*, “Transducer Function, Characteristics Functions,” pp. 14–16, Wiley (1973).
- [2] R. S. Elliott, “An Introduction to Guided Waves and Microwave Circuits,” Prentice Hall (1992).
- [3] Roger F. Harrington, “*Time-Harmonic Electromagnetic Fields*,” Wiley-IEEE Press (2001).
- [4] N. Marcuvitz, ”*Waveguide Handbook*,” The Institution of Engineering and Technology (IEE) (1951).
- [5] Robert E. Collin, “*Foundations for Microwave Engineering*,” 2nd ed., Wiley-IEEE Press (2001).
- [6] G. F. Engen and C. A. Hoer, “Thru-Reflect-Line: An improved technique for calibrating the dual six-port automatic network analyzer,” *IEEE Trans. On Micr. Theory and Tech.*, vol.27, pp.987-993, Dec. (1979).