

多層媒質の電磁界解析と スペクトル領域モーメント法

出口 博之

同志社大学

2025 年 9 月 19 日

目次

第 1 章	多層媒質平面波解析の基礎	1
1.1	平面波の反射波・透過波	1
1.1.1	波数ベクトル	1
1.1.2	TE 波	2
1.1.3	TM 波	3
1.1.4	逆方向の平面波	4
1.1.5	反射波・透過波のまとめ	5
1.2	基本行列	5
1.2.1	接線電界および接線磁界の振幅	5
1.2.2	接線成分に対する規格化	6
1.3	誘電体境界での解析	8
1.3.1	接線電界および接線磁界の振幅	8
1.3.2	散乱行列	10
1.3.3	R マトリクス	11
1.4	縦続接続	13
1.4.1	散乱行列	13
1.4.2	縦続接続ポートの波動振幅	15
1.5	接線電磁界の表示式	15
1.5.1	接線電界の入射波・反射波	15
1.5.2	接線磁界の入射波・反射波	18
1.5.3	透過波	19
1.6	誘電体板による反射・透過	19
1.6.1	単層誘電体板	19
1.6.2	多層誘電体板	20
1.7	地導体のある誘電体板による反射・透過	20
1.7.1	地導体のある単層誘電体板	21

1.7.2	地導体のある多層誘電体板	22
1.8	多層誘電体板中の境界面での反射・透過	23
第 2 章	スペクトル領域電磁界とグリーン関数	25
2.1	スペクトル領域の電磁界	25
2.2	スペクトル領域グリーン関数の簡単な例	28
2.2.1	自由空間におけるスペクトル領域スカラー・グリーン関数	28
2.2.2	スペクトル領域のベクトルポテンシャル	30
2.2.3	自由空間のスペクトル領域ダイアディック・グリーン関数	31
2.3	マイクロストリップ素子	33
2.3.1	マイクロストリップ素子のスペクトル領域の電磁界	34
2.3.2	マイクロストリップ素子のスペクトル領域の電界型ダイアディック・グリーン関数の表示式	39
2.4	モーメント法	40
2.4.1	空間領域における解析	40
2.4.2	スペクトル領域への変換	42
2.4.3	マイクロストリップ・ダイポール素子	43
2.4.4	理想的なプローブ給電のパッチアンテナ	45
2.5	スペクトル領域のベクトルポテンシャル	46
2.5.1	スペクトル領域のベクトルポテンシャルによるスペクトル領域の電磁界	46
2.5.2	面電流分布に対するスペクトル領域の電磁界	48
2.5.3	磁流分布に対するスペクトル領域の電磁界	50
2.5.4	スペクトル領域の磁氣的・電氣的ベクトルポテンシャル	50
2.6	スペクトル領域の基本行列	51
2.6.1	スペクトル領域の磁氣的ベクトルポテンシャルによる TE 波成分	51
2.6.2	スペクトル領域の磁氣的ベクトルポテンシャルによる TM 波成分	52
2.6.3	スペクトル領域の電氣的ベクトルポテンシャルによる TM 波成分	52
2.6.4	スペクトル領域の電氣的ベクトルポテンシャルによる TE 波成分	53
2.6.5	基本行列	54
2.7	スペクトル領域の境界条件	55
2.7.1	面電流源がある場合のスペクトル領域の連続条件	55
2.7.2	面磁流源がある場合のスペクトル領域の連続条件	56
2.8	多層誘電体基板中に面電流源がある場合	56
2.9	地導体板付き多層誘電体基板中に面電流源がある場合	59

2.10	多層誘電体基板の地導体面に磁流源がある場合	61
2.11	面電流源に対するグリーン関数	62
2.11.1	スペクトル領域の電界型ダイアディック・グリーン関数	62
2.11.2	スペクトル領域の磁界型ダイアディック・グリーン関数	63
2.12	面磁流源に対するグリーン関数	64
2.12.1	スペクトル領域の磁界型ダイアディック・グリーン関数	64
2.12.2	スペクトル領域の電界型ダイアディック・グリーン関数	65
2.13	自由空間中の電流素子のスペクトル領域グリーン関数の導出	66
2.14	マイクロストリップ素子のスペクトル領域グリーン関数の導出	67
2.14.1	地導体板付き単層誘電体基板の表面に面電流源がある場合	67
2.14.2	スペクトル領域の電界型ダイアディック・グリーン関数	69
2.14.3	スペクトル領域の磁界型ダイアディック・グリーン関数	71
2.15	スロット素子のスペクトル領域グリーン関数の導出	72
2.15.1	単層誘電体基板の地導体面に磁流源がある場合	73
2.15.2	スペクトル領域の磁界型ダイアディック・グリーン関数	73
2.15.3	スペクトル領域の電界型ダイアディック・グリーン関数	74
第 3 章	周期境界条件とフロケモード展開	77
3.1	四角配列の周期境界条件	77
3.2	三角配列の周期境界条件	79
3.3	ベクトル・フロケモード関数	81
3.3.1	TE 波	81
3.3.2	TM 波	83
3.4	フロケモード展開	84
3.4.1	接線電磁界のフロケモードによる展開	84
3.4.2	面電磁流分布のフロケモードによる展開	85
3.4.3	散乱電磁界の表示式	86
3.5	周期グリーン関数	87
第 4 章	スペクトル領域 MoM と FSS の解析	89
4.1	自立型 FSS (Frequency Selective Surface)	89
4.1.1	導体パッチアレーによる散乱電界	89
4.1.2	導体パッチアレーを誘電体で支持しない FSS	90
4.2	マイクロストリップ・リフレクト無限アレー	94
4.3	導体素子を誘電体基板中に装荷した FSS	96

4.4	反射係数	98
4.5	透過係数	99
4.6	周期構造の多モード散乱行列	101
4.7	Roof-top 型部分領域基底関数による高速化	108
4.8	スロット結合パッチアレー FSS	115
4.8.1	ガラーキン法	119

CHAPTER 1

多層媒質平面波解析の基礎

多層媒質における平面波の解析，特に電磁波の反射と透過を扱う理論を詳細に解説する．まず， TE 波と TM 波に対する電界・磁界の接線成分を，進行波と後退波の重ね合わせとして定式化する．この解析は，電磁界を伝送線路のアナロジーで扱うための基礎となり，電界と磁界の振幅が分布定数線路の電圧と電流に相当する形で表すことができる．さらに，誘電体の境界面における連続条件とスネルの法則を適用し，多層構造の解析に不可欠な基本行列，散乱行列の要素を導出していく．そして，これらの行列を用いることで，単層または多層の誘電体板による電磁波の反射係数や透過係数が計算可能となり，複雑な積層構造における波動現象を効率的に解析できよう．

1.1 平面波の反射波・透過波

1.1.1 波数ベクトル

異なる 2 つの媒質の境界面が xy 面となっており， $z < 0$ から

$$e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{-j(\mathbf{k}_t + k_z\mathbf{u}_z)\cdot\mathbf{r}} \quad (1.1)$$

で表される平面波が入射するとき，反射波は，

$$e^{-j(\mathbf{k}_t - k_z\mathbf{u}_z)\cdot\mathbf{r}} \quad (1.2)$$

で表される．

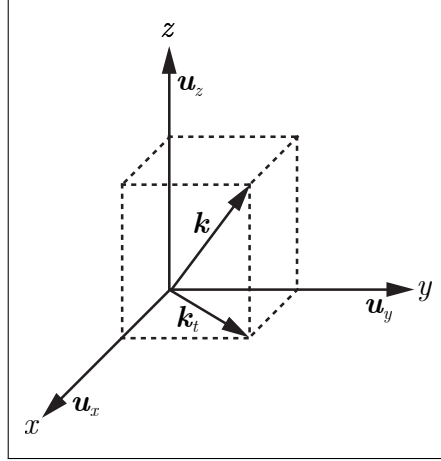


図 1.1. 波数ベクトル

1.1.2 TE 波

TE 波の接線電界 $\mathbf{E}_t^{\text{TE}}$, および接線磁界 $\mathbf{H}_t^{\text{TE}}$ は,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t^{\text{TE}} &= F^+ \frac{jk_t}{\epsilon} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-jk_z z} + F^- \frac{jk_t}{\epsilon} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{jk_z z} \\ &= \frac{jk_t}{\epsilon} (F^+ e^{-jk_z z} + F^- e^{jk_z z}) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}\end{aligned}\quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_t^{\text{TE}} &= F^+ \frac{jk_t}{\epsilon} Y_{\text{TE}} \mathbf{u}_t e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-jk_z z} + F^- \frac{jk_t}{\epsilon} (-Y_{\text{TE}}) \mathbf{u}_t e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{jk_z z} \\ &= \frac{jk_t}{\epsilon} Y_{\text{TE}} (F^+ e^{-jk_z z} - F^- e^{jk_z z}) \mathbf{u}_t e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}\end{aligned}\quad (1.4)$$

ただし, $e^{-jk_z z}$ の項の係数の添字を +, $e^{+jk_z z}$ の項の係数の添字を - としている. さて,

$$\frac{jk_t}{\epsilon} (F^+ e^{-jk_z z} + F^- e^{jk_z z}) \equiv V_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} + V_{\text{TE}}^- e^{jk_z z} \quad (1.5)$$

とおくと,

$$Y_{\text{TE}} \frac{jk_t}{\epsilon} (F^+ e^{-jk_z z} - F^- e^{jk_z z}) = Y_{\text{TE}} (V_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} - V_{\text{TE}}^- e^{jk_z z}) \quad (1.6)$$

これより,

$$\mathbf{E}_t^{\text{TE}} = (V_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} + V_{\text{TE}}^- e^{jk_z z}) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \equiv V_{\text{TE}}(z) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{H}_t^{\text{TE}} = Y_{\text{TE}} (V_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} - V_{\text{TE}}^- e^{jk_z z}) \mathbf{u}_t e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \equiv I_{\text{TE}}(z) \mathbf{u}_t e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.8)$$

ここで,

$$V_{\text{TE}}(z) = V_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} + V_{\text{TE}}^- e^{jk_z z} \quad (1.9)$$

$$I_{\text{TE}}(z) = Y_{\text{TE}} (V_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} - V_{\text{TE}}^- e^{jk_z z}) \quad (1.10)$$

このとき、TE 波の磁界 $\mathbf{H}^{\text{TE}}$ は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^{\text{TE}} &= Y_w \mathbf{u}_r \times \mathbf{E}_{t+}^{\text{TE}} - Y_w \mathbf{u}_r \times \mathbf{E}_{t-}^{\text{TE}} \\
&= Y_w \mathbf{u}_r \times \left(V_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} - V_{\text{TE}}^- e^{jk_z z} \right) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \\
&= \frac{k}{k_z} I_{\text{TE}}(z) \mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

1.1.3 TM 波

また、TM 波の接線電界 $\mathbf{E}_t^{\text{TM}}$ ，および接線磁界 $\mathbf{H}_t^{\text{TM}}$ は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_t^{\text{TM}} &= A^+ \frac{jk_t}{\mu} Z_{\text{TM}} \mathbf{u}_t e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-jk_z z} + A^- \frac{jk_t}{\mu} (-Z_{\text{TM}}) \mathbf{u}_t e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{jk_z z} \\
&= \frac{jk_t}{\mu} Z_{\text{TM}} \left(A^+ e^{-jk_z z} - A^- e^{jk_z z} \right) \mathbf{u}_t e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_t^{\text{TM}} &= -A^+ \frac{jk_t}{\mu} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-jk_z z} - A^- \frac{jk_t}{\mu} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{jk_z z} \\
&= -\frac{jk_t}{\mu} \left(A^+ e^{-jk_z z} + A^- e^{jk_z z} \right) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

同様にして、

$$\frac{jk_t}{\mu} Z_{\text{TM}} \left(A^+ e^{-jk_z z} - A^- e^{jk_z z} \right) \equiv V_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} + V_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \tag{1.14}$$

とおくと、

$$\frac{jk_t}{\mu} \left(A^+ e^{-jk_z z} + A^- e^{jk_z z} \right) = Y_{\text{TM}} \left(V_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} - V_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \right) \tag{1.15}$$

これより、

$$\mathbf{E}_t^{\text{TM}} = \left(V_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} + V_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \right) \mathbf{u}_t e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \equiv V_{\text{TM}}(z) \mathbf{u}_t e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \tag{1.16}$$

$$\mathbf{H}_t^{\text{TM}} = -Y_{\text{TM}} \left(V_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} - V_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \right) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \equiv -I_{\text{TM}}(z) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \tag{1.17}$$

ここで、

$$V_{\text{TM}}(z) = V_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} + V_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \tag{1.18}$$

$$I_{\text{TM}}(z) = Y_{\text{TM}} \left(V_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} - V_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \right) \tag{1.19}$$

このとき、TM 波の電界 $\mathbf{E}^{\text{TM}}$ は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\text{TM}} &= -Z_w \mathbf{u}_r \times \mathbf{H}_{t+}^{\text{TM}} + Z_w \mathbf{u}_r \times \mathbf{H}_{t-}^{\text{TM}} \\
&= Z_w \mathbf{u}_r \times Y_{\text{TM}} \left(V_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} + V_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \right) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \\
&= \frac{k}{k_z} V_{\text{TM}}(z) \mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

1.1.4 逆方向の平面波

逆に、 $z > 0$ から $e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{j(\mathbf{k}_t + k_z \mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{r}}$ で表される平面波が入射するとき、反射波は $e^{j(\mathbf{k}_t - k_z \mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{r}}$ で表される。この場合、上で求めた結果を、 $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ として、TE 波の接線電界 $\mathbf{E}_t^{\text{TE}}$ 、および接線磁界 $\mathbf{H}_t^{\text{TE}}$ は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_t^{\text{TE}} &= F^{-'} \frac{-jk_t}{\epsilon} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{jk_z z} + F^{+'} \frac{-jk_t}{\epsilon} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-jk_z z} \\
&= -\frac{jk_t}{\epsilon} \left(F^{+'} e^{-jk_z z} + F^{-'} e^{jk_z z} \right) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_t^{\text{TE}} &= F^{-'} \frac{-jk_t}{\epsilon} (-Y_{\text{TE}}) \mathbf{u}_t e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{jk_z z} + F^{+'} \frac{-jk_t}{\epsilon} Y_{\text{TE}} \mathbf{u}_t e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-jk_z z} \\
&= -\frac{jk_t}{\epsilon} Y_{\text{TE}} \left(F^{+'} e^{-jk_z z} - F^{-'} e^{jk_z z} \right) \mathbf{u}_t e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

いま、

$$-\frac{jk_t}{\epsilon} \left(F^{+'} e^{-jk_z z} + F^{-'} e^{jk_z z} \right) \equiv V_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} + V_{\text{TE}}^- e^{jk_z z} \tag{1.23}$$

とおくと、

$$-Y_{\text{TE}} \frac{jk_t}{\epsilon} \left(F^{+'} e^{-jk_z z} - F^{-'} e^{jk_z z} \right) = Y_{\text{TE}} \left(V_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} - V_{\text{TE}}^- e^{jk_z z} \right) \tag{1.24}$$

これより、

$$\mathbf{E}_t^{\text{TE}} = V_{\text{TE}}(z) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \tag{1.25}$$

$$\mathbf{H}_t^{\text{TE}} = I_{\text{TE}}(z) \mathbf{u}_t e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \tag{1.26}$$

また、TM 波の接線電界 $\mathbf{E}_t^{\text{TM}}$ 、および接線磁界 $\mathbf{H}_t^{\text{TM}}$ は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_t^{\text{TM}} &= A^{-'} \frac{-jk_t}{\mu} (-Z_{\text{TM}}) \mathbf{u}_t e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{jk_z z} + A^{-'} \frac{-jk_t}{\mu} Z_{\text{TM}} \mathbf{u}_t e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-jk_z z} \\
&= -\frac{jk_t}{\mu} Z_{\text{TM}} \left(A^{+'} e^{-jk_z z} - A^{-'} e^{jk_z z} \right) \mathbf{u}_t e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_t^{\text{TM}} &= -A^{-'} \frac{-jk_t}{\mu} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{jk_z z} - A^{+'} \frac{-jk_t}{\mu} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-jk_z z} \\
&= \frac{jk_t}{\mu} \left(A^{+'} e^{-jk_z z} + A^{-'} e^{jk_z z} \right) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}
\end{aligned} \tag{1.28}$$

同様にして,

$$-\frac{jk_t}{\mu} Z_{\text{TM}} \left(A^{+'} e^{-jk_z z} - A^{-'} e^{jk_z z} \right) \equiv V_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} + V_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \quad (1.29)$$

とおくと,

$$-\frac{jk_t}{\mu} \left(A^{+'} e^{-jk_z z} + A^{-'} e^{jk_z z} \right) = Y_{\text{TM}} \left(V_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} - V_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \right) \quad (1.30)$$

これより,

$$\mathbf{E}_t^{\text{TM}} = V_{\text{TM}}(z) \mathbf{u}_t e^{jk_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.31)$$

$$\mathbf{H}_t^{\text{TM}} = -I_{\text{TM}}(z) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{jk_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.32)$$

1.1.5 反射波・透過波のまとめ

$z=0$ (上側符号), $z < 0$ (下側符号) の入射波に対する表示式をまとめると次のようになる.

$$\mathbf{E}_t^{\text{TE}} = V_{\text{TE}}(z) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{\mp jk_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.33)$$

$$\mathbf{H}_t^{\text{TE}} = I_{\text{TE}}(z) \mathbf{u}_t e^{\mp jk_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.34)$$

$$\mathbf{E}_t^{\text{TM}} = V_{\text{TM}}(z) \mathbf{u}_t e^{\mp jk_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.35)$$

$$\mathbf{H}_t^{\text{TM}} = -I_{\text{TM}}(z) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{\mp jk_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.36)$$

上式より, $V_{\text{TE}}(z)$ と $V_{\text{TM}}(z)$, $I_{\text{TE}}(z)$ と $I_{\text{TM}}(z)$ は同じ形の式で表されていることがわかる. 添字を省略すると次のように分布定数線路と同じ形の式となる.

$$V(z) = V^+ e^{-jk_z z} + V^- e^{jk_z z} \quad (1.37)$$

$$I(z) = I^+ e^{-jk_z z} - I^- e^{jk_z z} = Y \left(V^+ e^{-jk_z z} - V^- e^{jk_z z} \right) \quad (1.38)$$

1.2 基本行列

1.2.1 接線電界および接線磁界の振幅

xy 面 (境界面) 上の接線電界および接線磁界は, TE 波および TM 波の入射波 (あるいは透過波) と反射波の和によって表され次のようになる.

$$\mathbf{E}_{\text{tan}} = \left\{ V_{\text{TE}}(z) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + V_{\text{TM}}(z) \mathbf{u}_t \right\} e^{\mp jk_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.39)$$

$$\mathbf{H}_{\text{tan}} = \left\{ I_{\text{TE}}(z) \mathbf{u}_t - I_{\text{TM}}(z) (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \right\} e^{\mp jk_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.40)$$

ここで,

$$V_{\text{TE}}(z) = V_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} + V_{\text{TE}}^- e^{jk_z z} \quad (1.41)$$

$$I_{\text{TE}}(z) = Y_{\text{TE}} \left(V_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} - V_{\text{TE}}^- e^{jk_z z} \right) \quad (1.42)$$

$$V_{\text{TM}}(z) = V_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} + V_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \quad (1.43)$$

$$I_{\text{TM}}(z) = Y_{\text{TM}} \left(V_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} - V_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \right) \quad (1.44)$$

上式より, $z = z_1, z_2$ に対する TE 波の基本行列 $[\mathbf{F}_{\text{TE}}]$, ならびには TM 波の基本行列 $[\mathbf{F}_{\text{TM}}]$ は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} V_{\text{TE}}(z_1) \\ I_{\text{TE}}(z_1) \end{pmatrix} = [\mathbf{F}_{\text{TE}}] \begin{pmatrix} V_{\text{TE}}(z_2) \\ I_{\text{TE}}(z_2) \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

$$\begin{pmatrix} V_{\text{TM}}(z_1) \\ I_{\text{TM}}(z_1) \end{pmatrix} = [\mathbf{F}_{\text{TM}}] \begin{pmatrix} V_{\text{TM}}(z_2) \\ I_{\text{TM}}(z_2) \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

ここで,

$$[\mathbf{F}_{\text{TM}}^{(\text{TE})}] = \begin{pmatrix} \cos k_z(z_2 - z_1) & jZ_{\text{TM}}^{(\text{TE})} \sin k_z(z_2 - z_1) \\ jY_{\text{TM}}^{(\text{TE})} \sin k_z(z_2 - z_1) & \cos k_z(z_2 - z_1) \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

あるいは, $z_2 = z_1 + d$ のとき,

$$[\mathbf{F}_{\text{TM}}^{(\text{TE})}] = \begin{pmatrix} \cos k_z d & jZ_{\text{TM}}^{(\text{TE})} \sin k_z d \\ jY_{\text{TM}}^{(\text{TE})} \sin k_z d & \cos k_z d \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

1.2.2 接線成分に対する規格化

係数を次のように規格化し,

$$\bar{V}_{\text{TE}}^\pm \equiv \sqrt{Y_{\text{TE}}} V_{\text{TE}}^\pm, \quad \bar{I}_{\text{TE}}^\pm \equiv \sqrt{Z_{\text{TE}}} I_{\text{TE}}^\pm, \quad (1.49)$$

$$\bar{V}_{\text{TM}}^\pm \equiv \sqrt{Y_{\text{TM}}} V_{\text{TM}}^\pm, \quad \bar{I}_{\text{TM}}^\pm \equiv \sqrt{Z_{\text{TM}}} I_{\text{TM}}^\pm \quad (1.50)$$

さらに次のようにおく.

$$V_{\text{TE}}(z) = \sqrt{Z_{\text{TE}}} \left(\bar{V}_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} + \bar{V}_{\text{TE}}^- e^{jk_z z} \right) \equiv \sqrt{Z_{\text{TE}}} \bar{V}_{\text{TE}}(z) \quad (1.51)$$

$$V_{\text{TM}}(z) = \sqrt{Z_{\text{TM}}} \left(\bar{V}_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} + \bar{V}_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \right) \equiv \sqrt{Z_{\text{TM}}} \bar{V}_{\text{TM}}(z) \quad (1.52)$$

$$I_{\text{TE}}(z) = \sqrt{Y_{\text{TE}}} \left(\bar{I}_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} - \bar{I}_{\text{TE}}^- e^{jk_z z} \right) \equiv \sqrt{Y_{\text{TE}}} \bar{I}_{\text{TE}}(z) \quad (1.53)$$

$$I_{\text{TM}}(z) = \sqrt{Y_{\text{TM}}} \left(\bar{I}_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} - \bar{I}_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \right) \equiv \sqrt{Y_{\text{TM}}} \bar{I}_{\text{TM}}(z) \quad (1.54)$$

これより、接線電磁界は、

$$\mathbf{E}_{\text{tan}} = \left\{ \bar{V}_{\text{TE}}(z) \sqrt{Z_{\text{TE}}} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + \bar{V}_{\text{TM}}(z) \sqrt{Z_{\text{TM}}} \mathbf{u}_t \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.55)$$

$$\mathbf{H}_{\text{tan}} = \left\{ \bar{I}_{\text{TE}}(z) \sqrt{Y_{\text{TE}}} \mathbf{u}_t - \bar{I}_{\text{TM}}(z) \sqrt{Y_{\text{TM}}} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.56)$$

ただし、TE 波、TM 波ともに次のような関係がある (TE, TM の添字省略).

$$\bar{V} = \bar{V}^+ e^{-jk_z z} + \bar{V}^- e^{jk_z z} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \bar{I}^+ e^{-jk_z z} - \bar{I}^- e^{jk_z z} = \sqrt{Z} (I^+ e^{-jk_z z} - I^- e^{jk_z z}) \\ &= \sqrt{Z} Y (V^+ e^{-jk_z z} - V^- e^{jk_z z}) = \sqrt{Z} Y \sqrt{Z} (\bar{V}^+ e^{-jk_z z} - \bar{V}^- e^{jk_z z}) \\ &= \bar{V}^+ e^{-jk_z z} - \bar{V}^- e^{jk_z z} \end{aligned} \quad (1.58)$$

そして、電磁界の接線成分からなるモード関数を次式で定義する.

$$\bar{\mathbf{e}}_{\text{TE}}(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{Z_{\text{TE}}} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.59)$$

$$\bar{\mathbf{h}}_{\text{TE}}(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{Y_{\text{TE}}} \mathbf{u}_t e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.60)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_{\text{TM}}(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{Z_{\text{TM}}} \mathbf{u}_t e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.61)$$

$$\bar{\mathbf{h}}_{\text{TM}}(\boldsymbol{\rho}) = -\sqrt{Y_{\text{TM}}} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.62)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_{\text{TE}} \times \bar{\mathbf{h}}_{\text{TE}}^* &= \left\{ \sqrt{Z_{\text{TE}}} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \right\} \times \left\{ \left(\sqrt{Y_{\text{TE}}} \right)^* \mathbf{u}_t e^{\pm j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \right\} \\ &= \sqrt{Z_{\text{TE}}} \left(\sqrt{Y_{\text{TE}}} \right)^* \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_{\text{TM}} \times \bar{\mathbf{h}}_{\text{TM}}^* &= \left\{ \sqrt{Z_{\text{TM}}} \mathbf{u}_t e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \right\} \times \left\{ - \left(\sqrt{Y_{\text{TM}}} \right)^* (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) e^{\pm j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \right\} \\ &= \sqrt{Z_{\text{TM}}} \left(\sqrt{Y_{\text{TM}}} \right)^* \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (1.64)$$

ただし、* は複素共役を示す. このように、TE 波、TM 波ともに同様の形の式となるので、添字を省略して、

$$\bar{\mathbf{e}} \times \bar{\mathbf{h}}^* = \sqrt{Z} \left(\sqrt{Y} \right)^* \mathbf{u}_z \quad (1.65)$$

いま、 $Z \equiv |Z| e^{j\varphi}$ とおくと、 $Y = 1/Z = 1/|Z| e^{-j\varphi}$. これより、

$$\bar{\mathbf{e}} \times \bar{\mathbf{h}}^* = \sqrt{Z} \left(\sqrt{Y} \right)^* \mathbf{u}_z = (|Z| e^{j\varphi})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{|Z|} e^{-j\varphi} \right)^{\frac{1}{2}*} \mathbf{u}_z = e^{j\varphi} \mathbf{u}_z \quad (1.66)$$

なお、 Z が実数のとき、

$$\bar{\mathbf{e}}_{\text{TE}} \times \bar{\mathbf{h}}_{\text{TE}}^* = \bar{\mathbf{e}}_{\text{TM}} \times \bar{\mathbf{h}}_{\text{TM}}^* = \mathbf{u}_z \quad (1.67)$$

これより,

$$\mathbf{E}_{\text{tan}} = \bar{V}_{\text{TE}}(z)\bar{\mathbf{e}}_{\text{TE}}(\boldsymbol{\rho}) + \bar{V}_{\text{TM}}(z)\bar{\mathbf{e}}_{\text{TM}}(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.68)$$

$$\mathbf{H}_{\text{tan}} = \bar{I}_{\text{TE}}(z)\bar{\mathbf{h}}_{\text{TE}}(\boldsymbol{\rho}) + \bar{I}_{\text{TM}}(z)\bar{\mathbf{h}}_{\text{TM}}(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.69)$$

ここで,

$$\bar{V}_{\text{TE}}(z) = \bar{V}_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} + \bar{V}_{\text{TE}}^- e^{jk_z z} \quad (1.70)$$

$$\bar{V}_{\text{TM}}(z) = \bar{V}_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} + \bar{V}_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \quad (1.71)$$

$$\bar{I}_{\text{TE}}(z) = \bar{V}_{\text{TE}}^+ e^{-jk_z z} - \bar{V}_{\text{TE}}^- e^{jk_z z} \quad (1.72)$$

$$\bar{I}_{\text{TM}}(z) = \bar{V}_{\text{TM}}^+ e^{-jk_z z} - \bar{V}_{\text{TM}}^- e^{jk_z z} \quad (1.73)$$

伝送線路と同様の考え方で, $\bar{V}_{\text{TE}}^+$, $\bar{V}_{\text{TE}}^-$ を用いて TE 波に対する散乱行列, また, $\bar{V}_{\text{TM}}^+$, $\bar{V}_{\text{TM}}^-$ を用いて TM 波に対する散乱行列を各々定義することができる.

1.3 誘電体境界での解析

1.3.1 接線電界および接線磁界の振幅

次のように 2 つの媒質があり, $z = d$ を境界面とする.

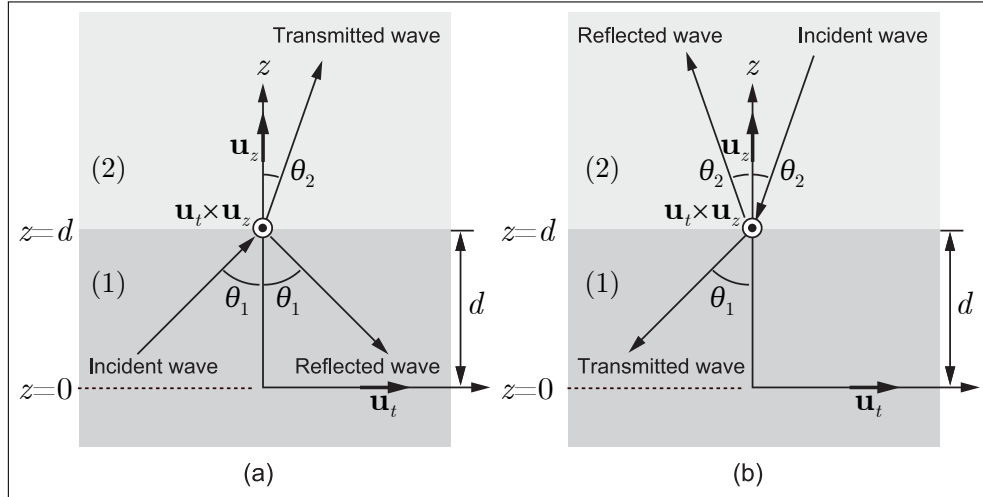


図 1.2. 入射波・反射波・透過波

$z < d$ (領域 1) での接線電界 $\mathbf{E}_{\text{tan}}^{(1)}$, 接線磁界 $\mathbf{H}_{\text{tan}}^{(1)}$ は,

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}^{(1)} = \left\{ V_{1\text{TE}}(z)(\mathbf{u}_{t1} \times \mathbf{u}_z) + V_{1\text{TM}}(z)\mathbf{u}_{t1} \right\} e^{\mp j\mathbf{k}_{t1} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.74)$$

$$\mathbf{H}_{\text{tan}}^{(1)} = \left\{ I_{1\text{TE}}(z)\mathbf{u}_{t1} - I_{1\text{TM}}(z)(\mathbf{u}_{t1} \times \mathbf{u}_z) \right\} e^{\mp j\mathbf{k}_{t1} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.75)$$

ここで,

$$V_{1\text{TE}}(z) = V_{1\text{TE}}^+ e^{-jk_{z1}z} + V_{1\text{TE}}^- e^{jk_{z1}z} \quad (1.76)$$

$$I_{1\text{TE}}(z) = Y_{1\text{TE}} \left(V_{1\text{TE}}^+ e^{-jk_{z1}z} - V_{1\text{TE}}^- e^{jk_{z1}z} \right) \quad (1.77)$$

$$V_{1\text{TM}}(z) = V_{1\text{TM}}^+ e^{-jk_{z1}z} + V_{1\text{TM}}^- e^{jk_{z1}z} \quad (1.78)$$

$$I_{1\text{TM}}(z) = Y_{1\text{TM}} \left(V_{1\text{TM}}^+ e^{-jk_{z1}z} - V_{1\text{TM}}^- e^{jk_{z1}z} \right) \quad (1.79)$$

一方, zd (領域 2) での接線電界 $\mathbf{E}_{\text{tan}}^{(2)}$, 接線磁界 $\mathbf{H}_{\text{tan}}^{(2)}$ は,

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}^{(2)} = \left\{ V_{2\text{TE}}(z)(\mathbf{u}_{t2} \times \mathbf{u}_z) + V_{2\text{TM}}(z)\mathbf{u}_{t2} \right\} e^{\mp j\mathbf{k}_{t2} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.80)$$

$$\mathbf{H}_{\text{tan}}^{(2)} = \left\{ I_{2\text{TE}}(z)\mathbf{u}_{t2} - I_{2\text{TM}}(z)(\mathbf{u}_{t2} \times \mathbf{u}_z) \right\} e^{\mp j\mathbf{k}_{t2} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.81)$$

ここで,

$$V_{2\text{TE}}(z) = V_{2\text{TE}}^+ e^{-jk_{z2}(z-d)} + V_{2\text{TE}}^- e^{jk_{z2}(z-d)} \quad (1.82)$$

$$I_{2\text{TE}}(z) = Y_{2\text{TE}} \left(V_{2\text{TE}}^+ e^{-jk_{z2}(z-d)} - V_{2\text{TE}}^- e^{jk_{z2}(z-d)} \right) \quad (1.83)$$

$$V_{2\text{TM}}(z) = V_{2\text{TM}}^+ e^{-jk_{z2}(z-d)} + V_{2\text{TM}}^- e^{jk_{z2}(z-d)} \quad (1.84)$$

$$I_{2\text{TM}}(z) = Y_{2\text{TM}} \left(V_{2\text{TM}}^+ e^{-jk_{z2}(z-d)} - V_{2\text{TM}}^- e^{jk_{z2}(z-d)} \right) \quad (1.85)$$

これより, $z = 0$ での接線電磁界は,

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}^{(1)} \Big|_{z=0} = \left\{ (V_{1\text{TE}}^+ + V_{1\text{TE}}^-)(\mathbf{u}_{t1} \times \mathbf{u}_z) + (V_{1\text{TM}}^+ + V_{1\text{TM}}^-)\mathbf{u}_{t1} \right\} e^{\mp j\mathbf{k}_{t1} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.86)$$

$$\mathbf{H}_{\text{tan}}^{(1)} \Big|_{z=0} = \left\{ Y_{1\text{TE}}(V_{1\text{TE}}^+ - V_{1\text{TE}}^-)\mathbf{u}_{t1} - Y_{1\text{TM}}(V_{1\text{TM}}^+ - V_{1\text{TM}}^-)(\mathbf{u}_{t1} \times \mathbf{u}_z) \right\} e^{\mp j\mathbf{k}_{t1} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.87)$$

また, $z = d$ での接線電磁界の連続条件より,

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}^{(1)} \Big|_{z=d} = \mathbf{E}_{\text{tan}}^{(2)} \Big|_{z=d} \quad (1.88)$$

$$\mathbf{H}_{\text{tan}}^{(1)} \Big|_{z=d} = \mathbf{H}_{\text{tan}}^{(2)} \Big|_{z=d} \quad (1.89)$$

任意の x, y で成り立つためには,

$$e^{\mp j\mathbf{k}_{t1} \cdot \boldsymbol{\rho}} = e^{\mp j\mathbf{k}_{t2} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.90)$$

でなければならない. よって,

$$\mathbf{k}_{t1} = \mathbf{k}_{t2} \quad (1.91)$$

いま，入射角を (θ_i, ϕ_i) とし， $\mathbf{k}_{t1} = k_{t1}\mathbf{u}_{t1}$ ， $\mathbf{k}_{t2} = k_{t2}\mathbf{u}_{t2}$ とおくと， $k_{t1} = k_1 \sin \theta_1$ ， $k_{t2} = k_2 \sin \theta_2$ ゆえ，

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (1.92)$$

が得られる（スネルの法則）．また， $\mathbf{u}_{t1} = \mathbf{u}_{t2} \equiv \mathbf{u}_t$ より， $\mathbf{u}_{t1} \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_{t2} \times \mathbf{u}_z$ （単位ベクトル）となるので，

$$\begin{aligned} & (V_{1\text{TE}}^+ e^{-jk_{z1}d} + V_{1\text{TE}}^- e^{jk_{z1}d})(\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + (V_{1\text{TM}}^+ e^{-jk_{z1}d} + V_{1\text{TM}}^- e^{jk_{z1}d})\mathbf{u}_t \\ &= (V_{2\text{TE}}^+ + V_{2\text{TE}}^-)(\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + (V_{2\text{TM}}^+ + V_{2\text{TM}}^-)\mathbf{u}_t \end{aligned} \quad (1.93)$$

$$\begin{aligned} & Y_{1\text{TE}}(V_{1\text{TE}}^+ e^{-jk_{z1}d} - V_{1\text{TE}}^- e^{jk_{z1}d})\mathbf{u}_t - Y_{1\text{TM}}(V_{1\text{TM}}^+ e^{-jk_{z1}d} - V_{1\text{TM}}^- e^{jk_{z1}d})(\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \\ &= Y_{2\text{TE}}(V_{2\text{TE}}^+ - V_{2\text{TE}}^-)\mathbf{u}_t - Y_{2\text{TM}}(V_{2\text{TM}}^+ - V_{2\text{TM}}^-)(\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \end{aligned} \quad (1.94)$$

上式の $(\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z)$ 成分， $\mathbf{u}_t$ 成分は，

$$V_{1\text{TE}}^+ e^{-jk_{z1}d} + V_{1\text{TE}}^- e^{jk_{z1}d} = V_{2\text{TE}}^+ + V_{2\text{TE}}^- \quad (1.95)$$

$$V_{1\text{TM}}^+ e^{-jk_{z1}d} + V_{1\text{TM}}^- e^{jk_{z1}d} = V_{2\text{TM}}^+ - V_{2\text{TM}}^- \quad (1.96)$$

$$(V_{1\text{TE}}^+ e^{-jk_{z1}d} - V_{1\text{TE}}^- e^{jk_{z1}d})Y_{1\text{TE}} = (V_{2\text{TE}}^+ - V_{2\text{TE}}^-)Y_{2\text{TE}} \quad (1.97)$$

$$(-V_{1\text{TM}}^+ e^{-jk_{z1}d} + V_{1\text{TM}}^- e^{jk_{z1}d})Y_{1\text{TM}} = (-V_{2\text{TM}}^+ + V_{2\text{TM}}^-)Y_{2\text{TM}} \quad (1.98)$$

これより，TE 波，TM 波ともに同じ形の式で表され，TE，TM の添字省略すると，

$$V_1^+ e^{-jk_{z1}d} + V_1^- e^{jk_{z1}d} = V_2^+ + V_2^- \quad (1.99)$$

$$(V_1^+ e^{-jk_{z1}d} - V_1^- e^{jk_{z1}d})Y_1 = (V_2^+ - V_2^-)Y_2 \quad (1.100)$$

1.3.2 散乱行列

散乱行列の前進波，後進波の定義より，

$$V_1^+ = \sqrt{Z_1}a_1, \quad V_1^- = \sqrt{Z_1}b_1 \quad (1.101)$$

$$V_2^+ = \sqrt{Z_2}b_2, \quad V_2^- = \sqrt{Z_2}a_2 \quad (1.102)$$

ゆえ，

$$\sqrt{Z_1}a_1 e^{-jk_{z1}d} + \sqrt{Z_1}b_1 e^{jk_{z1}d} = \sqrt{Z_2}b_2 + \sqrt{Z_2}a_2 \quad (1.103)$$

$$(\sqrt{Z_1}a_1 e^{-jk_{z1}d} - \sqrt{Z_1}b_1 e^{jk_{z1}d})Y_1 = (\sqrt{Z_2}b_2 - \sqrt{Z_2}a_2)Y_2 \quad (1.104)$$

整理して，

$$\sqrt{Z_1}Y_2(a_1 e^{-jk_{z1}d} + b_1 e^{jk_{z1}d}) = b_2 + a_2 \quad (1.105)$$

$$\sqrt{Y_1 Z_2}(a_1 e^{-jk_{z1}d} - b_1 e^{jk_{z1}d}) = b_2 - a_2 \quad (1.106)$$

上式より, b_2 を消去すると,

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{Z_1 Y_2} - \sqrt{Y_1 Z_2} \right) a_1 e^{-jk_{z1}d} + \left(\sqrt{Z_1 Y_2} + \sqrt{Y_1 Z_2} \right) b_1 e^{jk_{z1}d} = 2a_2 \\ & b_1 = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} e^{-j2k_{z1}d} a_1 + \frac{2\sqrt{Y_1 Y_2}}{Y_1 + Y_2} e^{-jk_{z1}d} a_2 \equiv S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \end{aligned} \quad (1.107)$$

よって, 散乱行列要素 S_{11} , S_{12} は次のようになる.

$$S_{11} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} e^{-j2k_{z1}d} \quad (1.108)$$

$$S_{12} = \frac{2\sqrt{Y_1 Y_2}}{Y_1 + Y_2} e^{-jk_{z1}d} \quad (1.109)$$

逆に, b_1 を消去すると,

$$\begin{aligned} & 2a_1 e^{-jk_{z1}d} = \left(\sqrt{Y_1 Z_2} - \sqrt{Z_1 Y_2} \right) a_1 + \left(\sqrt{Y_1 Z_2} + \sqrt{Z_1 Y_2} \right) b_1 \\ & b_2 = \frac{2\sqrt{Y_1 Y_2}}{Y_1 + Y_2} e^{-jk_{z1}d} a_1 - \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} a_2 \equiv S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned} \quad (1.110)$$

よって, 散乱行列要素 S_{21} , S_{22} は,

$$S_{21} = \frac{2\sqrt{Y_1 Y_2}}{Y_1 + Y_2} e^{-jk_{z1}d} \quad (1.111)$$

$$S_{22} = -\frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} \quad (1.112)$$

したがって, 散乱行列 $[\mathbf{S}]$ は,

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{Y_1 + Y_2} \begin{pmatrix} (Y_1 - Y_2)e^{-j2k_{z1}d} & 2\sqrt{Y_1 Y_2}e^{-jk_{z1}d} \\ 2\sqrt{Y_1 Y_2}e^{-jk_{z1}d} & -(Y_1 - Y_2) \end{pmatrix} \quad (1.113)$$

$d = 0$ とおき 2 つの端子面を $z = 0$ にとると, 異なる媒質の境界での散乱行列が得られ, 次のようになる.

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{Y_1 + Y_2} \begin{pmatrix} (Y_1 - Y_2) & 2\sqrt{Y_1 Y_2} \\ 2\sqrt{Y_1 Y_2} & -(Y_1 - Y_2) \end{pmatrix} \quad (1.114)$$

1.3.3 R マトリクス

多層構造に対して, 伝送線路と同様の縦続接続を行うことができる. 上で求めた式より, a_1 を消去すると,

$$2b_1 e^{jk_{z1}d} = b_2 \left(\sqrt{Y_1 Z_2} - \sqrt{Z_1 Y_2} \right) + a_2 \left(\sqrt{Y_1 Z_2} + \sqrt{Z_1 Y_2} \right) \quad (1.115)$$

よって, b_1 は,

$$b_1 = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{2} e^{-jk_z d} \left\{ (Y_1 + Y_2)a_2 + (Y_1 - Y_2)b_2 \right\} \equiv R_{11}a_2 + R_{12}b_2 \quad (1.116)$$

したがって, R マトリクスの要素 R_{11} , R_{12} は,

$$R_{11} = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{2} (Y_1 + Y_2) e^{-jk_z d} \quad (1.117)$$

$$R_{12} = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{2} (Y_1 - Y_2) e^{-jk_z d} \quad (1.118)$$

逆に, b_1 を消去すると,

$$2a_1 e^{-jk_z d} = b_2 \left(\sqrt{Y_1 Z_2} + \sqrt{Z_1 Y_2} \right) + a_2 \left(\sqrt{Y_1 Z_2} - \sqrt{Z_1 Y_2} \right) \quad (1.119)$$

よって, a_1 は,

$$a_1 = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{2} e^{jk_z d} \left\{ (Y_1 - Y_2)a_2 + (Y_1 + Y_2)b_2 \right\} \equiv R_{21}a_2 + R_{22}b_2 \quad (1.120)$$

したがって, R マトリクスの要素 R_{21} , R_{22} は,

$$R_{21} = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{2} (Y_1 - Y_2) e^{jk_z d} \quad (1.121)$$

$$R_{22} = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{2} (Y_1 + Y_2) e^{jk_z d} \quad (1.122)$$

よって, $z = 0$, d に端子面を定義した R マトリクスは次のようになる.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (1.123)$$

ここで,

$$[\mathbf{R}] = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{2} \begin{pmatrix} (Y_1 + Y_2) e^{-jk_z d} & (Y_1 - Y_2) e^{-jk_z d} \\ (Y_1 - Y_2) e^{jk_z d} & (Y_1 + Y_2) e^{jk_z d} \end{pmatrix} \quad (1.124)$$

ただし, $R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21} = 1$. いま,

$$\Gamma \equiv \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} \quad (1.125)$$

とおくと,

$$1 - \Gamma^2 = 1 - \left(\frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} \right)^2 = \frac{4Y_1 Y_2}{(Y_1 + Y_2)^2} \quad (1.126)$$

これより,

$$[\mathbf{R}] = \frac{Y_1 + Y_2}{2\sqrt{Y_1 Y_2}} \begin{pmatrix} e^{-jk_z d} & \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} e^{-jk_z d} \\ \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} e^{jk_z d} & e^{jk_z d} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \Gamma^2}} \begin{pmatrix} e^{-jk_z d} & \Gamma e^{-jk_z d} \\ \Gamma e^{jk_z d} & e^{jk_z d} \end{pmatrix} \quad (1.127)$$

多層構造に対しては, R マトリクスの積を求めて縦続接続できる. そして, 縦続接続で得られた R マトリクスの要素から, 散乱行列 $[\mathbf{S}]$ を次式により求めることができる.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = [\mathbf{S}] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{R_{22}} \begin{pmatrix} R_{12} & 1 \\ 1 & -R_{21} \end{pmatrix} \quad (1.128)$$

1.4 縦続接続

1.4.1 散乱行列

図のような散乱行列

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = [\mathbf{S}_a] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{S}_a] = \begin{pmatrix} S_{11}^{(a)} & S_{12}^{(a)} \\ S_{21}^{(a)} & S_{22}^{(a)} \end{pmatrix} \quad (1.129)$$

$$\begin{pmatrix} b'_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = [\mathbf{S}_b] \begin{pmatrix} a'_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{S}_b] = \begin{pmatrix} S_{11}^{(b)} & S_{12}^{(b)} \\ S_{21}^{(b)} & S_{22}^{(b)} \end{pmatrix} \quad (1.130)$$

を縦続接続し (接続した端子は, $a_2 = b'_2$, $b_2 = a'_2$), 同図中の散乱行列 $[\mathbf{S}]$ を求める.

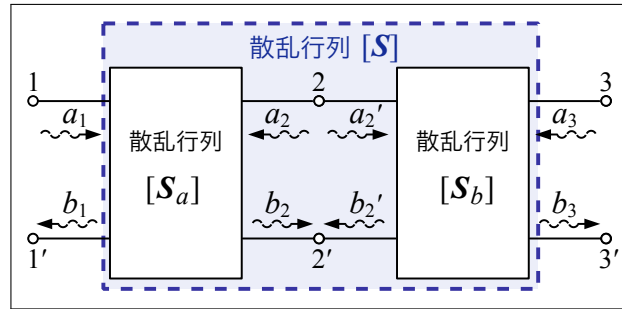


図 1.3. 散乱行列の縦続接続

まず, $a_2 = b'_2$, $b_2 = a'_2$ より,

$$b_1 = S_{11}^{(a)} a_1 + S_{12}^{(a)} a_2 \quad (1.131)$$

$$b_2 = S_{21}^{(a)} a_1 + S_{22}^{(a)} a_2 \quad (1.132)$$

$$a_2 = S_{11}^{(b)} b_2 + S_{12}^{(b)} a_3 \quad (1.133)$$

$$b_3 = S_{21}^{(b)} b_2 + S_{22}^{(b)} a_3 \quad (1.134)$$

上式より, a_2 , b_2 を消去して次式が得られればよい.

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_3 \quad (1.135)$$

$$b_3 = S_{21}a_1 + S_{22}a_3 \quad (1.136)$$

そこで, 式 (1.132) と式 (1.133) より, b_2 を消去すると,

$$\begin{aligned} a_2 &= S_{11}^{(b)} \left(S_{21}^{(a)} a_1 + S_{22}^{(a)} a_2 \right) + S_{12}^{(b)} a_3 \\ \left(1 - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(a)} \right) a_2 &= S_{11}^{(b)} S_{21}^{(a)} a_1 + S_{12}^{(b)} a_3 \\ a_2 &= \left(1 - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(a)} \right)^{-1} \left(S_{11}^{(b)} S_{21}^{(a)} a_1 + S_{12}^{(b)} a_3 \right) \end{aligned} \quad (1.137)$$

式 (1.131) に代入して, a_2 を消去すると,

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}^{(a)} a_1 + S_{12}^{(a)} \left(1 - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(a)} \right)^{-1} \left(S_{11}^{(b)} S_{21}^{(a)} a_1 + S_{12}^{(b)} a_3 \right) \\ &= \left\{ S_{11}^{(a)} + S_{12}^{(a)} \left(1 - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(a)} \right)^{-1} S_{11}^{(b)} S_{21}^{(a)} \right\} a_1 + \left\{ S_{12}^{(a)} \left(1 - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(a)} \right)^{-1} S_{12}^{(b)} \right\} a_3 \end{aligned} \quad (1.138)$$

一方, 式 (1.132) と式 (1.133) より, a_2 を消去すると,

$$\begin{aligned} b_2 &= S_{21}^{(a)} a_1 + S_{22}^{(a)} \left(S_{11}^{(b)} b_2 + S_{12}^{(b)} a_3 \right) \\ \left(1 - S_{22}^{(a)} S_{11}^{(b)} \right) b_2 &= S_{21}^{(a)} a_1 + S_{22}^{(a)} S_{12}^{(b)} a_3 \\ b_2 &= \left(1 - S_{22}^{(a)} S_{11}^{(b)} \right)^{-1} \left(S_{21}^{(a)} a_1 + S_{22}^{(a)} S_{12}^{(b)} a_3 \right) \end{aligned} \quad (1.139)$$

式 (1.134) に代入して, b_2 を消去すると,

$$\begin{aligned} b_3 &= S_{21}^{(b)} \left(1 - S_{22}^{(a)} S_{11}^{(b)} \right)^{-1} \left(S_{21}^{(a)} a_1 + S_{22}^{(a)} S_{12}^{(b)} a_3 \right) + S_{22}^{(b)} a_3 \\ &= \left\{ S_{21}^{(b)} \left(1 - S_{22}^{(a)} S_{11}^{(b)} \right)^{-1} S_{21}^{(a)} \right\} a_1 + \left\{ S_{21}^{(b)} \left(1 - S_{22}^{(a)} S_{11}^{(b)} \right)^{-1} S_{22}^{(a)} S_{12}^{(b)} + S_{22}^{(b)} \right\} a_3 \end{aligned} \quad (1.140)$$

したがって, 散乱行列要素 S_{11} , S_{12} , S_{21} , S_{22} は,

$$S_{11} = S_{11}^{(a)} + S_{12}^{(a)} \left(1 - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(a)} \right)^{-1} S_{11}^{(b)} S_{21}^{(a)} \quad (1.141)$$

$$S_{12} = S_{12}^{(a)} \left(1 - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(a)} \right)^{-1} S_{12}^{(b)} \quad (1.142)$$

$$S_{21} = S_{21}^{(b)} \left(1 - S_{22}^{(a)} S_{11}^{(b)} \right)^{-1} S_{21}^{(a)} \quad (1.143)$$

$$S_{22} = S_{21}^{(b)} \left(1 - S_{22}^{(a)} S_{11}^{(b)} \right)^{-1} S_{22}^{(a)} S_{12}^{(b)} + S_{22}^{(b)} \quad (1.144)$$

1.4.2 縦続接続ポートの波動振幅

式 (1.137), (1.139) に示した a_2 , b_2 は, 2つの散乱行列を縦続接続しているポート 2 の波動振幅であり, 縦続接続した両者の散乱行列による多重反射を考慮できる. いま, ポート 1 から励振して, ポート 3 を整合させたとき, ポート 2 の波動振幅 a_2 , b_2 は, (1.137), (1.139) より次のようになる.

$$a_2 \Big|_{a_3=0} = \left(1 - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(a)}\right)^{-1} S_{11}^{(b)} S_{21}^{(a)} a_1 \quad (1.145)$$

$$b_2 \Big|_{a_3=0} = \left(1 - S_{22}^{(a)} S_{11}^{(b)}\right)^{-1} S_{21}^{(a)} a_1 \quad (1.146)$$

逆に, ポート 3 から励振して, ポート 1 を整合させたときは,

$$a_2 \Big|_{a_1=0} = \left(1 - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(a)}\right)^{-1} S_{12}^{(b)} a_3 \quad (1.147)$$

$$b_2 \Big|_{a_1=0} = \left(1 - S_{22}^{(a)} S_{11}^{(b)}\right)^{-1} S_{22}^{(a)} S_{12}^{(b)} a_3 \quad (1.148)$$

1.5 接線電磁界の表示式

1.5.1 接線電界の入射波・反射波

$z < 0$ から平面波が入射したとき, $z = 0$ での入射電界 $\mathbf{E}_{i,\tan}^{(1)}$, 入射磁界 $\mathbf{H}_{i,\tan}^{(1)}$ は,

$$\mathbf{E}_{i,\tan}^{(1)} \Big|_{z=0} = \left\{ V_{1\text{TE}}^+ (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + V_{1\text{TM}}^+ \mathbf{u}_t \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.149)$$

$$\mathbf{H}_{i,\tan}^{(1)} \Big|_{z=0} = \left\{ Y_{1\text{TE}} V_{1\text{TE}}^+ \mathbf{u}_t + Y_{1\text{TM}} V_{1\text{TM}}^+ (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.150)$$

これに対して, 反射電界 $\mathbf{E}_{r,\tan}^{(1)}$, 反射磁界 $\mathbf{H}_{r,\tan}^{(1)}$ は,

$$\mathbf{E}_{r,\tan}^{(1)} \Big|_{z=0} = \left\{ V_{1\text{TE}}^- (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + V_{1\text{TM}}^- \mathbf{u}_t \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.151)$$

$$\mathbf{H}_{r,\tan}^{(1)} \Big|_{z=0} = - \left\{ Y_{1\text{TE}} V_{1\text{TE}}^- \mathbf{u}_t + Y_{1\text{TM}} V_{1\text{TM}}^- (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.152)$$

接線電界の反射係数 R_{te}^{E+} (TE 波), R_{tm}^{E+} (TM 波) を, 次のように定義する.

$$R_{\text{te}}^{E+} = \frac{V_{1\text{TE}}^-}{V_{1\text{TE}}^+} \Big|_{V_{2\text{TE}}^- = 0} \quad (1.153)$$

$$R_{\text{tm}}^{E+} = \frac{V_{1\text{TM}}^-}{V_{1\text{TM}}^+} \Big|_{V_{2\text{TM}}^- = 0} \quad (1.154)$$

これより、反射波の接線電界、および接線磁界は、

$$\mathbf{E}_{r,\tan}^{(1)} \Big|_{z=0} = \left\{ R_{\text{te}}^{E+} V_{1\text{TE}}^+ (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + R_{\text{tm}}^{E+} V_{1\text{TM}}^+ \mathbf{u}_t \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.155)$$

$$\mathbf{H}_{r,\tan}^{(1)} \Big|_{z=0} = - \left\{ Y_{1\text{TE}} R_{\text{te}}^{E+} V_{1\text{TE}}^+ \mathbf{u}_t + Y_{1\text{TM}} R_{\text{tm}}^{E+} V_{1\text{TM}}^+ (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.156)$$

反射波の電界の x 成分, y 成分を

$$\mathbf{E}_{r,\tan}^{(1)} \Big|_{z=0} \equiv E_{r,x} \mathbf{u}_x + E_{r,y} \mathbf{u}_y \quad (1.157)$$

とおくと,

$$E_{r,x} = \left\{ R_{\text{te}}^{E+} V_{1\text{TE}}^+ (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{u}_x + R_{\text{tm}}^{E+} V_{1\text{TM}}^+ \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_x \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.158)$$

$$E_{r,y} = \left\{ R_{\text{te}}^{E+} V_{1\text{TE}}^+ (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{u}_y + R_{\text{tm}}^{E+} V_{1\text{TM}}^+ \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_y \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.159)$$

ここで,

$$\mathbf{u}_t \equiv \cos \phi_i \mathbf{u}_x + \sin \phi_i \mathbf{u}_y \quad (1.160)$$

とおくと,

$$E_{r,x} = \left\{ R_{\text{te}}^{E+} V_{1\text{TE}}^+ \sin \phi_i + R_{\text{tm}}^{E+} V_{1\text{TM}}^+ \cos \phi_i \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.161)$$

$$E_{r,y} = \left\{ R_{\text{te}}^{E+} V_{1\text{TE}}^+ (-\cos \phi_i) + R_{\text{tm}}^{E+} V_{1\text{TM}}^+ \sin \phi_i \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.162)$$

行列表示すると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{r,x} \\ E_{r,y} \end{pmatrix} &= e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \begin{pmatrix} R_{\text{te}}^{E+} \sin \phi_i & R_{\text{tm}}^{E+} \cos \phi_i \\ -R_{\text{te}}^{E+} \cos \phi_i & R_{\text{tm}}^{E+} \sin \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \\ &= e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \begin{pmatrix} \sin \phi_i & \cos \phi_i \\ -\cos \phi_i & \sin \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{\text{te}}^{E+} & 0 \\ 0 & R_{\text{tm}}^{E+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.163)$$

ここで、回転に関する行列 $[\Phi]$ の転置 $[\Phi]^t$, 対角行列 $[R^{E+}]$ を,

$$[\Phi]^t \equiv \begin{pmatrix} \sin \phi_i & \cos \phi_i \\ -\cos \phi_i & \sin \phi_i \end{pmatrix} \quad (1.164)$$

$$[R^{E+}] \equiv \begin{pmatrix} R_{\text{te}}^{E+} & 0 \\ 0 & R_{\text{tm}}^{E+} \end{pmatrix} \quad (1.165)$$

とおくと,

$$\begin{pmatrix} E_{r,x} \\ E_{r,y} \end{pmatrix} = e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} [\Phi]^t [R^{E+}] \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \quad (1.166)$$

同様に、入射波の電界の x 成分, y 成分を

$$\mathbf{E}_{i,\text{tan}}^{(1)} \Big|_{z=0} \equiv E_{i,x} \mathbf{u}_x + E_{i,y} \mathbf{u}_y \quad (1.167)$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} E_{r,x} \\ E_{r,y} \end{pmatrix} = e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} [\boldsymbol{\Phi}]^t \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \equiv e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} [\boldsymbol{\Phi}]^t [U] \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \quad (1.168)$$

ただし, $[U]$ は単位行列である.

$$[U] \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.169)$$

これより、入射波と反射波の重ね合わせ,

$$E_{ir,x} \equiv E_{i,x} + E_{r,x} \quad (1.170)$$

$$E_{ir,y} \equiv E_{i,y} + E_{r,y} \quad (1.171)$$

については,

$$\begin{pmatrix} E_{ir,x} \\ E_{ir,y} \end{pmatrix} = e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} [\boldsymbol{\Phi}]^t \left([U] + [R^{E+}] \right) \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \quad (1.172)$$

さらに,

$$E_{i,x} = \left\{ V_{1\text{TE}}^+ \sin \phi_i + V_{1\text{TM}}^+ \cos \phi_i \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \equiv V_{1,x}^+ e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.173)$$

$$E_{i,y} = \left\{ V_{1\text{TE}}^+ (-\cos \phi_i) + V_{1\text{TM}}^+ \sin \phi_i \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \equiv V_{1,y}^+ e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (1.174)$$

より $V_{1,x}^+$, $V_{1,y}^+$ を定義すると,

$$\begin{pmatrix} V_{1,x}^+ \\ V_{1,y}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi_i & \cos \phi_i \\ -\cos \phi_i & \sin \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} = [\boldsymbol{\Phi}]^t \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \quad (1.175)$$

逆は,

$$\begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} = [\boldsymbol{\Phi}] \begin{pmatrix} V_{1,x}^+ \\ V_{1,y}^+ \end{pmatrix} \quad (1.176)$$

ここで,

$$[\boldsymbol{\Phi}] \equiv \begin{pmatrix} \sin \phi_i & -\cos \phi_i \\ \cos \phi_i & \sin \phi_i \end{pmatrix} \quad (1.177)$$

したがって, $E_{ir,x}$, $E_{ir,y}$ は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} E_{ir,x} \\ E_{ir,y} \end{pmatrix} = e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} [\boldsymbol{\Phi}]^t \left([U] + [R^{E+}] \right) [\boldsymbol{\Phi}] \begin{pmatrix} V_{1,x}^+ \\ V_{1,y}^+ \end{pmatrix} \quad (1.178)$$

1.5.2 接線磁界の入射波・反射波

同様にして、反射波の磁界の x 成分, y 成分を

$$\mathbf{H}_{r,\text{tan}}^{(1)} \Big|_{z=0} \equiv H_{r,x} \mathbf{u}_x + H_{r,y} \mathbf{u}_y \quad (1.179)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} H_{r,x} &= - \left\{ Y_{1\text{TE}} R_{\text{te}}^{E+} V_{1\text{TE}}^+ \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_x + Y_{1\text{TM}} R_{\text{tm}}^{E+} V_{1\text{TM}}^+ (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{u}_x \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \\ &= - \left\{ Y_{1\text{TE}} R_{\text{te}}^{E+} V_{1\text{TE}}^+ \cos \phi_i + Y_{1\text{TM}} R_{\text{tm}}^{E+} V_{1\text{TM}}^+ \sin \phi_i \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \end{aligned} \quad (1.180)$$

$$\begin{aligned} H_{r,y} &= - \left\{ Y_{1\text{TE}} R_{\text{te}}^{E+} V_{1\text{TE}}^+ \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_y + Y_{1\text{TM}} R_{\text{tm}}^{E+} V_{1\text{TM}}^+ (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{u}_y \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \\ &= - \left\{ Y_{1\text{TE}} R_{\text{te}}^{E+} V_{1\text{TE}}^+ \sin \phi_i + Y_{1\text{TM}} R_{\text{tm}}^{E+} V_{1\text{TM}}^+ (-\cos \phi_i) \right\} e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \end{aligned} \quad (1.181)$$

行列表示して,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} H_{r,x} \\ H_{r,y} \end{pmatrix} &= -e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \begin{pmatrix} Y_{1\text{TE}} R_{\text{te}}^{E+} \cos \phi_i & Y_{1\text{TM}} R_{\text{tm}}^{E+} \sin \phi_i \\ Y_{1\text{TE}} R_{\text{te}}^{E+} \sin \phi_i & -Y_{1\text{TM}} R_{\text{tm}}^{E+} \cos \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \\ &= -e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \begin{pmatrix} \sin \phi_i & \cos \phi_i \\ -\cos \phi_i & \sin \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Y_{1\text{TM}} R_{\text{tm}}^{E+} \\ Y_{1\text{TE}} R_{\text{te}}^{E+} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \\ &= -e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} [\boldsymbol{\Phi}]^t \begin{pmatrix} 0 & Y_{1\text{TM}} \\ Y_{1\text{TE}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{\text{te}}^{E+} & 0 \\ 0 & R_{\text{tm}}^{E+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \\ &\equiv e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} [\boldsymbol{\Phi}]^t [Y] \left(-[R^{E+}] \right) \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.182)$$

ただし, $[Y]$, $[R^{E+}]$ は次のような対角行列である.

$$[Y] \equiv \begin{pmatrix} 0 & Y_{1\text{TM}} \\ Y_{1\text{TE}} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.183)$$

$$[R^{E+}] \equiv \begin{pmatrix} R_{\text{te}}^{E+} & 0 \\ 0 & R_{\text{tm}}^{E+} \end{pmatrix} \quad (1.184)$$

入射波の磁界の x 成分, y 成分を

$$\mathbf{H}_{i,\text{tan}}^{(1)} \Big|_{z=0} \equiv H_{i,x} \mathbf{u}_x + H_{i,y} \mathbf{u}_y \quad (1.185)$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} H_{i,x} \\ H_{i,y} \end{pmatrix} = e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} [\boldsymbol{\Phi}]^t [Y] [U] \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \quad (1.186)$$

これより,

$$H_{ir,x} \equiv H_{i,x} + H_{r,x} \quad (1.187)$$

$$H_{ir,y} \equiv H_{i,y} + H_{r,y} \quad (1.188)$$

については,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} H_{ir,x} \\ H_{ir,y} \end{pmatrix} &= e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} [\boldsymbol{\Phi}]^t [Y] \left([U] - [R^{E+}] \right) \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \\ &= e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} [\boldsymbol{\Phi}]^t [Y] \left([U] - [R^{E+}] \right) [\boldsymbol{\Phi}] \begin{pmatrix} V_{1,x}^+ \\ V_{1,y}^+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.189)$$

1.5.3 透過波

自由空間中に多層媒質がある場合を考え, 上と同様に $z \ll 0$ から平面波が入射したとき, 透過波側の誘電体と自由空間との境界面での接線電磁界の表示式を示す (導出省略). まず, 透過波の接線電界 $\mathbf{E}_{t,\text{tan}}$ は,

$$\mathbf{E}_{t,\text{tan}} = E_{t,x} \mathbf{u}_x + E_{t,y} \mathbf{u}_y \quad (1.190)$$

$$\begin{pmatrix} E_{t,x} \\ E_{t,y} \end{pmatrix} = e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} [\boldsymbol{\Phi}]^t [T^{E+}] [\boldsymbol{\Phi}] \begin{pmatrix} V_{1,x}^+ \\ V_{1,y}^+ \end{pmatrix} \quad (1.191)$$

ここで,

$$[\boldsymbol{\Phi}] = \begin{pmatrix} \sin \phi_i & -\cos \phi_i \\ \cos \phi_i & \sin \phi_i \end{pmatrix} \quad (1.192)$$

$$[T^{E+}] = \begin{pmatrix} T_{\text{te}}^{E+} & 0 \\ 0 & T_{\text{tm}}^{E+} \end{pmatrix} \quad (1.193)$$

ただし, 行列 $[\boldsymbol{\Phi}]^t$ は $[\boldsymbol{\Phi}]$ の転置を示す. また, 透過波の接線磁界 $\mathbf{H}_{t,\text{tan}}$ は,

$$\mathbf{H}_{t,\text{tan}} = H_{t,x} \mathbf{u}_x + H_{t,y} \mathbf{u}_y \quad (1.194)$$

$$\begin{pmatrix} H_{t,x} \\ H_{t,y} \end{pmatrix} = e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} [\boldsymbol{\Phi}]^t [Y] [T^{E+}] [\boldsymbol{\Phi}] \begin{pmatrix} V_{1,x}^+ \\ V_{1,y}^+ \end{pmatrix} \quad (1.195)$$

ここで,

$$[Y] = \begin{pmatrix} 0 & Y_{1\text{TM}} \\ Y_{1\text{TE}} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.196)$$

1.6 誘電体板による反射・透過

1.6.1 単層誘電体板

厚み d の誘電体基板の反射・透過は, 2つの R マトリクスの積によって求めることができ, TE 波, TM 波いずれも次のようになる.

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}_{s1}][\mathbf{R}_2] \quad (1.197)$$

ここで,

$$[\mathbf{R}_{s1}] = \frac{1}{\sqrt{1-\Gamma^2}} \begin{pmatrix} 1 & \Gamma \\ \Gamma & 1 \end{pmatrix} \quad (1.198)$$

$$[\mathbf{R}_2] = \frac{1}{\sqrt{1-\Gamma^2}} \begin{pmatrix} e^{-jk_{z2}d} & -\Gamma e^{-jk_{z2}d} \\ -\Gamma e^{jk_{z2}d} & e^{jk_{z2}d} \end{pmatrix} \quad (1.199)$$

また,

$$\Gamma = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} \quad (1.200)$$

ただし, Y_1 は自由空間のアドミタンス, Y_2 は誘電体基板のアドミタンス, k_{z2} は誘電体中の波数ベクトルの z 成分を示す. よって,

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}] &= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-\Gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & \Gamma \\ \Gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-jk_{z2}d} & -\Gamma e^{-jk_{z2}d} \\ -\Gamma e^{jk_{z2}d} & e^{jk_{z2}d} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-\Gamma^2} \begin{pmatrix} e^{-jk_{z2}d} - \Gamma^2 e^{jk_{z2}d} & \Gamma(e^{-jk_{z2}d} + e^{jk_{z2}d}) \\ \Gamma(e^{jk_{z2}d} - e^{-jk_{z2}d}) & -\Gamma^2 e^{-jk_{z2}d} + e^{jk_{z2}d} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.201)$$

したがって, 散乱行列要 S_{11} , S_{12} , S_{21} , S_{22} は,

$$S_{21} = \frac{1}{R_{22}} = \frac{(1-\Gamma^2)e^{-jk_{z2}d}}{1-\Gamma^2e^{-j2k_{z2}d}} = S_{12} \quad (1.202)$$

$$S_{11} = \frac{R_{12}}{R_{22}} = \frac{(1-e^{-j2k_{z2}d})\Gamma}{1-\Gamma^2e^{-j2k_{z2}d}} = S_{22} \quad (1.203)$$

接線電界の反射係数 $R_t^{E\pm}$, および接線電界の透過係数 $T_t^{E\pm}$ は,

$$R_t^{E\pm} = R^{E\pm} = S_{11} = S_{22} \quad (1.204)$$

$$T_t^{E\pm} = S_{21} = S_{12} \quad (1.205)$$

ただし, θ_1 は自由空間, θ_2 は誘電体中の入射角を各々示す.

1.6.2 多層誘電体板

後述する「地導体のある多層誘電体板」と同様にして求めることができ, ここでは省略する.

1.7 地導体のある誘電体板による反射・透過

1.7.1 地導体のある単層誘電体板

厚み d の単層誘電体の場合,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = [\mathbf{R}_{s1}][\mathbf{R}_{u2}] \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \Big|_{a_2=-b_2} \quad (1.206)$$

ここで,

$$[\mathbf{R}_{s1}] = \frac{1}{\sqrt{1-\Gamma^2}} \begin{pmatrix} 1 & \Gamma \\ \Gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} \quad (1.207)$$

$$[\mathbf{R}_{u2}] = \begin{pmatrix} e^{jk_{z2}d} & 0 \\ 0 & e^{-jk_{z2}d} \end{pmatrix} \quad (1.208)$$

ただし, $[\mathbf{R}_{s1}]$ は自由空間と誘電体の境界面での R マトリクス, $[\mathbf{R}_{u2}]$ は誘電体の均一領域での R マトリクスを示す. また, Y_1 は自由空間のアドミタンス, Y_2 は誘電体基板のアドミタンス, k_{z2} は誘電体中の波数ベクトルの z 成分を示す. よって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1-\Gamma^2}} \begin{pmatrix} 1 & \Gamma \\ \Gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{jk_{z2}d} & 0 \\ 0 & e^{-jk_{z2}d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\Gamma^2}} \begin{pmatrix} e^{jk_{z2}d} & \Gamma e^{-jk_{z2}d} \\ \Gamma e^{jk_{z2}d} & e^{-jk_{z2}d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.209)$$

したがって, 反射係数 R_t^{E+} は,

$$\begin{aligned} R_t^{E+} &= \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=-b_2} = \frac{-e^{jk_{z2}d} + \Gamma e^{-jk_{z2}d}}{-\Gamma e^{jk_{z2}d} + e^{-jk_{z2}d}} \\ &= \frac{-(Y_1 + Y_2)e^{jk_{z2}d} + (Y_1 - Y_2)e^{-jk_{z2}d}}{-(Y_1 - Y_2)e^{jk_{z2}d} + (Y_1 + Y_2)e^{-jk_{z2}d}} \\ &= \frac{-Y_1(e^{jk_{z2}d} - e^{-jk_{z2}d}) - Y_2(e^{jk_{z2}d} + e^{-jk_{z2}d})}{-Y_1(e^{jk_{z2}d} - e^{-jk_{z2}d}) + Y_2(e^{jk_{z2}d} + e^{-jk_{z2}d})} \\ &= \frac{-Y_1 j \sin k_{z2}d - Y_2 \cos k_{z2}d}{-Y_1 j \sin k_{z2}d + Y_2 \cos k_{z2}d} \\ &= \frac{Y_1 \sin k_{z2}d - jY_2 \cos k_{z2}d}{Y_1 \sin k_{z2}d + jY_2 \cos k_{z2}d} \end{aligned} \quad (1.210)$$

これより, TE 波の電界の反射係数 R_{te}^{E+} は,

$$R_{te}^{E+} = \frac{Y_{1TE} \sin k_{z2}d - jY_{2TE} \cos k_{z2}d}{Y_{1TE} \sin k_{z2}d + jY_{2TE} \cos k_{z2}d} = \frac{k_{z1} \sin k_{z2}d - jk_{z2} \cos k_{z2}d}{k_{z1} \sin k_{z2}d + jk_{z2} \cos k_{z2}d} \quad (1.211)$$

ただし,

$$Y_{1TE} = \frac{k_{z1}}{\omega\mu}, \quad Y_{2TE} = \frac{k_{z2}}{\omega\mu} \quad (1.212)$$

また、TM 波の電界の反射係数 R_{tm}^{E+} は、

$$R_{\text{tm}}^{E+} = \frac{Y_{1\text{TM}} \sin k_{z2}d - jY_{2\text{TM}} \cos k_{z2}d}{Y_{1\text{TM}} \sin k_{z2}d + jY_{2\text{TM}} \cos k_{z2}d} = \frac{k_{z2} \sin k_{z2}d - j\epsilon_r k_{z1} \cos k_{z2}d}{k_{z2} \sin k_{z2}d + j\epsilon_r k_{z1} \cos k_{z2}d} \quad (1.213)$$

ただし、

$$Z_{1\text{TM}} = \frac{k_{z1}}{\omega\epsilon}, \quad Z_{2\text{TM}} = \frac{k_{z2}}{\omega\epsilon\epsilon_r} \quad (1.214)$$

1.7.2 地導体のある多層誘電体板

N 層誘電体の場合、地導体のある誘電体（厚み d 、比誘電率 ϵ_r ）を除いた $(N-1)$ 層誘電体の R マトリクスを $[\mathbf{R}_{N-1}]$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = [\mathbf{R}_{N-1}][\mathbf{R}_{u,N}] \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \bigg|_{a_2=-b_2} \quad (1.215)$$

ここで、

$$[\mathbf{R}_{N-1}] = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \quad (1.216)$$

$$[\mathbf{R}_{u,N}] = \begin{pmatrix} e^{jk_z d} & 0 \\ 0 & e^{-jk_z d} \end{pmatrix} \quad (1.217)$$

ただし、 k_z は誘電体中の波数ベクトルの z 成分を示す。よって、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{jk_z d} & 0 \\ 0 & e^{-jk_z d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{11}e^{jk_z d} & R_{12}e^{-jk_z d} \\ R_{21}e^{jk_z d} & R_{22}e^{-jk_z d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.218)$$

したがって、反射係数 R_t^{E+} は、

$$R_t^{E+} = \frac{b_1}{a_1} \bigg|_{a_2=-b_2} = \frac{-R_{11}e^{jk_z d} + R_{12}e^{-jk_z d}}{-R_{21}e^{jk_z d} + R_{22}e^{-jk_z d}} = \frac{R_{11} - R_{12}e^{-j2k_z d}}{R_{21} - R_{22}e^{-j2k_z d}} \quad (1.219)$$

いま、 $(N-1)$ 層誘電体の散乱行列 $[\mathbf{S}_{N-1}]$ を、

$$[\mathbf{S}_{N-1}] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \quad (1.220)$$

とすると、 $[\mathbf{R}_{N-1}]$ マトリクスは、この散乱行列要素より

$$[\mathbf{R}_{N-1}] = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{S_{21}} \begin{pmatrix} -S_{11}S_{22} + S_{21}^2 & S_{11} \\ -S_{22} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.221)$$

で表すことができ、これより、

$$R_t^{E+} = \frac{-S_{11}S_{22} + S_{21}^2 - S_{11}e^{-j2k_z d}}{-S_{22} - e^{-j2k_z d}} = S_{11} - \frac{S_{21}^2}{S_{22} + e^{-j2k_z d}} \quad (1.222)$$

1.8 多層誘電体板中の境界面での反射・透過

多層誘電体基板の $z < 0$ より平面波が入射したとき、入射電界に対する i 番目の境界面での電界の係数を求める。境界面でポート 2 を定義し、その前後で散乱行列 $[\mathbf{S}_a]$, $[\mathbf{S}_b]$ が既知であるとする。散乱行列の縦続接続を行う際に得られた式より、

$$\left. \frac{a_2}{a_1} \right|_{a_3=0} = \left(1 - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(a)}\right)^{-1} S_{11}^{(b)} S_{21}^{(a)} \quad (1.223)$$

よって、ポート 2 での反射波の接線電界の係数 $R_t^{(i)+}$ は次のようになる。

$$R_t^{(i)+} = \left. \frac{\sqrt{Z_i} a_2}{\sqrt{Z_1} a_1} \right|_{a_3=0} = \sqrt{Y_1 Z_i} \left(1 - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(a)}\right)^{-1} S_{11}^{(b)} S_{21}^{(a)} \quad (1.224)$$

また、

$$\left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_3=0} = \left(1 - S_{22}^{(a)} S_{11}^{(b)}\right)^{-1} S_{21}^{(a)} \quad (1.225)$$

これより、透過波の接線電界の係数 $T_t^{(i)+}$ は次のようになる。

$$T_t^{(i)+} = \left. \frac{\sqrt{Z_{i+1}} b_2}{\sqrt{Z_1} a_1} \right|_{a_3=0} = \sqrt{Y_1 Z_{i+1}} \left(1 - S_{22}^{(a)} S_{11}^{(b)}\right)^{-1} S_{21}^{(a)} \quad (1.226)$$

したがって、 i 番目の境界面での接線電界 $\mathbf{E}_{tr,\tan}$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{tr,\tan} &= E_{tr,x} \mathbf{u}_x + E_{tr,y} \mathbf{u}_y \\ \begin{pmatrix} E_{tr,x} \\ E_{tr,y} \end{pmatrix} &= e^{\mp j \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} [\boldsymbol{\Phi}]^t \left([T^{E+}] - [R^{E+}] \right) [\boldsymbol{\Phi}] \begin{pmatrix} V_{1,x}^+ \\ V_{1,y}^+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.227)$$

ここで、 $[T^{E+}]$, $[R^{E+}]$ は対角行列である。

$$[T^{E+}] = \begin{pmatrix} T_{te,i}^+ & 0 \\ 0 & T_{tm,i}^+ \end{pmatrix} \quad (1.228)$$

$$[R^{E+}] = \begin{pmatrix} R_{te,i}^+ & 0 \\ 0 & R_{tm,i}^+ \end{pmatrix} \quad (1.229)$$

$$(1.230)$$

また、

$$T_{te,i}^+ = \sqrt{Y_{1TE} Z_{i+1TE}} \left(1 - S_{22TE}^{(a)} S_{11TE}^{(b)}\right)^{-1} S_{21TE}^{(a)} \quad (1.231)$$

$$T_{tm,i}^+ = \sqrt{Y_{1TM} Z_{i+1TM}} \left(1 - S_{22TM}^{(a)} S_{11TM}^{(b)}\right)^{-1} S_{21TM}^{(a)} \quad (1.232)$$

$$R_{te,i}^+ = \sqrt{Y_{1TE} Z_{iTE}} \left(1 - S_{11TE}^{(b)} S_{22TE}^{(a)}\right)^{-1} S_{11TE}^{(b)} S_{21TE}^{(a)} \quad (1.233)$$

$$R_{tm,i}^+ = \sqrt{Y_{1TM} Z_{iTM}} \left(1 - S_{11TM}^{(b)} S_{22TM}^{(a)}\right)^{-1} S_{11TM}^{(b)} S_{21TM}^{(a)} \quad (1.234)$$

逆に, z_0 より平面波が入射したとき,

$$\left. \frac{b_2}{a_3} \right|_{a_1=0} = \left(1 - S_{22}^{(a)} S_{11}^{(b)} \right)^{-1} S_{22}^{(a)} S_{12}^{(b)} \quad (1.235)$$

より, 反射波の接線電界の係数 $R_t^{(i)-}$ は次のようになる.

$$R_t^{(i)-} = \left. \frac{\sqrt{Z_{i+1}} b_2}{\sqrt{Z_1} a_3} \right|_{a_1=0} = \sqrt{Y_1 Z_{i+1}} \left(1 - S_{22}^{(a)} S_{11}^{(b)} \right)^{-1} S_{22}^{(a)} S_{12}^{(b)} \quad (1.236)$$

また,

$$\left. \frac{a_2}{a_3} \right|_{a_1=0} = \left(1 - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(a)} \right)^{-1} S_{12}^{(b)} \quad (1.237)$$

より, 透過波の接線電界の係数 $T_t^{(i)-}$ は次のようになる.

$$T_t^{(i)-} = \left. \frac{\sqrt{Z_i} a_2}{\sqrt{Z_1} a_3} \right|_{a_1=0} = \sqrt{Y_1 Z_i} \left(1 - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(a)} \right)^{-1} S_{12}^{(b)} \quad (1.238)$$

CHAPTER 2

スペクトル領域電磁界とグリーン関数

電磁界のスペクトル領域解析として、モーメント法 (*MoM*) による解析法について詳細に解説する。まず、フーリエ変換を用いて電磁界の空間領域表現をスペクトル領域に変換する基礎理論を示し、マクスウェルの方程式をスペクトル領域で表現する方法、ベクトルポテンシャルの導入、およびグリーン関数の求め方を説明する。さらに、マイクロストリップ素子や多層誘電体基板の解析におけるスペクトル領域の基本行列の適用、および電流源・磁流源に対するダイアディック・グリーン関数の導出を示していく。

2.1 スペクトル領域の電磁界

直角座標系 (x, y, z) において、 xy 面にマイクロストリップ素子がある場合を考え、電磁界 $\mathbf{E}(x, y, z)$, $\mathbf{H}(x, y, z)$ より、空間領域 (x, y) からスペクトル領域 (k_x, k_y) へのフーリエ変換 $\widetilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z)$, $\widetilde{\mathbf{H}}(k_x, k_y, z)$ を定義する。

$$\widetilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.1)$$

$$\widetilde{\mathbf{H}}(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.2)$$

フーリエ変換対の関係より、

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (2.3)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathbf{H}}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (2.4)$$

これより, $\nabla \cdot \mathbf{E}$ は,

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) \\
&= \nabla \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla \cdot \{ \widetilde{\mathbf{E}} e^{j(k_x x + k_y y)} \} dk_x dk_y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(jk_x \mathbf{u}_x + jk_y \mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \widetilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (2.5)
\end{aligned}$$

フーリエ変換対の関係より,

$$\left(jk_x \mathbf{u}_x + jk_y \mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \widetilde{\mathbf{E}} = \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.6)$$

ここで,

$$\mathbf{k}_t \equiv k_x \mathbf{u}_x + k_y \mathbf{u}_y \quad (2.7)$$

とおくと,

$$\left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \widetilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.8)$$

同様にして, $\nabla \cdot \mathbf{H}$ のフーリエ変換は,

$$\left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \widetilde{\mathbf{H}}(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla \cdot \mathbf{H}(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.9)$$

また, $\nabla \times \mathbf{E}$, $\nabla \times \mathbf{H}$ のフーリエ変換は (導出省略),

$$\left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \times \widetilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla \times \mathbf{E}(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.10)$$

$$\left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \times \widetilde{\mathbf{H}}(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla \times \mathbf{H}(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.11)$$

さらに, $\nabla^2 \mathbf{E}$ は,

$$\nabla^2 \mathbf{E}(x, y, z) = \nabla^2 E_x(x, y, z) \mathbf{u}_x + \nabla^2 E_y(x, y, z) \mathbf{u}_y + \nabla^2 E_z(x, y, z) \mathbf{u}_z \quad (2.12)$$

いま、添え字 x, y, z を i で置き換え、

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 E_i(x, y, z) \\
&= \nabla^2 \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_i(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \{ \tilde{E}_i e^{j(k_x x + k_y y)} \} dk_x dk_y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left((jk_x)^2 + (jk_y)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \tilde{E}_i(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(-k_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{E}_i e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y
\end{aligned} \tag{2.13}$$

ここで、フーリエ変換対の関係より、

$$\left(-k_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{E}_i(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 E_i(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \tag{2.14}$$

ベクトルでも同様で、

$$\left(-k_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \mathbf{E}(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \tag{2.15}$$

これより、電磁流がない場合の Maxwell の方程式をフーリエ変換すると、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \rightarrow \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z \right) \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\tilde{\mathbf{H}} \tag{2.16}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \rightarrow \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z \right) \times \tilde{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon\tilde{\mathbf{E}} \tag{2.17}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z \right) \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0 \tag{2.18}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \rightarrow \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z \right) \cdot \tilde{\mathbf{H}} = 0 \tag{2.19}$$

また、

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = 0 \rightarrow \left(-k_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \tilde{\mathbf{E}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right) \tilde{\mathbf{E}} = 0 \tag{2.20}$$

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{H} = 0 \rightarrow \left(-k_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \tilde{\mathbf{H}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right) \tilde{\mathbf{H}} = 0 \tag{2.21}$$

式 (2.16) より、

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}_z \cdot \left\{ \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z \right) \times \tilde{\mathbf{E}} \right\} = j\mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{k}_t \times \tilde{\mathbf{E}}) = -j\omega\mu\tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{u}_z \\
& k_x \tilde{E}_y - k_y \tilde{E}_x = -\omega\mu\tilde{H}_z
\end{aligned} \tag{2.22}$$

また、式 (2.18) より、

$$\begin{aligned} j\mathbf{k}_t \cdot \widetilde{\mathbf{E}} &= -\mathbf{u}_z \cdot \frac{\partial \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial z} \\ k_x \widetilde{E}_x + k_y \widetilde{E}_y &= j \frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.23)$$

これより、 $\widetilde{E}_x$ 、 $\widetilde{E}_y$ について解くと、

$$\widetilde{E}_x = \frac{jk_x}{k_t^2} \frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial z} + \frac{\omega\mu k_y}{k_t^2} \widetilde{H}_z \quad (2.24)$$

$$\widetilde{E}_y = \frac{jk_y}{k_t^2} \frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial z} - \frac{\omega\mu k_x}{k_t^2} \widetilde{H}_z \quad (2.25)$$

同様にして、 $\widetilde{H}_x$ 、 $\widetilde{H}_y$ は、

$$\widetilde{H}_x = \frac{jk_x}{k_t^2} \frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial z} - \frac{\omega\epsilon k_y}{k_t^2} \widetilde{E}_z \quad (2.26)$$

$$\widetilde{H}_y = \frac{jk_y}{k_t^2} \frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial z} - \frac{\omega\epsilon k_x}{k_t^2} \widetilde{E}_z \quad (2.27)$$

ただし、

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (2.28)$$

ここで、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right) \widetilde{E}_z = 0 \quad (2.29)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right) \widetilde{H}_z = 0 \quad (2.30)$$

より、 $\widetilde{E}_z$ 、 $\widetilde{H}_z$ の解としては、 $e^{-jk_z z}$ 、 $e^{jk_z z}$ あるいは、 $\sin k_z z$ 、 $\cos k_z z$ のいずれかを考えればよい。

2.2 スペクトル領域グリーン関数の簡単な例

2.2.1 自由空間におけるスペクトル領域スカラー・グリーン関数

直角座標系 (x, y, z) を考え、 z 一定の面内において、 (x, y) の関数として表される自由空間のグリーン関数 (free-space Green's function) G_0 をフーリエ変換して、**スペクトル領域のグリーン関数** (Spectral-domain Green's function) $\widetilde{G}_0$ を求める。そこで、

$$\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z \quad (2.31)$$

$$\mathbf{r}' = x\mathbf{u}'_x + y\mathbf{u}'_y + z\mathbf{u}'_z \quad (2.32)$$

とし, $\bar{x} \equiv x - x'$, $\bar{y} \equiv y - y'$ とおくと, フーリエ変換対は次のようになる.

$$\tilde{G}_0(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} G_0(\bar{x}, \bar{y}) e^{-j(k_x \bar{x} + k_y \bar{y})} d\bar{x} d\bar{y} \quad (2.33)$$

$$G_0(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0(k_x, k_y) e^{j(k_x \bar{x} + k_y \bar{y})} dk_x dk_y \quad (2.34)$$

上の第2式より, スカラー・グリーン関数の満たすべき方程式は,

$$(\nabla^2 + k^2) \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0(k_x, k_y) e^{j(k_x \bar{x} + k_y \bar{y})} dk_x dk_y \right) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.35)$$

これより, 左辺の微分を実行して,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0(k_x, k_y) e^{j(k_x \bar{x} + k_y \bar{y})} dk_x dk_y \\ &= \left\{ (jk_x)^2 + (jk_y)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right\} G_0 \\ &= \left(-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) G_0 = -\delta(\bar{x})\delta(\bar{y})\delta(z - z') \end{aligned} \quad (2.36)$$

ここで,

$$k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (2.37)$$

とおくと,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right) G_0 = -\delta(\bar{x})\delta(\bar{y})\delta(z - z') \quad (2.38)$$

両辺をフーリエ変換すると,

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right) G_0 e^{-j(k_x \bar{x} + k_y \bar{y})} d\bar{x} d\bar{y} \\ &= - \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{x})\delta(\bar{y})\delta(z - z') e^{-j(k_x \bar{x} + k_y \bar{y})} d\bar{x} d\bar{y} \\ &= -\delta(z - z') \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{x}) e^{-jk_x \bar{x}} d\bar{x} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{y}) e^{-jk_y \bar{y}} d\bar{y} \\ &= -\delta(z - z') e^{-jk_x \cdot 0} e^{-jk_y \cdot 0} \\ &= -\delta(z - z') \end{aligned} \quad (2.39)$$

したがって,

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_z^2 \right) \tilde{G}_0 = -\delta(z - z') \quad (2.40)$$

これを解くために、右辺をゼロにしたときの解を用いて、未定係数を C とおき、 $\tilde{G}_0$ を次のようにおく、

$$\tilde{G}_0 \equiv C e^{-jk_z|z-z'|} = \begin{cases} C e^{-jk_z(z-z')} & (z > z') \\ C e^{jk_z(z-z')} & (z < z') \end{cases} \quad (2.41)$$

z で微分して、

$$\frac{d\tilde{G}_0}{dz} = \begin{cases} -jk_z C e^{-jk_z(z-z')} & (z > z') \\ jk_z C e^{jk_z(z-z')} & (z < z') \end{cases} \quad (2.42)$$

よって、与式を z' 近傍で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{z'^-}^{z'^+} \left(\frac{d^2}{dz^2} + k_z^2 \right) \tilde{G}_0(z) dz &= - \int_{z'^-}^{z'^+} \delta(z - z') dz \\ \left[\frac{d\tilde{G}_0}{dz} \right]_{z'^-}^{z'^+} + k_z^2 \int_{z'^-}^{z'^+} \tilde{G}_0 dz &= -1 \end{aligned} \quad (2.43)$$

上式の第2項はゼロゆえ、

$$-jk_z C - jk_z C = -1 \quad (2.44)$$

より、

$$C = \frac{1}{j2k_z} \quad (2.45)$$

したがって、自由空間におけるスペクトル領域スカラー・グリーン関数 $\tilde{G}_0$ は、

$$\tilde{G}_0 = \frac{e^{-jk_z|z-z'|}}{j2k_z} \quad (2.46)$$

2.2.2 スペクトル領域のベクトルポテンシャル

自由空間中において、 xy 面上に面電流 $\mathbf{J}_s$ がある場合を考える。自由空間のスカラー・グリーン関数 G_0 より、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は、

$$\mathbf{A} = \mu \int_S G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dx' dy' \quad (2.47)$$

両辺をフーリエ変換すると、

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A} e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\mu \int_S G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dx' dy' \right) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.48)$$

いま, $x'' = x - x'$, $y'' = y - y'$ で変数変換すると ($dx'' = dx$, $dy'' = dy$),

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= \mu \int_S \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \cdot \left(\iint_{-\infty}^{\infty} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-j\{k_x(x'+x'')+k_y(y'+y'')\}} dx'' dy'' \right) dx' dy' \\ &= \mu \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') e^{-j(k_x x' + k_y y')} dx' dy' \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} G_0(\mathbf{r}'') e^{-j(k_x x'' + k_y y'')} dx'' dy''\end{aligned}\quad (2.49)$$

ここで, $\mathbf{J}_s$, G_0 のフーリエ変換を $\tilde{\mathbf{J}}_s$, $\tilde{G}_0$ とすると,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mu \tilde{G}_0 \tilde{\mathbf{J}}_s \quad (2.50)$$

ただし,

$$\tilde{G}_0(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} G_0(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.51)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_s(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_s(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.52)$$

なお, 面電流分布 $\mathbf{J}_s$ は,

$$\mathbf{J}_s = J_x \mathbf{u}_x + J_y \mathbf{u}_y \quad (2.53)$$

$\tilde{\mathbf{A}}$ のフーリエ逆変換より,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \\ &= \frac{\mu}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0(k_x, k_y, z) \tilde{\mathbf{J}}_s(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y\end{aligned}\quad (2.54)$$

2.2.3 自由空間のスペクトル領域ダイアディック・グリーン関数

ベクトルポテンシャルが z 成分をもたず,

$$\mathbf{A}_T = A_x \mathbf{u}_x + A_y \mathbf{u}_y \quad (2.55)$$

で与えられる場合を考える. このとき,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_T = \left(\nabla_t + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{A}_T = \nabla_t \cdot \mathbf{A}_T \quad (2.56)$$

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_T = \left(\nabla_t + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \nabla_t \cdot \mathbf{A}_T \quad (2.57)$$

これより, 電界の xy 面内の分布 $\mathbf{E}_T$ は,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_T &= -j\omega \left(\mathbf{A}_T + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_T \right) \\ &= -\frac{j\omega}{k^2} \left(k^2 \mathbf{A}_T + \nabla_t \nabla_t \cdot \mathbf{A}_T \right)\end{aligned}\quad (2.58)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\nabla_t \nabla_t \cdot \mathbf{A}_T &= \nabla_t \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \mathbf{u}_y \\
&= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \right) \mathbf{u}_y
\end{aligned} \tag{2.59}$$

より,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_T &= -\frac{j\omega}{k^2} \left\{ \left(k^2 A_x + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{u}_x + \left(k^2 A_y + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \right) \mathbf{u}_y \right\} \\
&\equiv E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y
\end{aligned} \tag{2.60}$$

したがって, 電界の成分 E_x , E_y は,

$$E_x = -\frac{j\omega}{k^2} \left\{ \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A_x + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A_y \right\} \tag{2.61}$$

$$E_y = -\frac{j\omega}{k^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} A_x + \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A_y \right\} \tag{2.62}$$

ここで,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0 \tilde{\mathbf{J}}_s e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \tag{2.63}$$

より,

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A_x = \left\{ k^2 + (jk_x)^2 \right\} A_x = (k^2 - k_x^2) A_x = (k_y^2 + k_z^2) A_x \tag{2.64}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A_y = jk_x \cdot jk_y \cdot A_y = -k_x k_y A_y \tag{2.65}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} A_x = jk_y \cdot jk_x \cdot A_x = -k_y k_x A_x \tag{2.66}$$

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A_y = \left\{ k^2 + (jk_y)^2 \right\} A_y = (k^2 - k_y^2) A_y = (k_x^2 + k_z^2) A_y \tag{2.67}$$

したがって,

$$E_x = -\frac{j\omega}{k^2} \left\{ (k^2 - k_x^2) A_x - k_x k_y A_y \right\} \tag{2.68}$$

$$E_y = -\frac{j\omega}{k^2} \left\{ -k_x k_y A_x + (k^2 - k_y^2) A_y \right\} \tag{2.69}$$

両辺をフーリエ変換すると,

$$\tilde{E}_x = -\frac{j\omega}{k^2} \left\{ (k^2 - k_x^2) \tilde{A}_x - k_x k_y \tilde{A}_y \right\} \quad (2.70)$$

$$\tilde{E}_y = -\frac{j\omega}{k^2} \left\{ -k_x k_y \tilde{A}_x + (k^2 - k_y^2) \tilde{A}_y \right\} \quad (2.71)$$

先に示したように,

$$\tilde{A}_x = \mu \tilde{G}_0 \tilde{J}_x \quad (2.72)$$

$$\tilde{A}_y = \mu \tilde{G}_0 \tilde{J}_y \quad (2.73)$$

ゆえ,

$$\tilde{E}_x = -\frac{j\omega\mu}{k^2} \tilde{G}_0 \left\{ (k^2 - k_x^2) \tilde{J}_x - k_x k_y \tilde{J}_y \right\} \quad (2.74)$$

$$\tilde{E}_y = -\frac{j\omega\mu}{k^2} \tilde{G}_0 \left\{ -k_x k_y \tilde{J}_x + (k^2 - k_y^2) \tilde{J}_y \right\} \quad (2.75)$$

ベクトル表示すると,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}}_T &= -\frac{j\omega\mu}{k^2} \tilde{G}_0 \left[\left\{ (k^2 - k_x^2) \tilde{J}_x - k_x k_y \tilde{J}_y \right\} \mathbf{u}_x + \left\{ -k_x k_y \tilde{J}_x + (k^2 - k_y^2) \tilde{J}_y \right\} \mathbf{u}_y \right] \\ &\equiv \left(\tilde{G}_{xx} \tilde{J}_x + \tilde{G}_{xy} \tilde{J}_y \right) \mathbf{u}_x + \left(\tilde{G}_{yx} \tilde{J}_x + \tilde{G}_{yy} \tilde{J}_y \right) \mathbf{u}_y \end{aligned} \quad (2.76)$$

スペクトル領域のダイアディック・グリーン関数 $\widetilde{\tilde{\mathbf{G}}}_0$

$$\widetilde{\tilde{\mathbf{G}}}_0 = \tilde{G}_{xx} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{xy} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \tilde{G}_{yx} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{yy} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y \quad (2.77)$$

を用いてスペクトル領域の接線電界 $\widetilde{\mathbf{E}}_T$ が次のように表される.

$$\widetilde{\mathbf{E}}_T = \widetilde{\tilde{\mathbf{G}}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{J}}_s \quad (2.78)$$

ここで,

$$\tilde{G}_{xx} = -\frac{j\omega\mu}{k^2} \tilde{G}_0 (k^2 - k_x^2) \quad (2.79)$$

$$\tilde{G}_{xy} = \tilde{G}_{yx} = \frac{j\omega\mu}{k^2} \tilde{G}_0 k_x k_y \quad (2.80)$$

$$\tilde{G}_{yy} = -\frac{j\omega\mu}{k^2} \tilde{G}_0 (k^2 - k_y^2) \quad (2.81)$$

2.3 マイクロストリップ素子

2.3.1 マイクロストリップ素子のスペクトル領域の電磁界

地導体板 ($z = 0$) をつけた誘電体基板 (厚み d , 大きさは無限) 上にストリップ導体のあるマイクロストリップ素子について考える. まず, $z \geq d$ の領域 (II) については, 半無限領域ゆえ, 次のようにおくことにする.

$$\tilde{E}_{z,2} = Ae^{-jk_{z,2}z} \quad (z \geq d) \quad (2.82)$$

$$\tilde{H}_{z,2} = Be^{-jk_{z,2}z} \quad (z \geq d) \quad (2.83)$$

一方, $0 \leq z \leq d$ の領域 (I) については, 誘電体スラブ領域ゆえ,

$$\tilde{E}_{z,1} = C \cos k_{z,1}z + D \sin k_{z,1}z \quad (0 \leq z \leq d) \quad (2.84)$$

$$\tilde{H}_{z,1} = E \sin k_{z,1}z + F \cos k_{z,1}z \quad (0 \leq z \leq d) \quad (2.85)$$

ここで, A, B, C, D, E, F は未知係数であり, 境界条件によって決める. まず, $z = 0$ で完全導体ゆえ,

$$E_{x,1}(x, y) \Big|_{z=0} = E_{y,1}(x, y) \Big|_{z=0} = 0 \quad (2.86)$$

より, スペクトル領域でも,

$$\tilde{E}_{x,1}(k_x, k_y) \Big|_{z=0} = \tilde{E}_{y,1}(k_x, k_y) \Big|_{z=0} = 0 \quad (2.87)$$

ここで,

$$\frac{\partial \tilde{E}_{z,1}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (C \cos k_{z,1}z + D \sin k_{z,1}z) = -Ck_{z,1} \sin k_{z,1}z + Dk_{z,1} \cos k_{z,1}z \quad (2.88)$$

より,

$$\tilde{E}_{x,1} \Big|_{z=0} = \frac{jk_x}{k_t^2} \frac{\partial \tilde{E}_{z,1}}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\omega\mu k_y}{k_t^2} \tilde{H}_{z,1} \Big|_{z=0} = \frac{jk_x}{k_t^2} Dk_{z,1} + \frac{\omega\mu k_y}{k_t^2} F = 0 \quad (2.89)$$

$$\tilde{E}_{y,1} \Big|_{z=0} = \frac{jk_y}{k_t^2} \frac{\partial \tilde{E}_{z,1}}{\partial z} \Big|_{z=0} - \frac{\omega\mu k_x}{k_t^2} \tilde{H}_{z,1} \Big|_{z=0} = \frac{jk_y}{k_t^2} Dk_{z,1} - \frac{\omega\mu k_x}{k_t^2} F = 0 \quad (2.90)$$

よって,

$$D = F = 0 \quad (2.91)$$

したがって,

$$\tilde{E}_{z,1} = C \cos k_{z,1}z \quad (0 \leq z \leq d) \quad (2.92)$$

$$\tilde{H}_{z,1} = E \sin k_{z,1}z \quad (0 \leq z \leq d) \quad (2.93)$$

また、 $z = d$ の連続条件より、電界については、

$$E_{(x),1}(x, y) \Big|_{z=d} = E_{(x),2}(x, y) \Big|_{z=d} \quad (2.94)$$

より、

$$\tilde{E}_{(x),1}(k_x, k_y) \Big|_{z=d} = \tilde{E}_{(x),2}(k_x, k_y) \Big|_{z=d} \quad (2.95)$$

これより、電界について求めると、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{x,1} \Big|_{z=d} &= \frac{jk_x}{k_t^2} \left(-Ck_{z,1} \sin k_{z,1}d \right) + \frac{\omega\mu_1 k_y}{k_t^2} \cdot E \sin k_{z,1}d \\ &= \tilde{E}_{x,2} \Big|_{z=d} = \frac{jk_x}{k_t^2} \left(-jAk_{z,2}e^{-jk_{z,2}d} \right) + \frac{\omega\mu_2 k_y}{k_t^2} \cdot Be^{-jk_{z,2}d} \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{y,1} \Big|_{z=d} &= \frac{jk_y}{k_t^2} \left(-Ck_{z,1} \sin k_{z,1}d \right) - \frac{\omega\mu_1 k_x}{k_t^2} \cdot E \sin k_{z,1}d \\ &= \tilde{E}_{y,2} \Big|_{z=d} = \frac{jk_y}{k_t^2} \left(-jAk_{z,2}e^{-jk_{z,2}d} \right) - \frac{\omega\mu_2 k_x}{k_t^2} \cdot Be^{-jk_{z,2}d} \end{aligned} \quad (2.97)$$

一方、磁界については、 $z = d$ の境界の $x = x_0$, $y = y_0$ (位置ベクトル $\mathbf{r}_0$) に x 方向の微小電流を考え、

$$\mathbf{u}_z \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Big|_{z=d} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{u}_x \quad (2.98)$$

ただし、

$$\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{u}_x + y_0 \mathbf{u}_y + d \mathbf{u}_z \quad (2.99)$$

これをフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} &\iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \times (\mathbf{H}_2(x, y) - \mathbf{H}_1(x, y)) \Big|_{z=d} e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{u}_x e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \end{aligned} \quad (2.100)$$

これより、

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_z \times (\tilde{\mathbf{H}}_2(k_x, k_y) - \tilde{\mathbf{H}}_1(k_x, k_y)) \Big|_{z=d} \\ &= \mathbf{u}_z \times \left\{ (\tilde{H}_{x,2} \Big|_{z=d} - \tilde{H}_{x,1} \Big|_{z=d}) \mathbf{u}_x + (\tilde{H}_{y,2} \Big|_{z=d} - \tilde{H}_{y,1} \Big|_{z=d}) \mathbf{u}_y \right\} \\ &= (\tilde{H}_{x,2} \Big|_{z=d} - \tilde{H}_{x,1} \Big|_{z=d}) \mathbf{u}_y - (\tilde{H}_{y,2} \Big|_{z=d} - \tilde{H}_{y,1} \Big|_{z=d}) \mathbf{u}_x \\ &= \mathbf{u}_x e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \end{aligned} \quad (2.101)$$

よって,

$$\widetilde{H}_{y,2}\Big|_{z=d} - \widetilde{H}_{y,1}\Big|_{z=d} = -e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \quad (2.102)$$

$$\widetilde{H}_{x,2}\Big|_{z=d} - \widetilde{H}_{x,1}\Big|_{z=d} = 0 \quad (2.103)$$

また, 磁界について求めると,

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{x,1}\Big|_{z=d} &= \frac{jk_x}{k_t^2} \cdot E k_{z,1} \cos k_{z,1} d - \frac{\omega \epsilon_1 k_y}{k_t^2} \cdot C \cos k_{z,1} d \\ &= \widetilde{H}_{x,2}\Big|_{z=d} = \frac{jk_x}{k_t^2} \left(-j B k_{z,2} e^{-jk_{z,2} d} \right) - \frac{\omega \epsilon_2 k_y}{k_t^2} \cdot A e^{-jk_{z,2} d} \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{y,1}\Big|_{z=d} &= \frac{jk_y}{k_t^2} \cdot E k_{z,1} \cos k_{z,1} d + \frac{\omega \epsilon_1 k_x}{k_t^2} \cdot C \cos k_{z,1} d \\ &= \widetilde{H}_{y,2}\Big|_{z=d} + e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \\ &= \frac{jk_y}{k_t^2} \left(-j B k_{z,2} e^{-jk_{z,2} d} \right) + \frac{\omega \epsilon_2 k_x}{k_t^2} \cdot A e^{-jk_{z,2} d} + e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \end{aligned} \quad (2.105)$$

整理すると,

$$-jk_x k_{z,1} C \sin k_{z,1} d + \omega \mu_1 k_y E \sin k_{z,1} d = k_x k_{z,2} A e^{-jk_{z,2} d} + \omega \mu_2 k_y B e^{-jk_{z,2} d} \quad (2.106)$$

$$-jk_y k_{z,1} C \sin k_{z,1} d - \omega \mu_1 k_x E \sin k_{z,1} d = k_y k_{z,2} A e^{-jk_{z,2} d} - \omega \mu_2 k_x B e^{-jk_{z,2} d} \quad (2.107)$$

$$jk_x k_{z,1} E \cos k_{z,1} d - \omega \epsilon_1 k_y C \cos k_{z,1} d = k_x k_{z,2} B e^{-jk_{z,2} d} - \omega \epsilon_2 k_y A e^{-jk_{z,2} d} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} &jk_y k_{z,1} E \cos k_{z,1} d + \omega \epsilon_1 k_x C \cos k_{z,1} d \\ &= k_y k_{z,2} B e^{-jk_{z,2} d} + \omega \epsilon_2 k_x A e^{-jk_{z,2} d} + k_t^2 e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \end{aligned} \quad (2.109)$$

まず, $k_y \times$ 式 (2.106) - $k_x \times$ 式 (2.107) より, A, C を消去して,

$$\mu_1 E \sin k_{z,1} d = \mu_2 B e^{-jk_{z,2} d} \quad (2.110)$$

また, $k_x \times$ 式 (2.108) + $k_y \times$ 式 (2.109) より, A, C を消去して,

$$jk_{z,1} E \cos k_{z,1} d = k_{z,2} B e^{-jk_{z,2} d} + k_y e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \quad (2.111)$$

これより, B を消去すると E は,

$$E = \frac{-j \mu_2 k_y e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)}}{k_{z,1} \mu_2 \cos k_{z,1} d + j k_{z,2} \mu_1 \sin k_{z,1} d} \quad (2.112)$$

これより, B は,

$$B = \frac{\mu_1}{\mu_2} E \sin k_{z,1} d e^{jk_{z,2} d} = \frac{-j \mu_1 k_y \sin k_{z,1} d e^{jk_{z,2} d} e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)}}{k_{z,1} \mu_2 \cos k_{z,1} d + j k_{z,2} \mu_1 \sin k_{z,1} d} \quad (2.113)$$

いま, $\mu_i = \mu_0 \mu_{r,i}$ ($i = 1, 2$),

$$T_e \equiv k_{z,1} \mu_{r,2} \cos k_{z,1} d + j k_{z,2} \mu_{r,1} \sin k_{z,1} d \quad (2.114)$$

とおくと, $\widetilde{H}_{z,1}$, $\widetilde{H}_{z,2}$ は次のようになる.

$$\widetilde{H}_{z,1} = E \sin k_{z,1} z = \frac{-j \mu_{r,2} k_y \sin k_{z,1} z}{T_e} e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \quad (2.115)$$

$$\widetilde{H}_{z,2} = B e^{-j k_{z,2} z} = \frac{-j \mu_{r,1} k_y \sin k_{z,1} d e^{-j k_{z,2}(z-d)}}{T_e} e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \quad (2.116)$$

同様にして, $k_y \times$ 式 (2.106) + $k_x \times$ 式 (2.107) より, B , E を消去して,

$$-j k_{z,1} C \sin k_{z,1} d = k_{z,2} A e^{-j k_{z,2} d} \quad (2.117)$$

また, $k_x \times$ 式 (2.108) - $k_y \times$ 式 (2.109) より, B , E を消去して,

$$-\omega \epsilon_1 C \cos k_{z,1} d = -\omega \epsilon_2 A e^{-j k_{z,2} d} - k_x e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \quad (2.118)$$

これより, A を消去すると C は,

$$C = \frac{k_x k_{z,2} e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)}}{\omega (k_{z,2} \epsilon_1 \cos k_{z,1} d + j k_{z,1} \epsilon_2 \sin k_{z,1} d)} \quad (2.119)$$

よって, A は,

$$A = \frac{-j k_{z,1}}{k_{z,2}} C \sin k_{z,1} d e^{j k_{z,2} d} = \frac{-j k_x k_{z,1} \sin k_{z,1} d e^{j k_{z,2} d} e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)}}{\omega (k_{z,2} \epsilon_1 \cos k_{z,1} d + j k_{z,1} \epsilon_2 \sin k_{z,1} d)} \quad (2.120)$$

いま, $\epsilon_i = \epsilon_0 \epsilon_{r,i}$ ($i = 1, 2$),

$$T_m \equiv k_{z,2} \epsilon_{r,1} \cos k_{z,1} d + j k_{z,1} \epsilon_{r,2} \sin k_{z,1} d \quad (2.121)$$

とおくと, $\widetilde{E}_{z,1}$, $\widetilde{E}_{z,2}$ は次のようになる.

$$\widetilde{E}_{z,1} = C \cos k_{z,1} z = \frac{k_x k_{z,2} \cos k_{z,1} z}{\omega \epsilon_0 T_m} e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \quad (2.122)$$

$$\widetilde{E}_{z,2} = A e^{-j k_{z,2} z} = \frac{-j k_x k_{z,1} \sin k_{z,1} d e^{-j k_{z,2}(z-d)}}{\omega \epsilon_0 T_m} e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \quad (2.123)$$

微小電流のかわりに, x 成分のみもつ面電流分布 $J_x(x', y')$ を考えても同様に,

$$\widetilde{E}_{z,2} = \frac{-j k_x k_{z,1} \sin(k_{z,1} d)}{\omega \epsilon_0 T_m} e^{-j k_{z,2}(z-d)} \widetilde{J}_x(k_x, k_y) \quad (2.124)$$

$$\widetilde{H}_{z,2} = \frac{-j \mu_{r,1} k_y \sin(k_{z,1} d)}{T_e} e^{-j k_{z,2}(z-d)} \widetilde{J}_x(k_x, k_y) \quad (2.125)$$

$$\widetilde{E}_{z,1} = \frac{k_x k_{z,2} \cos(k_{z,1} z)}{\omega \epsilon_0 T_m} \widetilde{J}_x(k_x, k_y) \quad (2.126)$$

$$\widetilde{H}_{z,1} = \frac{-j \mu_{r,2} k_y \sin(k_{z,1} z)}{T_e} \widetilde{J}_x(k_x, k_y) \quad (2.127)$$

ただし, $\tilde{J}_x(k_x, k_y)$ は $J_x(x', y')$ のフーリエ変換を示し, 次のようになる.

$$\tilde{J}_x(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} J_x(x', y') e^{-j(k_x x' + k_y y')} dx' dy' \quad (2.128)$$

したがって, $z = d$ におけるスペクトル領域の電界成分 $\tilde{E}_x$, $\tilde{E}_y$, $\tilde{E}_z$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x(k_x, k_y, d) &= \left\{ \frac{jk_x}{k_t^2} \cdot (-jk_{z,2}) \frac{-jk_x k_{z,1} \sin(k_{z,1}d)}{\omega\epsilon_0 T_m} + \frac{\omega\mu_2 k_y}{k_t^2} \cdot \frac{-j\mu_{r,1} k_y \sin(k_{z,1}d)}{T_e} \right\} \tilde{J}_x \\ &= \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{\sin(k_{z,1}d)}{k_t^2} \left\{ \frac{k_x^2 k_{z,1} k_{z,2}}{T_m} + \frac{\mu_{r,1} \mu_{r,2} k_y^2 k_0^2}{T_e} \right\} \tilde{J}_x(k_x, k_y) \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_y(k_x, k_y, d) &= \left\{ \frac{jk_y}{k_t^2} \cdot (-jk_{z,2}) \frac{-jk_x k_{z,1} \sin(k_{z,1}d)}{\omega\epsilon_0 T_m} - \frac{\omega\mu_2 k_x}{k_t^2} \cdot \frac{-j\mu_{r,1} k_y \sin(k_{z,1}d)}{T_e} \right\} \tilde{J}_x \\ &= \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{k_x k_y \sin(k_{z,1}d)}{k_t^2} \left\{ \frac{k_{z,1} k_{z,2}}{T_m} - \frac{\mu_{r,1} \mu_{r,2} k_0^2}{T_e} \right\} \tilde{J}_x(k_x, k_y) \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$\tilde{E}_z(k_x, k_y, d) = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{k_x k_{z,1} \sin(k_{z,1}d)}{T_m} \tilde{J}_x(k_x, k_y) \quad (2.131)$$

同様にして y 成分のみをもつ面電流分布 $J_y(x', y')$ について求めると,

$$\tilde{E}_x(k_x, k_y, d) = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{k_x k_y \sin(k_{z,1}d)}{k_t^2} \left\{ \frac{k_{z,1} k_{z,2}}{T_m} - \frac{\mu_{r,1} \mu_{r,2} k_0^2}{T_e} \right\} \tilde{J}_y(k_x, k_y) \quad (2.132)$$

$$\tilde{E}_y(k_x, k_y, d) = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{\sin(k_{z,1}d)}{k_t^2} \left\{ \frac{k_y^2 k_{z,1} k_{z,2}}{T_m} + \frac{\mu_{r,1} \mu_{r,2} k_x^2 k_0^2}{T_e} \right\} \tilde{J}_y(k_x, k_y) \quad (2.133)$$

行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{xx}^{EJ} & \tilde{Z}_{xy}^{EJ} \\ \tilde{Z}_{yx}^{EJ} & \tilde{Z}_{yy}^{EJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \end{pmatrix} \quad (2.134)$$

ただし,

$$\tilde{Z}_{xx}^{EJ} = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{\sin(k_{z,1}d)}{k_t^2} \left\{ \frac{k_x^2 k_{z,1} k_{z,2}}{T_m} + \frac{\mu_{r,1} \mu_{r,2} k_y^2 k_0^2}{T_e} \right\} \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{yx}^{EJ} &= \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{k_x k_y \sin(k_{z,1}d)}{k_t^2} \left\{ \frac{k_{z,1} k_{z,2}}{T_m} - \frac{\mu_{r,1} \mu_{r,2} k_0^2}{T_e} \right\} \\ &= \tilde{Z}_{xy}^{EJ} \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$\tilde{Z}_{yy}^{EJ} = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{\sin(k_{z,1}d)}{k_t^2} \left\{ \frac{k_y^2 k_{z,1} k_{z,2}}{T_m} + \frac{\mu_{r,1} \mu_{r,2} k_x^2 k_0^2}{T_e} \right\} \quad (2.137)$$

また、ベクトル表示すると、 xy 面内の電界成分 $\widetilde{\mathbf{E}}_t (= \widetilde{E}_x \mathbf{u}_x + \widetilde{E}_y \mathbf{u}_y)$ は、

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}}_t &= (\widetilde{Z}_{xx}^{EJ} \widetilde{J}_x + \widetilde{Z}_{xy}^{EJ} \widetilde{J}_y) \mathbf{u}_x + (\widetilde{Z}_{yx}^{EJ} \widetilde{J}_x + \widetilde{Z}_{yy}^{EJ} \widetilde{J}_y) \mathbf{u}_y \\ &\equiv \widetilde{\mathbf{Z}}^{\widetilde{EJ}} \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_t\end{aligned}\tag{2.138}$$

ここで、

$$\widetilde{\mathbf{Z}}^{\widetilde{EJ}} = \widetilde{Z}_{xx}^{EJ} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \widetilde{Z}_{xy}^{EJ} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \widetilde{Z}_{yx}^{EJ} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \widetilde{Z}_{yy}^{EJ} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y\tag{2.139}$$

$$\widetilde{\mathbf{J}}_t = \widetilde{J}_x \mathbf{u}_x + \widetilde{J}_y \mathbf{u}_y\tag{2.140}$$

2.3.2 マイクロストリップ素子のスペクトル領域の電界型ダイアディック・グリーン関数の表示式

いま、 $0 \leq z \leq d$ の領域 (I) が比誘電率 $\epsilon_{r,1} \equiv \epsilon_r$ の誘電体基板 (比透磁率 $\mu_{r,1} = 1$)、 $z \geq d$ の領域 (II) が空気 (真空とみなし、 $\epsilon_{r,2} = 1$, $\mu_{r,2} = 1$) のとき、 $k_{z,1} \equiv k_1$, $k_{z,2} \equiv k_2$, 自由空間波数を k_0 とおくと、

$$k_0^2 \epsilon_r = k_t^2 + k_1^2\tag{2.141}$$

$$k_0^2 = k_t^2 + k_2^2\tag{2.142}$$

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2\tag{2.143}$$

これより、

$$\begin{aligned}T_e &= k_{z,1} \mu_{r,2} \cos k_{z,1} d + j k_{z,2} \mu_{r,1} \sin k_{z,1} d \\ &= k_1 \cos k_1 d + j k_2 \sin k_1 d\end{aligned}\tag{2.144}$$

$$\begin{aligned}T_m &= k_{z,2} \epsilon_{r,1} \cos k_{z,1} d + j k_{z,1} \epsilon_{r,2} \sin k_{z,1} d \\ &= k_2 \epsilon_1 \cos k_1 d + j k_1 \sin k_1 d\end{aligned}\tag{2.145}$$

よって、マトリクス要素 $\widetilde{Z}_{xx}^{EJ}$ は、

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}_{xx}^{EJ} &= \frac{-j}{\omega \epsilon_0} \cdot \frac{\sin k_1 d}{k_t^2} \left(\frac{k_x^2 k_1 k_2}{T_m} + \frac{k_y^2 k_0^2}{T_e} \right) \\ &= \frac{-j}{\omega \epsilon_0} \cdot \frac{\sin k_1 d}{k_t^2} \cdot \frac{k_x^2 k_1 k_2 T_e + k_y^2 k_0^2 T_m}{T_e T_m} \\ &= \frac{-j}{\omega \epsilon_0} \cdot \frac{\sin k_1 d}{k_t^2} \cdot \frac{k_2 (k_x^2 k_1^2 + k_y k_0^2 \epsilon_r) \cos k_1 d + k_1 (k_x^2 k_2^2 + k_y^2 k_0^2) j \sin k_1 d}{T_e T_m} \\ &= \frac{-j}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\sin k_1 d}{k_t^2} \cdot \frac{k_2 k_t^2 (\epsilon_r k_0^2 - k_x^2) \cos k_1 d + k_1 k_t^2 (k_0^2 - k_x^2) j \sin k_1 d}{T_e T_m} \\ &= \frac{-j Z_0}{k_0} \cdot \frac{k_2 (\epsilon_r k_0^2 - k_x^2) \cos k_1 d + j k_1 (k_0^2 - k_x^2) \sin k_1 d}{T_e T_m} \sin k_1 d\end{aligned}\tag{2.146}$$

ただし, Z_0 は自由空間の波動インピーダンスを示す. また, $\tilde{Z}_{xy}^{EJ}$, $\tilde{Z}_{yx}^{EJ}$ は,

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_{yx}^{EJ} &= \tilde{Z}_{xy}^{EJ} = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{k_x k_y \sin k_1 d}{k_t^2} \left(\frac{k_1 k_2}{T_m} - \frac{k_0^2}{T_e} \right) \\
&= \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{k_x k_y \sin k_1 d}{k_t^2} \cdot \frac{k_1 k_2 T_e - k_0^2 T_m}{T_e T_m} \\
&= \frac{-j}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{k_x k_y \sin k_1 d}{k_t^2} \cdot \frac{k_2(k_1^2 - k_0^2\epsilon_r) \cos k_1 d + k_1(k_2^2 - k_0^2)j \sin k_1 d}{T_e T_m} \\
&= \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{k_x k_y \sin k_1 d}{k_t^2} \cdot \frac{k_2(-k_t^2) \cos k_1 d + j k_1(-k_t^2) \sin k_1 d}{T_e T_m} \\
&= \frac{j Z_0}{k_0} \cdot \frac{k_x k_y (k_2 \cos k_1 d + j k_1 \sin k_1 d)}{T_e T_m} \sin k_1 d
\end{aligned} \tag{2.147}$$

また, $\tilde{Z}_{yy}^{EJ}$ は, x と y を入れ換えれた式となり,

$$\tilde{Z}_{yy}^{EJ} = \frac{-j Z_0}{k_0} \cdot \frac{k_2(\epsilon_r k_0^2 - k_y^2) \cos k_1 d + j k_1(k_0^2 - k_y^2) \sin k_1 d}{T_e T_m} \sin k_1 d \tag{2.148}$$

2.4 モーメント法

2.4.1 空間領域における解析

マイクロストリップ導体表面の電流分布 $\mathbf{J}_s$ を, 基底関数 $f_{x,n}$, $f_{y,n}$ により次のように展開して近似する.

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_s &\simeq \mathbf{u}_x \sum_{n=1}^{N_x} I_{x,n} f_{x,n}(x, y) + \mathbf{u}_y \sum_{n=1}^{N_y} I_{y,n} f_{y,n}(x, y) \\
&= \sum_{n=1}^{N_x} I_{x,n} \mathbf{f}_{x,n}(x, y) + \sum_{n=1}^{N_y} I_{y,n} \mathbf{f}_{y,n}(x, y)
\end{aligned} \tag{2.149}$$

ただし, $I_{x,n}$, $I_{y,n}$ は未知複素係数を示す. いま, 励振電流源を $\mathbf{J}_e$ とすると, マイクロストリップ導体表面での電界の境界条件より,

$$\left(\mathbf{E}(\mathbf{J}_e) + \mathbf{E}(\mathbf{J}_s) \right)_{\tan} = 0 \quad (\text{on } S) \tag{2.150}$$

上式に, 基底関数 $\mathbf{f}_{x,m}$ ($n = 1, 2, \dots, N_x$), $\mathbf{f}_{y,m}$ ($n = 1, 2, \dots, N_y$) のスカラ積をとって面積分すると,

$$\iint_S \mathbf{E}(\mathbf{J}_e) \cdot \mathbf{f}_{(x),m} dS = - \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{J}_s) \cdot \mathbf{f}_{(x),m} dS \quad (\text{on } S) \tag{2.151}$$

電界 $\mathbf{E}(\mathbf{J}_s)$ は、ベクトル基底関数 $\mathbf{f}_{x,n}$, $\mathbf{f}_{y,n}$ による電界の重ね合わせで、

$$\mathbf{E}(\mathbf{J}_s) \simeq \sum_{n=1}^{N_x} I_{x,n} \mathbf{E}(\mathbf{f}_{x,n}) + \sum_{n=1}^{N_y} I_{y,n} \mathbf{E}(\mathbf{f}_{y,n}) \quad (2.152)$$

のように表すことができ、これより、

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{J}_e) \cdot \mathbf{f}_{(x),m} dS &= - \iint_S \left(\sum_{n=1}^{N_x} I_{x,n} \mathbf{E}(\mathbf{f}_{x,n}) + \sum_{n=1}^{N_y} I_{y,n} \mathbf{E}(\mathbf{f}_{y,n}) \right) \cdot \mathbf{f}_{(x),m} dS \\ &= - \sum_{n=1}^{N_x} I_{x,n} \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{f}_{x,n}) \cdot \mathbf{f}_{(x),m} dS \\ &\quad - \sum_{n=1}^{N_y} I_{y,n} \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{f}_{y,n}) \cdot \mathbf{f}_{(x),m} dS \end{aligned} \quad (2.153)$$

ここで、

$$V_m^{(x)} \equiv \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{J}_e) \cdot \mathbf{f}_{x,m} dS \quad (2.154)$$

$$V_m^{(y)} \equiv \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{J}_e) \cdot \mathbf{f}_{y,m} dS \quad (2.155)$$

また、

$$z_{mn}^{(xx)} \equiv - \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{f}_{x,n}) \cdot \mathbf{f}_{x,m} dS \quad (2.156)$$

$$z_{mn}^{(xy)} \equiv - \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{f}_{y,n}) \cdot \mathbf{f}_{x,m} dS \quad (2.157)$$

$$z_{mn}^{(yx)} \equiv - \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{f}_{x,n}) \cdot \mathbf{f}_{y,m} dS \quad (2.158)$$

$$z_{mn}^{(yy)} \equiv - \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{f}_{y,n}) \cdot \mathbf{f}_{y,m} dS \quad (2.159)$$

とおくと、

$$V_m^{(x)} = \sum_{n=1}^{N_x} I_{x,n} z_{mn}^{(xx)} + \sum_{n=1}^{N_y} I_{y,n} z_{mn}^{(xy)} \quad (m = 1, 2, \dots, N_x) \quad (2.160)$$

$$V_m^{(y)} = \sum_{n=1}^{N_x} I_{x,n} z_{mn}^{(yx)} + \sum_{n=1}^{N_y} I_{y,n} z_{mn}^{(yy)} \quad (m = 1, 2, \dots, N_y) \quad (2.161)$$

行列表示すると、

$$\mathbf{V} = [\mathbf{Z}] \mathbf{I} \quad (2.162)$$

ただし、 $\mathbf{V}$, $\mathbf{I}$ は $(N_x + N_y)$ 列ベクトル、 $[\mathbf{Z}]$ は $(N_x + N_y)$ 次の正方行列である。よって、

$$\mathbf{I} = [\mathbf{Z}]^{-1} \mathbf{V} = [\mathbf{Y}] \mathbf{V} \quad (2.163)$$

ただし

$$[Y] = [Z]^{-1} \quad (2.164)$$

2.4.2 スペクトル領域への変換

電界 $\mathbf{E}(\mathbf{f}_{x,n})$, $\mathbf{E}(\mathbf{f}_{y,n})$ のフーリエ変換 $\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{f}_{x,n})$, $\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{f}_{y,n})$ は, 次式で与えられる.

$$\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{f}_{x,n}) = (\mathbf{u}_x \widetilde{Z}_{xx}^{EJ} + \mathbf{u}_y \widetilde{Z}_{yx}^{EJ}) \widetilde{f}_{x,n} \quad (2.165)$$

$$\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{f}_{y,n}) = (\mathbf{u}_x \widetilde{Z}_{xy}^{EJ} + \mathbf{u}_y \widetilde{Z}_{yy}^{EJ}) \widetilde{f}_{y,n} \quad (2.166)$$

これを逆フーリエ変換すれば,

$$\mathbf{E}(\mathbf{f}_{x,n}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{u}_x \widetilde{Z}_{xx}^{EJ} + \mathbf{u}_y \widetilde{Z}_{yx}^{EJ}) \widetilde{f}_{x,n} e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (2.167)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{f}_{y,n}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{u}_x \widetilde{Z}_{xy}^{EJ} + \mathbf{u}_y \widetilde{Z}_{yy}^{EJ}) \widetilde{f}_{y,n} e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (2.168)$$

こよれり, $z_{mn}^{(xx)}$ は,

$$\begin{aligned} z_{mn}^{(xx)} &= - \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{f}_{x,n}) \cdot \mathbf{f}_{x,m} dS \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \iint_S \iint_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{u}_x \widetilde{Z}_{xx}^{EJ} + \mathbf{u}_y \widetilde{Z}_{yx}^{EJ}) \widetilde{f}_{x,n} e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \cdot \mathbf{f}_{x,m} dS \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \iint_S \left(\iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{Z}_{xx}^{EJ} \widetilde{f}_{x,n} e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right) \mathbf{f}_{x,m} dS \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\iint_S \mathbf{f}_{x,m} e^{j(k_x x + k_y y)} dS \right) \widetilde{Z}_{xx}^{EJ} \widetilde{f}_{x,n} dk_x dk_y \end{aligned} \quad (2.169)$$

ここで,

$$\widetilde{f}(-k_x, -k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.170)$$

より,

$$z_{mn}^{(xx)} = \frac{-1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}_{x,m}(-k_x, -k_y) \widetilde{Z}_{xx}^{EJ}(k_x, k_y) \widetilde{f}_{x,n}(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (2.171)$$

同様にして,

$$z_{mn}^{(xy)} = \frac{-1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}_{x,m}(-k_x, -k_y) \widetilde{Z}_{xy}^{EJ}(k_x, k_y) \widetilde{f}_{y,n}(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (2.172)$$

$$z_{mn}^{(yx)} = \frac{-1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}_{y,m}(-k_x, -k_y) \widetilde{Z}_{yx}^{EJ}(k_x, k_y) \widetilde{f}_{x,n}(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (2.173)$$

$$z_{mn}^{(yy)} = \frac{-1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}_{y,m}(-k_x, -k_y) \widetilde{Z}_{yy}^{EJ}(k_x, k_y) \widetilde{f}_{y,n}(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (2.174)$$

基底関数をベクトル表示して,

$$\tilde{\mathbf{f}}_n = \begin{cases} \tilde{f}_{x,n} \mathbf{u}_x & (x \text{ 方向電流}) \\ \tilde{f}_{y,n} \mathbf{u}_y & (y \text{ 方向電流}) \end{cases} \quad (2.175)$$

で表せば, マトリクス要素はダイアディックを用いて次のようになる.

$$z_{mn} = \frac{-1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{f}}_m(-k_x, -k_y) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}^{EJ}(k_x, k_y) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_n(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (2.176)$$

2.4.3 マイクロストリップ・ダイポール素子

マイクロストリップ・ダイポール素子について, 細線近似同様, 線状方向 (x 方向とする) に沿う電流成分のみを考え, 幅方向 (y 方向とする) には分布は一様とみなし, 電流分布をパルス状の基底関数 f_u により展開する.

$$\mathbf{J}_s(x, y) \simeq \mathbf{u}_x \sum_i I_i f_i(x) f_u(y) \quad (2.177)$$

線幅を W , 座標原点をダイポール中心にとると,

$$f_u(y) = \begin{cases} \frac{1}{W} & \left(-\frac{W}{2} \leq y \leq \frac{W}{2}\right) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.178)$$

スペクトル領域に変換すると,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_u(k_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_u(y) e^{-jk_y y} dy = \int_{-W/2}^{W/2} \frac{1}{W} e^{-jk_y y} dy = \frac{1}{W} \left[\frac{e^{-jk_y y}}{-jk_y} \right]_{-W/2}^{W/2} \\ &= \frac{1}{-jk_y W} \left(e^{-jk_y W/2} - e^{jk_y W/2} \right) = \frac{-j2 \sin(k_y W/2)}{-jk_y W} = \frac{\sin(k_y W/2)}{k_y W/2} \end{aligned} \quad (2.179)$$

ここで, f_i は線状方向の分布を表すための基底関数を示し, 線状アンテナでは, 次を示す区分的な正弦波状の基底関数 (piecewise-sinusoidal (PWS) function) がよく用いられる.

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{\sin k_e(x - x_{i-1})}{\sin k_e(x_i - x_{i-1})} & (x_{i-1} \leq x \leq x_i) \\ \frac{\sin k_e(x_{i+1} - x)}{\sin k_e(x_{i+1} - x_i)} & (x_i \leq x \leq x_{i+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.180)$$

ただし,

$$k_e = k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}} \quad (2.181)$$

スペクトル領域への変換については、次のようになる。

$$\begin{aligned}\tilde{f}_i(k_x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) e^{-jk_x x} dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\sin k_e(x - x_{i-1})}{\sin k_e(x_i - x_{i-1})} e^{-jk_x x} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\sin k_e(x_{i+1} - x)}{\sin k_e(x_{i+1} - x_i)} e^{-jk_x x} dx\end{aligned}\quad (2.182)$$

不定積分の公式（導出省略）

$$\int e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) \quad (2.183)$$

を用いて求めると（導出省略），

$$\begin{aligned}\tilde{f}_i(k_x) &= \frac{k_e e^{-jk_x x_i}}{k_x^2 - k_e^2} \left\{ \frac{\cos k_e(x_i - x_{i-1}) - e^{jk_x(x_i - x_{i-1})}}{\sin k_e(x_i - x_{i-1})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos k_e(x_{i+1} - x_i) - e^{-jk_x(x_{i+1} - x_i)}}{\sin k_e(x_{i+1} - x_i)} \right\}\end{aligned}\quad (2.184)$$

等間隔（ $h \equiv x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$ ）に分割した場合，基底関数は

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{\sin k_e(h - |x - x_i|)}{\sin k_e h} & (|x - x_i| \leq h) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.185)$$

となり，スペクトル領域では，

$$\tilde{f}_i(k_x) = \frac{2k_e (\cos k_e h - \cos k_x h)}{(k_x^2 - k_e^2) \sin k_e h} e^{-jk_x x_i} \quad (2.186)$$

また，パッチアンテナでは，モードの重ね合わせを行う**全領域基底関数**（entire-domain basis function）がよく用いられ，変数分離した1変数（長さ L ）の基底関数は次のようになる。

$$f_m(x) = \begin{cases} \sin \frac{m\pi}{L} \left(x + \frac{L}{2} \right) & \left(-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \right) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.187)$$

これより，スペクトル領域では，

$$\begin{aligned}\tilde{f}_m(k_x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) e^{-jk_x x} dx = \int_{-L/2}^{L/2} \sin \frac{m\pi}{L} \left(x + \frac{L}{2} \right) e^{-jk_x x} dx \\ &= \frac{\frac{2m\pi}{L}}{\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - k_x^2} \begin{cases} \cos k_x \frac{L}{2} & (m = 1, 3, 5, \dots) \\ j \sin k_x \frac{L}{2} & (m = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}\end{aligned}\quad (2.188)$$

なお，長さ L にわたって積分する場合， m が偶数次のときは積分がゼロとなるので，奇数次のみを考えればよい。

2.4.4 理想的なプローブ給電のパッチアンテナ

相反定理より,

$$\begin{aligned} V_m^{(x)} &= \int_S \mathbf{E}(\mathbf{J}_e) \cdot \mathbf{f}_{(y),m}^{(x)} dS \\ &= \int_V \mathbf{E}(\mathbf{f}_{(y),m}^{(x)}) \cdot \mathbf{J}_e dV \end{aligned} \quad (2.189)$$

点 (x_p, y_p) に理想的なプローブで給電したとすると, 励振電流 $\mathbf{J}_e$ は,

$$\mathbf{J}_e = \delta(x - x_p) \delta(y - y_p) \mathbf{u}_z \quad (2.190)$$

で表され, プローブの積分範囲 l_p を $0 \leq z \leq h$ とすると,

$$\begin{aligned} V_m^{(x)} &= \int_{l_p} \mathbf{E}(\mathbf{f}_{(y),m}^{(x)}) \cdot \delta(x - x_p) \delta(y - y_p) \mathbf{u}_z dV \\ &= \int_0^h E_z(\mathbf{f}_{(y),m}^{(x)})|_{(x_p, y_p)} dz \end{aligned} \quad (2.191)$$

ここで, $E_z(\mathbf{f}_{(y),m}^{(x)})$ ($0 \leq z \leq h$) のスペクトル領域の式は,

$$\tilde{E}_z(\mathbf{f}_{(y),m}^{(x)}) = \frac{k_{(y)}^{(x)} k_{z,2} \cos(k_{z,1} z)}{\omega \epsilon_0 T_m} \tilde{f}_{(y),m}^{(x)} \quad (2.192)$$

逆フーリエ変換して,

$$E_z(\mathbf{f}_{(y),m}^{(x)})|_{(x_p, y_p)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{k_{(y)}^{(x)} k_{z,2} \cos(k_{z,1} z)}{\omega \epsilon_0 T_m} \tilde{f}_{(y),m}^{(x)} e^{j(k_x x_p + k_y y_p)} dk_x dk_y$$

よって,

$$\begin{aligned} V_m^{(x)} &= \int_0^h \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{k_{(y)}^{(x)} k_{z,2} \cos(k_{z,1} z)}{\omega \epsilon_0 T_m} \tilde{f}_{(y),m}^{(x)} e^{j(k_x x_p + k_y y_p)} dk_x dk_y dz \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{k_{(y)}^{(x)} k_{z,2}}{\omega \epsilon_0 T_m} \tilde{f}_{(y),m}^{(x)} e^{j(k_x x_p + k_y y_p)} dk_x dk_y \int_0^h \cos(k_{z,1} z) dz \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{k_{(y)}^{(x)} k_{z,2} \sin(k_{z,1} h)}{\omega \epsilon_0 k_{z,1} T_m} \tilde{f}_{(y),m}^{(x)} e^{j(k_x x_p + k_y y_p)} dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{Z}_{z,(y)}^{EJ} \tilde{f}_{(y),m}^{(x)} e^{j(k_x x_p + k_y y_p)} dk_x dk_y \end{aligned} \quad (2.193)$$

ここで,

$$\tilde{Z}_{z,(y)}^{EJ} \equiv \frac{k_{(y)}^{(x)} k_{z,2} \sin(k_{z,1} h)}{\omega \epsilon_0 k_{z,1} T_m} \quad (2.194)$$

2.5 スペクトル領域のベクトルポテンシャル

2.5.1 スペクトル領域のベクトルポテンシャルによるスペクトル領域の電磁界

等質・等方性媒質において、電流分布 $\mathbf{J}$ による電磁界 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ は、磁氣的ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用いて次式で与えられる.

$$\mathbf{E} = -j\omega \left(\mathbf{A} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} \right) \quad (2.195)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.196)$$

ただし、電流は面 S に分布している場合を考え、

$$\mathbf{A} = \mu \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' \quad (2.197)$$

一方、磁流分布 $\mathbf{M}$ に対する式は、双対性

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{F}, \quad \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{M}$$

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}^f, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}^f$$

$$\epsilon \rightarrow \mu, \quad \mu \rightarrow \epsilon$$

より、次のようになる.

$$\mathbf{H}^f = -j\omega \left(\mathbf{F} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} \right) \quad (2.198)$$

$$-\mathbf{E}^f = \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{F} \quad (2.199)$$

ここで、 $\mathbf{F}$ は電氣的ベクトルポテンシャルであり、磁流が面 S に分布している場合を考え、

$$\mathbf{F} = \epsilon \int_S G^f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' \quad (2.200)$$

空間領域の $\mathbf{A}(x, y)$ から、フーリエ変換したスペクトル領域の $\tilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y, z)$ を定義すると、

$$\tilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.201)$$

フーリエ変換対の関係より、

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (2.202)$$

これより,

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z) \\
&= \nabla \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla \cdot \left\{ \widetilde{\mathbf{A}} e^{j(k_x x + k_y y)} \right\} dk_x dk_y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(jk_x \mathbf{u}_x + jk_y \mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \tag{2.203}
\end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{k}_t \equiv k_x \mathbf{u}_x + k_y \mathbf{u}_y$. さらに, $\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}$ は,

$$\begin{aligned}
& \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z) \\
&= \nabla \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla \left[\left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} \right] dk_x dk_y \tag{2.204}
\end{aligned}$$

上式の被積分関数は,

$$\begin{aligned}
& \nabla \left[\left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} \right] \\
&= \nabla \left[\left(jk_x \widetilde{A}_x + jk_y \widetilde{A}_y + \frac{\partial \widetilde{A}_z}{\partial z} \right) e^{j(k_x x + k_y y)} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \left(jk_x \widetilde{A}_x + jk_y \widetilde{A}_y + \frac{\partial \widetilde{A}_z}{\partial z} \right) \mathbf{u}_z e^{j(k_x x + k_y y)} \\
&\quad + \left(jk_x \widetilde{A}_x + jk_y \widetilde{A}_y + \frac{\partial \widetilde{A}_z}{\partial z} \right) (jk_x \mathbf{u}_x + jk_y \mathbf{u}_y) e^{j(k_x x + k_y y)} \\
&= \left[\mathbf{u}_z \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}}{\partial z} + j\mathbf{k}_t \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \widetilde{\mathbf{A}} \right] e^{j(k_x x + k_y y)} \tag{2.205}
\end{aligned}$$

よって, フーリエ変換対の関係より,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}_z \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}}{\partial z} + j\mathbf{k}_t \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \widetilde{\mathbf{A}} \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \tag{2.206}
\end{aligned}$$

また, $\nabla \times \mathbf{A}$ のフーリエ変換は (導出省略),

$$\left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \times \widetilde{\mathbf{A}} = \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla \times \mathbf{A}(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \tag{2.207}$$

これより、電界 $\mathbf{E}$ 、磁界 $\mathbf{H}$ をフーリエ変換した式は、

$$\widetilde{\mathbf{E}} = -j\omega \left[\widetilde{\mathbf{A}} + \frac{1}{k^2} \left\{ \mathbf{u}_z \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}}{\partial z} + j\mathbf{k}_t \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \cdot \widetilde{\mathbf{A}} \right\} \right] \quad (2.208)$$

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \left(j\mathbf{k}_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \times \widetilde{\mathbf{A}} \quad (2.209)$$

2.5.2 面電流分布に対するスペクトル領域の電磁界

いま、 z 一定の面上に面電流源がある場合を考えると、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の z 成分 A_z はゼロゆえ、スペクトル領域の z 成分 $\widetilde{A}_z$ もゼロである。したがって、このときの電界 $\widetilde{\mathbf{E}}$ は、

$$\widetilde{\mathbf{E}} = -j\omega \left[\left\{ \widetilde{\mathbf{A}} + \frac{j\mathbf{k}_t}{k^2} (j\mathbf{k}_t \cdot \widetilde{\mathbf{A}}) \right\} + \frac{1}{k^2} \mathbf{u}_z \left(j\mathbf{k}_t \cdot \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}}{\partial z} \right) \right] \quad (2.210)$$

ここで、

$$\mathbf{u}_v \equiv \frac{\mathbf{k}_t}{|\mathbf{k}_t|} = \frac{\mathbf{k}_t}{k_t} \quad (2.211)$$

$$\mathbf{u}_u \equiv \mathbf{u}_v \times \mathbf{u}_z \quad (2.212)$$

を定義すると、 $\widetilde{\mathbf{A}}$ は、直交する $\mathbf{u}_v$ に沿う軸 u の成分、および $\mathbf{u}_v$ に沿う軸 v の成分で次のように表すことができる。

$$\widetilde{\mathbf{A}} = (\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u}_v) \mathbf{u}_v + (\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u}_u) \mathbf{u}_u \equiv \widetilde{A}_v \mathbf{u}_v + \widetilde{A}_u \mathbf{u}_u \quad (2.213)$$

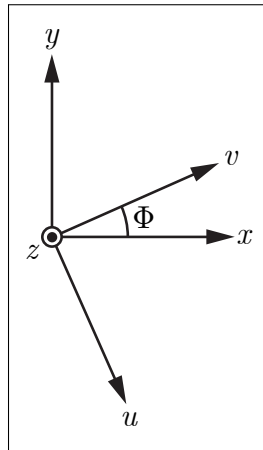


図 2.1. 座標系の定義

これより、スペクトル領域の電界 $\widetilde{\mathbf{E}}$ は、

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}} &= -j\omega \left[\left(1 - \frac{k_t^2}{k^2}\right) \tilde{A}_v \mathbf{u}_v + \tilde{A}_u \mathbf{u}_u + \frac{jk_t}{k^2} \frac{\partial \tilde{A}_v}{\partial z} \mathbf{u}_z \right] \\ &= -j\omega \left(\frac{k_z^2}{k^2} \tilde{A}_v \mathbf{u}_v + \tilde{A}_u \mathbf{u}_u + \frac{jk_t}{k^2} \frac{\partial \tilde{A}_v}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \\ &\equiv \tilde{E}_v \mathbf{u}_v + \tilde{E}_u \mathbf{u}_u + \tilde{E}_z \mathbf{u}_z\end{aligned}\tag{2.214}$$

上式より、 $A_v = 0$ のとき $\tilde{E}_z = 0$ ゆえ、TE 波であり、スペクトル領域の磁界 $\widetilde{\mathbf{H}}$ は、

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu} \left(jk_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \times \left(\tilde{A}_v \mathbf{u}_v + \tilde{A}_u \mathbf{u}_u \right) \\ &= \frac{1}{\mu} \left[jk_t \tilde{A}_u (\mathbf{u}_v \times \mathbf{u}_u) + \frac{\partial \tilde{A}_v}{\partial z} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_v) + \frac{\partial \tilde{A}_u}{\partial z} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_u) \right] \\ &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial \tilde{A}_u}{\partial z} \mathbf{u}_v + \frac{\partial \tilde{A}_v}{\partial z} (-\mathbf{u}_u) + jk_t \tilde{A}_u (-\mathbf{u}_z) \right] \\ &\equiv \widetilde{H}_v \mathbf{u}_v + \widetilde{H}'_u (-\mathbf{u}_u) + \widetilde{H}_z \mathbf{u}_z\end{aligned}\tag{2.215}$$

上式より、 $A_u = 0$ のとき、 $\widetilde{H}_z = 0$ ゆえ、TM 波である。いま、

$$\cos \Phi \equiv \frac{k_x}{k_t}, \quad \sin \Phi \equiv \frac{k_y}{k_t}\tag{2.216}$$

とおくと、

$$\mathbf{u}_v = \frac{\mathbf{k}_t}{k_t} = \frac{k_x}{k_t} \mathbf{u}_x + \frac{k_y}{k_t} \mathbf{u}_y = \cos \Phi \mathbf{u}_x + \sin \Phi \mathbf{u}_y\tag{2.217}$$

$$\mathbf{u}_u = \mathbf{u}_v \times \mathbf{u}_z = \left(\frac{k_x}{k_t} \mathbf{u}_x + \frac{k_y}{k_t} \mathbf{u}_y \right) \times \mathbf{u}_z = -\frac{k_x}{k_t} \mathbf{u}_y + \frac{k_y}{k_t} \mathbf{u}_x = \sin \Phi \mathbf{u}_x - \cos \Phi \mathbf{u}_y\tag{2.218}$$

行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_u \\ \mathbf{u}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_u \cdot \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_u \cdot \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{u}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \Phi & -\cos \Phi \\ \cos \Phi & \sin \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{pmatrix}\tag{2.219}$$

ここで、

$$[\Phi_R] \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{u}_u \cdot \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_u \cdot \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{u}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \Phi & -\cos \Phi \\ \cos \Phi & \sin \Phi \end{pmatrix}\tag{2.220}$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_u \\ \mathbf{u}_v \end{pmatrix} = [\Phi_R] \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{pmatrix}\tag{2.221}$$

$[\Phi_R]$ の転置を $[\Phi_R]^t$ で表すと、逆の関係は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{pmatrix} = [\Phi_R]^t \begin{pmatrix} \mathbf{u}_u \\ \mathbf{u}_v \end{pmatrix}\tag{2.222}$$

2.5.3 磁流分布に対するスペクトル領域の電磁界

電流分布 $\mathbf{J}$ によるスペクトル領域の電磁界 $\widetilde{\mathbf{E}}$, $\widetilde{\mathbf{H}}$

$$\widetilde{\mathbf{E}} = -j\omega \left(\frac{k_z^2}{k^2} \widetilde{A}_v \mathbf{u}_v + \widetilde{A}_u \mathbf{u}_u + \frac{jk_t}{k^2} \frac{\partial \widetilde{A}_v}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \quad (2.223)$$

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial \widetilde{A}_u}{\partial z} \mathbf{u}_v + \frac{\partial \widetilde{A}_v}{\partial z} (-\mathbf{u}_u) + jk_t \widetilde{A}_u (-\mathbf{u}_z) \right] \quad (2.224)$$

に対して双対性を適用すると、磁流分布 $\mathbf{M}$ によるスペクトル領域の電磁界 $\widetilde{\mathbf{H}}^f$, $\widetilde{\mathbf{E}}^f$ が得られ、次のようになる。

$$\widetilde{\mathbf{H}}^f = -j\omega \left(\frac{k_z^2}{k^2} \widetilde{F}_v \mathbf{u}_v + \widetilde{F}_u \mathbf{u}_u + \frac{jk_t}{k^2} \frac{\partial \widetilde{F}_v}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) \equiv \widetilde{H}_v^f \mathbf{u}_v + \widetilde{H}_u^f \mathbf{u}_u + \widetilde{H}_z^f \mathbf{u}_z \quad (2.225)$$

$$-\widetilde{\mathbf{E}}^f = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\partial \widetilde{F}_u}{\partial z} \mathbf{u}_v + \frac{\partial \widetilde{F}_v}{\partial z} (-\mathbf{u}_u) + jk_t \widetilde{F}_u \mathbf{u}_z \right] \equiv \widetilde{E}_v^f \mathbf{u}_v + \widetilde{E}_u^f (-\mathbf{u}_u) + \widetilde{E}_z^f \mathbf{u}_z \quad (2.226)$$

ただし、スペクトル領域の電氣的ベクトルポテンシャル $\widetilde{\mathbf{F}}$ も、 z 軸に直交する成分のみで、

$$\widetilde{\mathbf{F}} = (\widetilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{u}_v) \mathbf{u}_v + (\widetilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{u}_u) \mathbf{u}_u = \widetilde{F}_v \mathbf{u}_v + \widetilde{F}_u \mathbf{u}_u \quad (2.227)$$

これより、

- $\widetilde{F}_v = 0$ のとき、 $\widetilde{H}_z^f = 0$ ゆえ、 $\widetilde{\mathbf{F}} \equiv \widetilde{F}_u \mathbf{u}_u$ とおけば TM 波が得られる。
- $\widetilde{F}_u = 0$ のとき、 $\widetilde{E}_z^f = 0$ ゆえ、 $\widetilde{\mathbf{F}} \equiv \widetilde{F}_v \mathbf{u}_v$ とおけば TE 波が得られる。

2.5.4 スペクトル領域の磁氣的・電氣的ベクトルポテンシャル

ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ について、

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{A} = 0 \quad (2.228)$$

とすると、 $\mathbf{A} = A \mathbf{u}$ で与えられれば ($\mathbf{u}$ は単位ベクトル), $(\nabla^2 + k^2) A = 0$ となる。このとき、 $\nabla^2 A$ は、

$$\begin{aligned} \nabla^2 A(x, y, z) &= \nabla^2 \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{A}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \{ \widetilde{A} e^{j(k_x x + k_y y)} \} dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left((jk_x)^2 + (jk_y)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \widetilde{A}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(-k_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \widetilde{A} e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \end{aligned} \quad (2.229)$$

フーリエ変換対の関係より,

$$\left(-k_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tilde{A}(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 A(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.230)$$

したがって, 空間領域からスペクトル領域への変換は,

$$(\nabla^2 + k^2)A = 0 \rightarrow \left(-k_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \tilde{A} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2\right) \tilde{A} = 0 \quad (2.231)$$

これより,

$$\tilde{A} = \tilde{A}^+ e^{-jk_z z} + \tilde{A}^- e^{jk_z z} \quad (2.232)$$

同様に, 電氣的ベクトルポテンシャル $\mathbf{F}$ についても,

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{F} = 0 \quad (2.233)$$

とするとき, $\mathbf{F} = F\mathbf{u}$ で与えられれば, 空間領域からスペクトル領域への変換は,

$$(\nabla^2 + k^2)F = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2\right) \tilde{F} = 0 \quad (2.234)$$

よって,

$$\tilde{F} = \tilde{F}^+ e^{-jk_z z} + \tilde{F}^- e^{jk_z z} \quad (2.235)$$

2.6 スペクトル領域の基本行列

2.6.1 スペクトル領域の磁氣的ベクトルポテンシャルによる TE 波成分

$\tilde{A}_v = 0$ のとき, 電界の z 成分がゼロゆえ, TE 波が得られる. このとき, $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{A}_u \mathbf{u}_u$ とおくと,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2\right) \tilde{A}_u = 0 \quad (2.236)$$

よって,

$$\tilde{A}_u = \tilde{A}_u^+ e^{-jk_z z} + \tilde{A}_u^- e^{jk_z z} \quad (2.237)$$

電磁界の xy 面内の成分は, $\tilde{E}_u$, $\tilde{H}_v$ のみとなり,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_u(z) &= -j\omega \tilde{A}_u = -j\omega (\tilde{A}_u^+ e^{-jk_z z} + \tilde{A}_u^- e^{jk_z z}) \\ &\equiv \tilde{E}_u^+ e^{-jk_z z} + \tilde{E}_u^- e^{jk_z z} \end{aligned} \quad (2.238)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_v(z) &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_u}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{A}_u^+ e^{-jk_z z} + \tilde{A}_u^- e^{jk_z z}) = -\frac{jk_z}{\mu} (\tilde{A}_u^+ e^{-jk_z z} - \tilde{A}_u^- e^{jk_z z}) \\ &= \frac{k_z}{\omega\mu} (\tilde{E}_u^+ e^{-jk_z z} - \tilde{E}_u^- e^{jk_z z}) = Y_{\text{TE}} (\tilde{E}_u^+ e^{-jk_z z} - \tilde{E}_u^- e^{jk_z z}) \end{aligned} \quad (2.239)$$

ここで, $\gamma \equiv jk_z$ とおくと

$$Y_{\text{TE}} \equiv \frac{k_z}{\omega\mu} = \frac{\gamma}{j\omega\mu} = \frac{1}{Z_{\text{TE}}} \quad (2.240)$$

2.6.2 スペクトル領域の磁氣的ベクトルポテンシャルによる TM 波成分

$\tilde{A}_u = 0$ のとき, 磁界の z 成分がゼロゆえ, TM 波が得られる. このとき, $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{A}_v \mathbf{u}_v$ とおくと,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right) \tilde{A}_v = 0 \quad (2.241)$$

よって,

$$\tilde{A}_v = \tilde{A}_v^+ e^{-jk_z z} + \tilde{A}_v^- e^{jk_z z} \quad (2.242)$$

電磁界の xy 面内の成分は, $\tilde{E}_v$, $\tilde{H}'_u$ のみとなり,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_v(z) &= -j\omega \frac{k_z^2}{k^2} \tilde{A}_v = -j\omega \frac{k_z^2}{k^2} (\tilde{A}_v^+ e^{-jk_z z} + \tilde{A}_v^- e^{jk_z z}) \\ &\equiv \tilde{E}_v^+ e^{-jk_z z} + \tilde{E}_v^- e^{jk_z z} \end{aligned} \quad (2.243)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}'_u(z) &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{A}_v}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{A}_v^+ e^{-jk_z z} + \tilde{A}_v^- e^{jk_z z}) = -\frac{jk_z}{\mu} (\tilde{A}_v^+ e^{-jk_z z} - \tilde{A}_v^- e^{jk_z z}) \\ &= \frac{k^2}{\omega\mu k_z} (\tilde{E}_v^+ e^{-jk_z z} - \tilde{E}_v^- e^{jk_z z}) = Y_{\text{TM}} (\tilde{E}_v^+ e^{-jk_z z} - \tilde{E}_v^- e^{jk_z z}) \end{aligned} \quad (2.244)$$

ただし,

$$Y_{\text{TM}} \equiv \frac{k^2}{\omega\mu k_z} = \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{\omega\mu k_z} = \frac{\omega \epsilon}{k_z} = \frac{j\omega \epsilon}{\gamma} = \frac{1}{Z_{\text{TM}}} \quad (2.245)$$

2.6.3 スペクトル領域の電氣的ベクトルポテンシャルによる TM 波成分

$\tilde{F}_v = 0$ のとき, 磁界の z 成分がゼロゆえ TM 波が得られる. このとき, $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{F}_u \mathbf{u}_u$ とおくと,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right) \tilde{F}_u = 0 \quad (2.246)$$

よって,

$$\tilde{F}_u = \tilde{F}_u^+ e^{-jk_z z} + \tilde{F}_u^- e^{jk_z z} \quad (2.247)$$

電磁界の xy 面内の成分は, $\widetilde{H}_u^f$, $\widetilde{E}_v^{f'}$ のみとなり,

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_u^f(z) &= -j\omega\widetilde{F}_u = -j\omega(\widetilde{F}_u^+ e^{-jk_z z} + \widetilde{F}_u^- e^{jk_z z}) \\ &\equiv \widetilde{H}_u^{f+} e^{-jk_z z} + \widetilde{H}_u^{f-} e^{jk_z z}\end{aligned}\quad (2.248)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_v^{f'}(z) &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \widetilde{F}_u}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\widetilde{F}_u^+ e^{-jk_z z} + \widetilde{F}_u^- e^{jk_z z}) = -\frac{jk_z}{\epsilon} (\widetilde{F}_u^+ e^{-jk_z z} - \widetilde{F}_u^- e^{jk_z z}) \\ &= \frac{k_z}{\omega\epsilon} (\widetilde{H}_u^{f+} e^{-jk_z z} - \widetilde{H}_u^{f-} e^{jk_z z}) = Z_{\text{TM}} (\widetilde{H}_u^{f+} e^{-jk_z z} - \widetilde{H}_u^{f-} e^{jk_z z})\end{aligned}\quad (2.249)$$

ここで, $\gamma \equiv jk_z$ とおくと

$$Z_{\text{TM}} \equiv \frac{k_z}{\omega\epsilon} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \frac{1}{Y_{\text{TM}}}\quad (2.250)$$

電界の係数を基準にして表すと,

$$\widetilde{E}_v^{f'}(z) \equiv \widetilde{E}_v^{f+} e^{-jk_z z} + \widetilde{E}_v^{f-} e^{jk_z z}\quad (2.251)$$

$$\widetilde{H}_u^f(z) = Y_{\text{TM}} (\widetilde{E}_v^{f+} e^{-jk_z z} - \widetilde{E}_v^{f-} e^{jk_z z})\quad (2.252)$$

2.6.4 スペクトル領域の電氣的ベクトルポテンシャルによる TE 波成分

$\widetilde{F}_u = 0$ のとき, 電界の z 成分がゼロゆえ TE 波が得られる. このとき, $\widetilde{\mathbf{F}} = \widetilde{F}_v \mathbf{u}_v$ とおくと,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right) \widetilde{F}_v = 0\quad (2.253)$$

よって,

$$\widetilde{F}_v = \widetilde{F}_v^+ e^{-jk_z z} + \widetilde{F}_v^- e^{jk_z z}\quad (2.254)$$

電磁界の xy 面内の成分は, $\widetilde{H}_v^f$, $\widetilde{E}_u^{f''}$ のみとなり,

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_v^f(z) &= -j\omega \frac{k_z^2}{k^2} \widetilde{F}_v = -j\omega \frac{k_z^2}{k^2} (\widetilde{F}_v^+ e^{-jk_z z} + \widetilde{F}_v^- e^{jk_z z}) \\ &\equiv \widetilde{H}_v^{f+} e^{-jk_z z} + \widetilde{H}_v^{f-} e^{jk_z z}\end{aligned}\quad (2.255)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_u^{f''}(z) &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \widetilde{F}_v}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\widetilde{F}_v^+ e^{-jk_z z} + \widetilde{F}_v^- e^{jk_z z}) = -\frac{jk_z}{\epsilon} (\widetilde{F}_v^+ e^{-jk_z z} - \widetilde{F}_v^- e^{jk_z z}) \\ &= \frac{k_z^2}{\omega\epsilon k_z} (\widetilde{H}_v^{f+} e^{-jk_z z} - \widetilde{H}_v^{f-} e^{jk_z z}) = Z_{\text{TE}} (\widetilde{H}_v^{f+} e^{-jk_z z} - \widetilde{H}_v^{f-} e^{jk_z z})\end{aligned}\quad (2.256)$$

ただし,

$$Z_{\text{TE}} \equiv \frac{k_z^2}{\omega\epsilon k_z} = \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{\omega\epsilon k_z} = \frac{\omega\mu}{k_z} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{1}{Y_{\text{TE}}}\quad (2.257)$$

電界の係数を基準にして表すと,

$$\tilde{E}_u^{f''}(z) \equiv \tilde{E}_u^{f+} e^{-jk_z z} + \tilde{E}_u^{f-} e^{jk_z z} \quad (2.258)$$

$$\tilde{H}_v^f(z) = Y_{\text{TE}} \left(\tilde{E}_u^{f+} e^{-jk_z z} - \tilde{E}_u^{f-} e^{jk_z z} \right) \quad (2.259)$$

2.6.5 基本行列

境界面に接する電磁界は, $\tilde{\mathbf{A}}$ より,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}} = \tilde{E}_v(z) \mathbf{u}_v + \tilde{E}_u(z) \mathbf{u}_u \quad (2.260)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\text{tan}} = \tilde{H}_v(z) \mathbf{u}_v + \tilde{H}_u'(z) (-\mathbf{u}_u) \quad (2.261)$$

また, $\tilde{\mathbf{F}}$ より,

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\text{tan}}^f = \tilde{H}_v^f(z) \mathbf{u}_v + \tilde{H}_u^f(z) \mathbf{u}_u \quad (2.262)$$

$$-\tilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}}^f = \tilde{E}_v^{f'}(z) \mathbf{u}_v + \tilde{E}_u^{f''}(z) (-\mathbf{u}_u) \quad (2.263)$$

で表され, 各成分は先に示したように,

- $\tilde{\mathbf{A}}$ から得られる TE 波成分 $\tilde{E}_u(z)$, $\tilde{H}_v(z)$, $Y_{\text{TE}} = 1/Z_{\text{TE}}$, $\tilde{E}_u^+$, $\tilde{E}_u^-$
- $\tilde{\mathbf{A}}$ から得られる TM 波成分 $\tilde{E}_v(z)$, $\tilde{H}_u'(z)$, $Y_{\text{TM}} = 1/Z_{\text{TM}}$, $\tilde{E}_v^+$, $\tilde{E}_v^-$
- $\tilde{\mathbf{F}}$ から得られる TM 波成分 $\tilde{E}_v^{f'}(z)$, $\tilde{H}_u^f(z)$, $Y_{\text{TM}} = 1/Z_{\text{TM}}$, $\tilde{E}_v^{f+}$, $\tilde{E}_v^{f-}$
- $\tilde{\mathbf{F}}$ から得られる TE 波成分 $\tilde{E}_u^{f''}(z)$, $\tilde{H}_v^f(z)$, $Y_{\text{TE}} = 1/Z_{\text{TE}}$, $\tilde{E}_u^{f+}$, $\tilde{E}_u^{f-}$

これらを,

$$\tilde{E}(z), \quad \tilde{H}(z), \quad Y = 1/Z, \quad \tilde{E}^+, \quad \tilde{E}^-$$

でまとめて表すと, 次のようになる.

$$\tilde{E}(z) = \tilde{E}^+ e^{-jk_z z} + \tilde{E}^- e^{jk_z z} \quad (2.264)$$

$$\tilde{H}(z) = Y \left(\tilde{E}^+ e^{-jk_z z} - \tilde{E}^- e^{jk_z z} \right) \quad (2.265)$$

いま, $z = 0$ のとき,

$$\tilde{E}(0) = \tilde{E}^+ + \tilde{E}^- \quad (2.266)$$

$$\tilde{H}(0) = Y \left(\tilde{E}^+ - \tilde{E}^- \right) \quad (2.267)$$

また, $z = d$ のとき,

$$\tilde{E}(d) = \tilde{E}^+ e^{-jk_z d} + \tilde{E}^- e^{jk_z d} \quad (2.268)$$

$$\tilde{H}(d) = Y \left(\tilde{E}^+ e^{-jk_z d} - \tilde{E}^- e^{jk_z d} \right) \quad (2.269)$$

これより、 $\tilde{E}^+$ 、 $\tilde{E}^-$ を消去すれば、スペクトル領域の電磁界成分に対する基本行列 $[\mathbf{F}]$ を定義することができ、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}(0) \\ \tilde{H}(0) \end{pmatrix} = [\mathbf{F}] \begin{pmatrix} \tilde{E}(d) \\ \tilde{H}(d) \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} \cos k_z d & jZ \sin k_z d \\ jY \sin k_z d & \cos k_z d \end{pmatrix} \quad (2.270)$$

あるいは、

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}(-d) \\ \tilde{H}(-d) \end{pmatrix} = [\mathbf{F}] \begin{pmatrix} \tilde{E}(0) \\ \tilde{H}(0) \end{pmatrix} \quad (2.271)$$

逆行列を考えると、

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}(d) \\ \tilde{H}(d) \end{pmatrix} = [\mathbf{F}]^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{E}(0) \\ \tilde{H}(0) \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{F}]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos k_z d & -jZ \sin k_z d \\ -jY \sin k_z d & \cos k_z d \end{pmatrix} \quad (2.272)$$

あるいは、

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}(0) \\ \tilde{H}(0) \end{pmatrix} = [\mathbf{F}]^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{E}(-d) \\ \tilde{H}(-d) \end{pmatrix} \quad (2.273)$$

これより、 N 層の誘電体に対する基本行列は、次のようにして求められる。

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}(0) \\ \tilde{H}(0) \end{pmatrix} = [\mathbf{F}_1][\mathbf{F}_2] \cdots [\mathbf{F}_N] \begin{pmatrix} \tilde{E}(d) \\ \tilde{H}(d) \end{pmatrix} \quad (2.274)$$

ここで、

$$[\mathbf{F}_i] = \begin{pmatrix} \cos k_{z,i} d_i & jZ_i \sin k_{z,i} d_i \\ jY_i \sin k_{z,i} d_i & \cos k_{z,i} d_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.275)$$

ただし、添字 i は、 i 番目の誘電体に対するパラメータを示す。

2.7 スペクトル領域の境界条件

2.7.1 面電流源がある場合のスペクトル領域の連続条件

媒質 $i+1$ 、 i の境界面 S (xy 面) に面電流源 $\mathbf{J}$ がある場合、

$$\mathbf{u}_z \times (\mathbf{H}_{i+1} - \mathbf{H}_i) = \mathbf{J} \quad \text{on } S \quad (2.276)$$

これをフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \times (\mathbf{H}_{i+1}(x, y) - \mathbf{H}_i(x, y)) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J} e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (\text{on } S) \end{aligned} \quad (2.277)$$

これより、面電流源がある場合のスペクトル領域の磁界の連続条件は、

$$\mathbf{u}_z \times (\widetilde{\mathbf{H}}_{i+1} - \widetilde{\mathbf{H}}_i) = \widetilde{\mathbf{J}} \quad (\text{on } S) \quad (2.278)$$

ここで、

$$\widetilde{\mathbf{H}}_j = \widetilde{H}_{v,j} \mathbf{u}_v + \widetilde{H}'_{u,j} (-\mathbf{u}_u) \quad (j = i, i+1) \quad (2.279)$$

とおくと、 $\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_u \times \mathbf{u}_v$ より、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_z \times & \left[\widetilde{H}_{v,i+1} \mathbf{u}_v + \widetilde{H}'_{u,i+1} (-\mathbf{u}_u) - \widetilde{H}_{v,i} \mathbf{u}_v - \widetilde{H}'_{u,i} (-\mathbf{u}_u) \right] \\ &= -\widetilde{H}_{v,i+1} \mathbf{u}_u - \widetilde{H}'_{u,i+1} \mathbf{u}_v + \widetilde{H}_{v,i} \mathbf{u}_u + \widetilde{H}'_{u,i} \mathbf{u}_v \\ &= \widetilde{J}_v \mathbf{u}_v + \widetilde{J}_u \mathbf{u}_u \quad (\text{on } S) \end{aligned} \quad (2.280)$$

よって、

$$\widetilde{H}_{v,i+1} - \widetilde{H}_{v,i} = -\widetilde{J}_u \quad (\text{on } S) \quad (2.281)$$

$$\widetilde{H}'_{u,i+1} - \widetilde{H}'_{u,i} = -\widetilde{J}_v \quad (\text{on } S) \quad (2.282)$$

2.7.2 面磁流源がある場合のスペクトル領域の連続条件

導体面 S 上に面磁流源がある場合の境界条件は、

$$\mathbf{u}_z \times (-\widetilde{\mathbf{E}}^f) = \widetilde{\mathbf{M}} \quad (\text{on } S) \quad (2.283)$$

より、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_z \times & \left[\widetilde{E}_v^{f'} \mathbf{u}_v + \widetilde{E}_u^{f''} (-\mathbf{u}_u) \right] = -\widetilde{E}_v^{f'} \mathbf{u}_u - \widetilde{E}_u^{f''} \mathbf{u}_v \\ &= \widetilde{M}_v \mathbf{u}_v + \widetilde{M}_u \mathbf{u}_u \end{aligned} \quad (2.284)$$

よって、

$$\widetilde{E}_v^{f'} = -\widetilde{M}_u \quad (\text{on } S) \quad (2.285)$$

$$\widetilde{E}_u^{f''} = -\widetilde{M}_v \quad (\text{on } S) \quad (2.286)$$

2.8 多層誘電体基板中に面電流源がある場合

図のように誘電体（厚み d_1 の多層誘電体基板）と誘電体（厚み d_2 の多層誘電体基板）の境界面（ $z = 0$ ）に面電流源がある場合を考える。そして、領域 (2) の基本行列が次のように与えられているものとする。

$$\begin{pmatrix} \widetilde{E}_2(0) \\ \widetilde{H}_2(0) \end{pmatrix} = [\mathbf{F}^{(+)}] \begin{pmatrix} \widetilde{E}_2(d_2) \\ \widetilde{H}_2(d_2) \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{F}^{(+)}] = \begin{pmatrix} F_{11}^{(+)} & F_{12}^{(+)} \\ F_{21}^{(+)} & F_{22}^{(+)} \end{pmatrix} \quad (2.287)$$

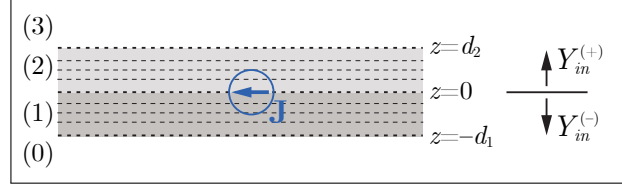


図 2.2. 多層誘電体基板中に面電流源がある場合

逆は,

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_2(d_2) \\ \tilde{H}_2(d_2) \end{pmatrix} = [\mathbf{F}^{(+)}]^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{E}_2(0) \\ \tilde{H}_2(0) \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{F}^{(+)}]^{-1} = \begin{pmatrix} F_{11}^{(+)\prime} & F_{12}^{(+)\prime} \\ F_{21}^{(+)\prime} & F_{22}^{(+)\prime} \end{pmatrix} \quad (2.288)$$

このとき, $z = d_2$ の接線電磁界の連続条件より,

$$\tilde{E}_2(d_2) = \tilde{E}_3(d_2) \quad (2.289)$$

$$\tilde{H}_2(d_2) = \tilde{H}_3(d_2) \quad (2.290)$$

また, 領域 (3) ($z \geq d_2$) では, 後進波が存在しないことから,

$$\tilde{H}_3(d_2) = Y_3 \tilde{E}_3(d_2) \quad (2.291)$$

これより, $z = 0$ において $z \geq 0$ の誘電体を見た入力アドミタンス $Y_{in}^{(+)}$ は,

$$\begin{aligned} Y_{in}^{(+)} &= \frac{\tilde{H}_2(0)}{\tilde{E}_2(0)} = \frac{F_{21}^{(+)} \tilde{E}_2(d_2) + F_{22}^{(+)} \tilde{H}_2(d_2)}{F_{11}^{(+)} \tilde{E}_2(d_2) + F_{12}^{(+)} \tilde{H}_2(d_2)} = \frac{F_{21}^{(+)} \tilde{E}_3(d_2) + F_{22}^{(+)} \tilde{H}_3(d_2)}{F_{11}^{(+)} \tilde{E}_3(d_2) + F_{12}^{(+)} \tilde{H}_3(d_2)} \\ &= \frac{F_{21}^{(+)} \tilde{E}_3(d_2) + F_{22}^{(+)} Y_3 \tilde{E}_3(d_2)}{F_{11}^{(+)} \tilde{E}_3(d_2) + F_{12}^{(+)} Y_3 \tilde{E}_3(d_2)} = \frac{F_{21}^{(+)} + F_{22}^{(+)} Y_3}{F_{11}^{(+)} + F_{12}^{(+)} Y_3} \end{aligned} \quad (2.292)$$

同様に, 領域 (1) の基本行列が次のように与えられているものとする,

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_1(-d_1) \\ \tilde{H}_1(-d_1) \end{pmatrix} = [\mathbf{F}^{(-)}] \begin{pmatrix} \tilde{E}_1(0) \\ \tilde{H}_1(0) \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{F}^{(-)}] = \begin{pmatrix} F_{11}^{(-)} & F_{12}^{(-)} \\ F_{21}^{(-)} & F_{22}^{(-)} \end{pmatrix} \quad (2.293)$$

逆は,

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_1(0) \\ \tilde{H}_1(0) \end{pmatrix} = [\mathbf{F}^{(-)}]^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{E}_1(-d_1) \\ \tilde{H}_1(-d_1) \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{F}^{(-)}]^{-1} = \begin{pmatrix} F_{11}^{(-)\prime} & F_{12}^{(-)\prime} \\ F_{21}^{(-)\prime} & F_{22}^{(-)\prime} \end{pmatrix} \quad (2.294)$$

このとき, $z = -d_1$ の接線電磁界の連続条件より,

$$\tilde{E}_1(-d_1) = \tilde{E}_0(-d_1) \quad (2.295)$$

$$\tilde{H}_1(-d_1) = \tilde{H}_0(-d_1) \quad (2.296)$$

また、領域 (0) ($z \leq -d_1$) では、前進波が存在しないことから、

$$\widetilde{H}_0(-d_1) = -Y_0 \widetilde{E}_0(-d_1) \quad (2.297)$$

これより、 $z = 0$ において $z \leq 0$ の誘電体を見た入力アドミタンス $Y_{in}^{(-)}$ は、

$$\begin{aligned} Y_{in}^{(-)} &= \frac{-\widetilde{H}_1(0)}{\widetilde{E}_1(0)} = -\frac{F_{21}^{(-)'} \widetilde{E}_0(-d_1) + F_{22}^{(-)'} \widetilde{H}_0(-d_1)}{F_{11}^{(-)'} \widetilde{E}_0(-d_1) + F_{12}^{(-)'} \widetilde{H}_0(-d_1)} \\ &= -\frac{F_{21}^{(-)'} \widetilde{E}_1(-d_1) + F_{22}^{(-)'} \widetilde{H}_1(-d_1)}{F_{11}^{(-)'} \widetilde{E}_1(-d_1) + F_{12}^{(-)'} \widetilde{H}_1(-d_1)} = -\frac{F_{21}^{(-)'} \widetilde{E}_1(-d_1) - F_{22}^{(-)'} Y_0 \widetilde{E}_1(-d_1)}{F_{11}^{(-)'} \widetilde{E}_1(-d_1) - F_{12}^{(-)'} Y_0 \widetilde{E}_1(-d_1)} \\ &= -\frac{F_{21}^{(-)'} - F_{22}^{(-)'} Y_0}{F_{11}^{(-)'} - F_{12}^{(-)'} Y_0} \end{aligned} \quad (2.298)$$

そして、 $z = 0$ におけるスペクトル領域の電流を $\widetilde{J}$ とすると、 $z = 0$ の電磁界の連続条件より、

$$\widetilde{E}_2(0) - \widetilde{E}_1(0) = 0 \quad (2.299)$$

$$\widetilde{H}_2(0) - \widetilde{H}_1(0) = -\widetilde{J} \quad (2.300)$$

これより、

$$Y_{in}^{(+)} \widetilde{E}_2(0) + Y_{in}^{(-)} \widetilde{E}_2(0) = -\widetilde{J} \quad (2.301)$$

よって、

$$\widetilde{E}_2(0) = \widetilde{E}_1(0) = \frac{-\widetilde{J}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \equiv \widetilde{Z}^{(0)} \widetilde{J} \quad (2.302)$$

ただし、

$$\widetilde{Z}^{(0)} = -\frac{1}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \quad (2.303)$$

$$Y_{in}^{(+)} = \frac{F_{21}^{(+)} + F_{22}^{(+)} Y_3}{F_{11}^{(+)} + F_{12}^{(+)} Y_3} \quad (2.304)$$

$$Y_{in}^{(-)} = -\frac{F_{21}^{(-)'} - F_{22}^{(-)'} Y_0}{F_{11}^{(-)'} - F_{12}^{(-)'} Y_0} \quad (2.305)$$

また、

$$\widetilde{H}_2(0) = Y_{in}^{(+)} \widetilde{E}_2(0) = -\frac{Y_{in}^{(+)} \widetilde{J}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \quad (2.306)$$

$$\widetilde{H}_1(0) = \widetilde{H}_2(0) + \widetilde{J} = -\frac{Y_{in}^{(+)} \widetilde{J}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} + \widetilde{J} = -\frac{Y_{in}^{(-)} \widetilde{J}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \quad (2.307)$$

$z = d_2$ の誘電体と空気の境界面では,

$$\begin{aligned}\tilde{E}_2(d_2) &= F_{11}^{(+)\prime} \tilde{E}_2(0) + F_{12}^{(+)\prime} \tilde{H}_2(0) = F_{11}^{(+)\prime} \tilde{E}_2(0) + F_{12}^{(+)\prime} Y_{in}^{(+)} \tilde{E}_2(0) \\ &= \left(F_{11}^{(+)\prime} + F_{12}^{(+)\prime} Y_{in}^{(+)} \right) \tilde{Z}^{(0)} \tilde{J} \equiv Y_{trans} \tilde{Z}^{(0)} \tilde{J} \equiv \tilde{Z}^{(d_2)} \tilde{J}\end{aligned}\quad (2.308)$$

$$\tilde{H}_2(d_2) = Y_3 \tilde{E}_2(d_2) = Y_3 \tilde{Z}^{(d_2)} \tilde{J} \equiv \tilde{P}^{(d_2)} \tilde{J} \quad (2.309)$$

ここで,

$$Y_{trans} \equiv F_{11}^{(+)\prime} + F_{12}^{(+)\prime} Y_{in}^{(+)} \quad (2.310)$$

したがって,

$$\tilde{Z}^{(d_2)} = Y_{trans} \tilde{Z}^{(0)} = -\frac{Y_{trans}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \quad (2.311)$$

$$\tilde{P}^{(d_2)} = Y_3 \tilde{Z}^{(d_2)} \quad (2.312)$$

2.9 地導体板付き多層誘電体基板中に面電流源がある場合

厚み d_1 の多層誘電体基板の片面に地導体板を付け ($z = -d_1$), この基板と厚み d_2 の多層誘電体基板との境界面 ($z = 0$) に電流源がある場合を考える. ここでも同様に, 領域 (1), (2) の基本行列が各々与えられているものとする. $z = 0$ において $z \geq 0$ の誘電体を見た入力アドミタンス $Y_{in}^{(+)}$ は,

$$Y_{in}^{(+)} = \frac{F_{21}^{(+)} + F_{22}^{(+)} Y_3}{F_{11}^{(+)} + F_{12}^{(+)} Y_3} \quad (2.313)$$

一方, 地導体板が完全導体のとき, $z = -d_1$ の電界の接線成分はゼロゆえ,

$$\tilde{E}_1(-d_1) = 0 \quad (2.314)$$

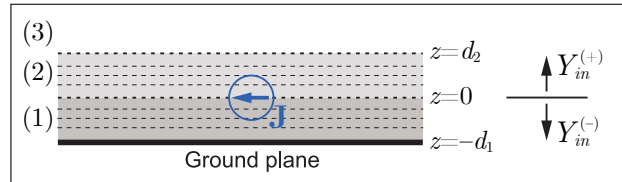


図 2.3. 地導体板付き多層誘電体基板中に面電流源がある場合

これより、 $z = 0$ において $z \leq 0$ の誘電体を見た入力アドミタンス $Y_{in}^{(-)}$ は、

$$\begin{aligned} Y_{in}^{(-)} &= \frac{-\widetilde{H}_1(0)}{\widetilde{E}_1(0)} = -\frac{F_{21}^{(-)'}\widetilde{E}_1(-d_1) + F_{22}^{(-)'}\widetilde{H}_1(-d_1)}{F_{11}^{(-)'}\widetilde{E}_1(-d_1) + F_{12}^{(-)'}\widetilde{H}_1(-d_1)} = -\frac{F_{22}^{(-)'}\widetilde{H}_1(-d_1)}{F_{12}^{(-)'}\widetilde{H}_1(-d_1)} \\ &= -\frac{F_{22}^{(-)'}}{F_{12}^{(-)'}} \end{aligned} \quad (2.315)$$

$z = 0$ でのスペクトル領域の電流を $\widetilde{J}$ とすると、 $z = 0$ の電磁界の連続条件より、

$$\widetilde{E}_2(0) - \widetilde{E}_1(0) = 0 \quad (2.316)$$

$$\widetilde{H}_2(0) - \widetilde{H}_1(0) = -\widetilde{J} \quad (2.317)$$

これより、

$$Y_{in}^{(+)}\widetilde{E}_2(0) + Y_{in}^{(-)}\widetilde{E}_2(0) = -\widetilde{J} \quad (2.318)$$

よって、

$$\widetilde{E}_2(0) = \widetilde{E}_1(0) = \frac{-\widetilde{J}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \equiv \widetilde{Z}^{(0)}\widetilde{J} \quad (2.319)$$

ただし、

$$\widetilde{Z}^{(0)} = -\frac{1}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \quad (2.320)$$

$$Y_{in}^{(+)} = \frac{F_{21}^{(+)} + F_{22}^{(+)}Y_3}{F_{11}^{(+)} + F_{12}^{(+)}Y_3} \quad (2.321)$$

$$Y_{in}^{(-)} = -\frac{F_{22}^{(-)'}}{F_{12}^{(-)'}} \quad (2.322)$$

また、

$$\widetilde{H}_2(0) = Y_{in}^{(+)}\widetilde{E}_2(0) = -\frac{Y_{in}^{(+)}\widetilde{J}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \quad (2.323)$$

$$\widetilde{H}_1(0) = \widetilde{H}_2(0) + \widetilde{J} = -\frac{Y_{in}^{(+)}\widetilde{J}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} + \widetilde{J} = -\frac{Y_{in}^{(-)}\widetilde{J}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \quad (2.324)$$

$z = d_2$ の誘電体と空気の境界面では、

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_2(d_2) &= F_{11}^{(+)'}\widetilde{E}_2(0) + F_{12}^{(+)}\widetilde{H}_2(0) = F_{11}^{(+)'}\widetilde{E}_2(0) + F_{12}^{(+)' }Y_{in}^{(+)}\widetilde{E}_2(0) \\ &= \left(F_{11}^{(+)' } + F_{12}^{(+)' }Y_{in}^{(+)}\right)\widetilde{Z}^{(0)}\widetilde{J} \equiv Y_{trans}\widetilde{Z}^{(0)}\widetilde{J} \equiv \widetilde{Z}^{(d_2)}\widetilde{J} \end{aligned} \quad (2.325)$$

ここで,

$$Y_{trans} \equiv F_{11}^{(+)\prime} + F_{12}^{(+)\prime} Y_{in}^{(+)} \quad (2.326)$$

これより,

$$\widetilde{H}_2(d_2) = Y_3 \widetilde{E}_2(d_2) = Y_3 \widetilde{Z}^{(d_2)} \widetilde{J} \equiv \widetilde{P}^{(d_2)} \widetilde{J} \quad (2.327)$$

したがって,

$$\widetilde{Z}^{(d_2)} = Y_{trans} \widetilde{Z}^{(0)} = -\frac{Y_{trans}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \quad (2.328)$$

$$\widetilde{P}^{(d_2)} = Y_3 \widetilde{Z}^{(d_2)} \quad (2.329)$$

一方, $z = -d_1$ の地導体面上では,

$$\widetilde{E}_1(-d_1) = 0 \quad (2.330)$$

また,

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1(-d_1) &= F_{21}^{(-)} \widetilde{E}_1(0) + F_{22}^{(-)} \widetilde{H}_1(0) = F_{21}^{(-)} \widetilde{E}_1(0) + F_{22}^{(-)} (-Y_{in}^{(-)} \widetilde{E}_1(0)) \\ &= (F_{21}^{(-)} - F_{22}^{(-)} Y_{in}^{(-)}) \widetilde{E}_1(0) = -\frac{F_{21}^{(-)} - F_{22}^{(-)} Y_{in}^{(-)}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \widetilde{J} \equiv \widetilde{P}^{(-d_1)} \widetilde{J} \end{aligned} \quad (2.331)$$

ここで,

$$\widetilde{P}^{(-d_1)} = \frac{-F_{21}^{(-)} + F_{22}^{(-)} Y_{in}^{(-)}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \quad (2.332)$$

2.10 多層誘電体基板の地導体面に磁流源がある場合

$z = 0$ の境界条件より,

$$\widetilde{E}_1(0) = -\widetilde{M} \quad (2.333)$$

このとき,

$$\widetilde{H}_1(0) = Y_{in}^{(+)} \widetilde{E}_1(0) = -Y_{in}^{(+)} \widetilde{M} \equiv \widetilde{Y}^{(0)} \widetilde{M} \quad (2.334)$$

ここで,

$$\widetilde{Y}^{(0)} = -Y_{in}^{(+)} = -\frac{F_{21}^{(+)} + F_{22}^{(+)} Y_2}{F_{11}^{(+)} + F_{12}^{(+)} Y_2} \quad (2.335)$$

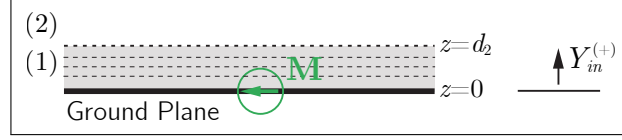


図 2.4. 多層誘電体基板の地導体面に磁流源がある場合

また,

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_1(d_1) &= F_{21}^{(+)\prime} \widetilde{E}_1(0) + F_{22}^{(+)\prime} \widetilde{H}_1(0) = F_{21}^{(+)\prime} (-\widetilde{M}) + F_{22}^{(+)\prime} (-\widetilde{M} Y_{in}^{(+)}) \\ &= -\left(F_{21}^{(+)\prime} + F_{22}^{(+)\prime} Y_{in}^{(+)}\right) \widetilde{M} \equiv \widetilde{Y}^{(d_1)} \widetilde{M}\end{aligned}\quad (2.336)$$

$$\widetilde{E}_1(d_1) = \widetilde{E}_2(d_1) = Z_2 \widetilde{H}_2(d_1) = Z_2 \widetilde{H}_1(d_1) = Z_2 \widetilde{Y}^{(d_1)} \widetilde{M} \equiv \widetilde{Q}^{(d_1)} \widetilde{M}\quad (2.337)$$

ここで,

$$\widetilde{Y}^{(d_1)} = -\left(F_{21}^{(+)\prime} + F_{22}^{(+)\prime} Y_{in}^{(+)}\right)\quad (2.338)$$

$$\widetilde{Q}^{(d_1)} = Z_2 \widetilde{Y}^{(d_1)} = -Z_2 \left(F_{21}^{(+)\prime} + F_{22}^{(+)\prime} Y_{in}^{(+)}\right)\quad (2.339)$$

2.11 面電流源に対するグリーン関数

2.11.1 スペクトル領域の電界型ダイアディック・グリーン関数

境界面に接する電界のベクトル $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}}$ は,

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}} = \widetilde{E}_u \mathbf{u}_u + \widetilde{E}_v \mathbf{u}_v = \widetilde{Z}_{TE}^{(z)} \widetilde{J}_u \mathbf{u}_u + \widetilde{Z}_{TM}^{(z)} \widetilde{J}_v \mathbf{u}_v\quad (2.340)$$

$$(2.341)$$

成分を行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}} \cdot \mathbf{u}_u \\ \widetilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}} \cdot \mathbf{u}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{E}_u \\ \widetilde{E}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{Z}_{TE}^{(z)} & 0 \\ 0 & \widetilde{Z}_{TM}^{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{J}_u \\ \widetilde{J}_v \end{pmatrix}\quad (2.342)$$

x, y 成分を求めると,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \widetilde{E}_x \\ \widetilde{E}_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \left(\widetilde{E}_v \mathbf{u}_v + \widetilde{E}_u \mathbf{u}_u\right) \cdot \mathbf{u}_x \\ \left(\widetilde{E}_v \mathbf{u}_v + \widetilde{E}_u \mathbf{u}_u\right) \cdot \mathbf{u}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_u \cdot \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_u \cdot \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{u}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{E}_u \\ \widetilde{E}_v \end{pmatrix} \\ &= [\Phi]^t \begin{pmatrix} \widetilde{Z}_{TE}^{(z)} & 0 \\ 0 & \widetilde{Z}_{TM}^{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{J}_u \\ \widetilde{J}_v \end{pmatrix} = [\Phi]^t \begin{pmatrix} \widetilde{Z}_{TE}^{(z)} & 0 \\ 0 & \widetilde{Z}_{TM}^{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\widetilde{J}_x \mathbf{u}_x + \widetilde{J}_y \mathbf{u}_y\right) \cdot \mathbf{u}_u \\ \left(\widetilde{J}_x \mathbf{u}_x + \widetilde{J}_y \mathbf{u}_y\right) \cdot \mathbf{u}_v \end{pmatrix} \\ &= [\Phi]^t \begin{pmatrix} \widetilde{Z}_{TE}^{(z)} & 0 \\ 0 & \widetilde{Z}_{TM}^{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_u & \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_u \\ \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_v & \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{J}_x \\ \widetilde{J}_y \end{pmatrix} \\ &= [\Phi]^t \begin{pmatrix} \widetilde{Z}_{TE}^{(z)} & 0 \\ 0 & \widetilde{Z}_{TM}^{(z)} \end{pmatrix} [\Phi] \begin{pmatrix} \widetilde{J}_x \\ \widetilde{J}_y \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.343)$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{xx}^{EJ} & \tilde{G}_{xy}^{EJ} \\ \tilde{G}_{yx}^{EJ} & \tilde{G}_{yy}^{EJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \end{pmatrix} \quad (2.344)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{xx}^{EJ} & \tilde{G}_{xy}^{EJ} \\ \tilde{G}_{yx}^{EJ} & \tilde{G}_{yy}^{EJ} \end{pmatrix} &= [\Phi]^t \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{TE}^{(z)} & 0 \\ 0 & \tilde{Z}_{TM}^{(z)} \end{pmatrix} [\Phi] \\ &= \begin{pmatrix} \sin \Phi & \cos \Phi \\ -\cos \Phi & \sin \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{TE}^{(z)} & 0 \\ 0 & \tilde{Z}_{TM}^{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \Phi & -\cos \Phi \\ \cos \Phi & \sin \Phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{TE}^{(z)} \sin^2 \Phi + \tilde{Z}_{TM}^{(z)} \cos^2 \Phi & (\tilde{Z}_{TM}^{(z)} - \tilde{Z}_{TE}^{(z)}) \sin \Phi \cos \Phi \\ (\tilde{Z}_{TM}^{(z)} - \tilde{Z}_{TE}^{(z)}) \sin \Phi \cos \Phi & \tilde{Z}_{TE}^{(z)} \cos^2 \Phi + \tilde{Z}_{TM}^{(z)} \sin^2 \Phi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.345)$$

これより,

$$\widetilde{\tilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ} = \tilde{G}_{xx}^{EJ} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{xy}^{EJ} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \tilde{G}_{yx}^{EJ} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{yy}^{EJ} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y \quad (2.346)$$

とおくと, $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}}$ は,

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}} = \left(\tilde{G}_{xx}^{EJ} \tilde{J}_x + \tilde{G}_{xy}^{EJ} \tilde{J}_y \right) \mathbf{u}_x + \left(\tilde{G}_{yx}^{EJ} \tilde{J}_x + \tilde{G}_{yy}^{EJ} \tilde{J}_y \right) \mathbf{u}_y = \widetilde{\tilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ} \cdot \tilde{\mathbf{J}} \quad (2.347)$$

ただし,

$$\tilde{G}_{xx}^{EJ} = \tilde{Z}_{TE}^{(z)} \sin^2 \Phi + \tilde{Z}_{TM}^{(z)} \cos^2 \Phi = \frac{1}{k_t^2} \left(k_y^2 \tilde{Z}_{TE}^{(z)} + k_x^2 \tilde{Z}_{TM}^{(z)} \right) \quad (2.348)$$

$$\tilde{G}_{xy}^{EJ} = \tilde{G}_{yx}^{EJ} = \left(\tilde{Z}_{TM}^{(z)} - \tilde{Z}_{TE}^{(z)} \right) \sin \Phi \cos \Phi = \frac{k_x k_y}{k_t^2} \left(\tilde{Z}_{TM}^{(z)} - \tilde{Z}_{TE}^{(z)} \right) \quad (2.349)$$

$$\tilde{G}_{yy}^{EJ} = \tilde{Z}_{TE}^{(z)} \cos^2 \Phi + \tilde{Z}_{TM}^{(z)} \sin^2 \Phi = \frac{1}{k_t^2} \left(k_x^2 \tilde{Z}_{TE}^{(z)} + k_y^2 \tilde{Z}_{TM}^{(z)} \right) \quad (2.350)$$

2.11.2 スペクトル領域の磁界型ダイアディック・グリーン関数

同様にして, 境界面に接する磁界のベクトル $\widetilde{\mathbf{H}}_{\text{tan}}$ が,

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{\text{tan}} = \widetilde{H}'_u (-\mathbf{u}_u) + \widetilde{H}'_v \mathbf{u}_v = \tilde{P}_{TM}^{(z)} \tilde{J}_v (-\mathbf{u}_u) + \tilde{P}_{TE}^{(z)} \tilde{J}_u \mathbf{u}_v \quad (2.351)$$

で与えられている場合を考える. 成分を行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{H}}_{\text{tan}} \cdot \mathbf{u}_u \\ \widetilde{\mathbf{H}}_{\text{tan}} \cdot \mathbf{u}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\widetilde{H}'_u \\ \widetilde{H}'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{P}_{TM}^{(z)} \\ \tilde{P}_{TE}^{(z)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_u \\ \tilde{J}_v \end{pmatrix} \quad (2.352)$$

x, y 成分を求めると,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \widetilde{H}_x \\ \widetilde{H}_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\widetilde{H}_v \mathbf{u}_v - \widetilde{H}'_u \mathbf{u}_u) \cdot \mathbf{u}_x \\ (\widetilde{H}_v \mathbf{u}_v - \widetilde{H}'_u \mathbf{u}_u) \cdot \mathbf{u}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_u \cdot \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_u \cdot \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{u}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\widetilde{H}'_u \\ \widetilde{H}_v \end{pmatrix} \\
&= [\Phi]^t \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{P}_{TM}^{(z)} \\ \widetilde{P}_{TE}^{(z)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{J}_v \\ \widetilde{J}_u \end{pmatrix} = [\Phi]^t \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{P}_{TM}^{(z)} \\ \widetilde{P}_{TE}^{(z)} & 0 \end{pmatrix} [\Phi] \begin{pmatrix} \widetilde{J}_x \\ \widetilde{J}_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \widetilde{G}_{xx}^{HJ} & \widetilde{G}_{xy}^{HJ} \\ \widetilde{G}_{yx}^{HJ} & \widetilde{G}_{yy}^{HJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{J}_x \\ \widetilde{J}_y \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.353}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \widetilde{G}_{xx}^{HJ} & \widetilde{G}_{xy}^{HJ} \\ \widetilde{G}_{yx}^{HJ} & \widetilde{G}_{yy}^{HJ} \end{pmatrix} &= [\Phi]^t \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{P}_{TM}^{(z)} \\ \widetilde{P}_{TE}^{(z)} & 0 \end{pmatrix} [\Phi] \\
&= \begin{pmatrix} \sin \Phi & \cos \Phi \\ -\cos \Phi & \sin \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{P}_{TM}^{(z)} \\ \widetilde{P}_{TE}^{(z)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \Phi & -\cos \Phi \\ \cos \Phi & \sin \Phi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\widetilde{P}_{TE}^{(z)} - \widetilde{P}_{TM}^{(z)}) \sin \Phi \cos \Phi & -\widetilde{P}_{TE}^{(z)} \cos^2 \Phi - \widetilde{P}_{TM}^{(z)} \sin^2 \Phi \\ \widetilde{P}_{TE}^{(z)} \sin^2 \Phi + \widetilde{P}_{TM}^{(z)} \cos^2 \Phi & (\widetilde{P}_{TM}^{(z)} - \widetilde{P}_{TE}^{(z)}) \sin \Phi \cos \Phi \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.354}$$

よって, $\widetilde{\mathbf{H}}_{\text{tan}} = \widetilde{\mathbf{G}}_T^{HJ} \cdot \widetilde{\mathbf{J}}$ において, $\widetilde{\mathbf{G}}_T$ を定義すると,

$$\widetilde{\mathbf{G}}_T^{HJ} = \widetilde{G}_{xx}^{HJ} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{xy}^{HJ} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \widetilde{G}_{yx}^{HJ} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{yy}^{HJ} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y \tag{2.355}$$

各成分は次のようになる.

$$\widetilde{G}_{xx}^{HJ} = -\widetilde{G}_{yy}^{HJ} = (\widetilde{P}_{TE}^{(z)} - \widetilde{P}_{TM}^{(z)}) \sin \Phi \cos \Phi = \frac{k_x k_y}{k_t^2} (\widetilde{P}_{TE}^{(z)} - \widetilde{P}_{TM}^{(z)}) \tag{2.356}$$

$$\widetilde{G}_{xy}^{HJ} = -\widetilde{P}_{TE}^{(z)} \cos^2 \Phi - \widetilde{P}_{TM}^{(z)} \sin^2 \Phi = -\frac{1}{k_t^2} (k_x^2 \widetilde{P}_{TE}^{(z)} + k_y^2 \widetilde{P}_{TM}^{(z)}) \tag{2.357}$$

$$\widetilde{G}_{yx}^{HJ} = \widetilde{P}_{TE}^{(z)} \sin^2 \Phi + \widetilde{P}_{TM}^{(z)} \cos^2 \Phi = \frac{1}{k_t^2} (k_y^2 \widetilde{P}_{TE}^{(z)} + k_x^2 \widetilde{P}_{TM}^{(z)}) \tag{2.358}$$

2.12 面磁流源に対するグリーン関数

2.12.1 スペクトル領域の磁界型ダイアディック・グリーン関数

先に示した境界面に接する電界のベクトル $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}}$ は,

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}} = \widetilde{E}_v \mathbf{u}_v + \widetilde{E}_u \mathbf{u}_u = Z_{TM}^{(z)} \widetilde{J}_v \mathbf{u}_v + Z_{TE}^{(z)} \widetilde{J}_u \mathbf{u}_u \tag{2.359}$$

成分を行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{E}_u \\ \widetilde{E}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{TE}^{(z)} & 0 \\ 0 & Z_{TM}^{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{J}_u \\ \widetilde{J}_v \end{pmatrix} \tag{2.360}$$

双対性より,

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{\text{tan}}^f = \widetilde{H}_u^f \mathbf{u}_u + \widetilde{H}_v^f \mathbf{u}_v = \widetilde{Y}_{TM}^{(z)} \widetilde{M}_u \mathbf{u}_u + \widetilde{Y}_{TE}^{(z)} \widetilde{M}_v \mathbf{u}_v \quad (2.361)$$

成分を行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{H}}_{\text{tan}}^f \cdot \mathbf{u}_u \\ \widetilde{\mathbf{H}}_{\text{tan}}^f \cdot \mathbf{u}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{H}_u^f \\ \widetilde{H}_v^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_{TM}^{(z)} & 0 \\ 0 & \widetilde{Y}_{TE}^{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{M}_u \\ \widetilde{M}_v \end{pmatrix} \quad (2.362)$$

これより, スペクトル領域のグリーン関数を求めると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{G}_{xx}^{HM} & \widetilde{G}_{xy}^{HM} \\ \widetilde{G}_{yx}^{HM} & \widetilde{G}_{yy}^{HM} \end{pmatrix} &= [\Phi]^t \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_{TM}^{(z)} & 0 \\ 0 & \widetilde{Y}_{TE}^{(z)} \end{pmatrix} [\Phi] \\ &= \begin{pmatrix} \sin \Phi & \cos \Phi \\ -\cos \Phi & \sin \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_{TM}^{(z)} & 0 \\ 0 & \widetilde{Y}_{TE}^{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \Phi & -\cos \Phi \\ \cos \Phi & \sin \Phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_{TM}^{(z)} \sin^2 \Phi + \widetilde{Y}_{TE}^{(z)} \cos^2 \Phi & (\widetilde{Y}_{TE}^{(z)} - \widetilde{Y}_{TM}^{(z)}) \sin \Phi \cos \Phi \\ (\widetilde{Y}_{TE}^{(z)} - \widetilde{Y}_{TM}^{(z)}) \sin \Phi \cos \Phi & \widetilde{Y}_{TM}^{(z)} \cos^2 \Phi + \widetilde{Y}_{TE}^{(z)} \sin^2 \Phi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.363)$$

よって, $\widetilde{\mathbf{H}}_{\text{tan}}^f = \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{HM} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}$ より, $\widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T$ を定義して,

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{HM} = \widetilde{G}_{xx}^{HM} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{xy}^{HM} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \widetilde{G}_{yx}^{HM} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{yy}^{HM} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y \quad (2.364)$$

ここで,

$$\widetilde{G}_{xx}^{HM} = \widetilde{Y}_{TM}^{(z)} \sin^2 \Phi + \widetilde{Y}_{TE}^{(z)} \cos^2 \Phi = \frac{1}{k_t^2} \left(k_y^2 \widetilde{Y}_{TM}^{(z)} + k_x^2 \widetilde{Y}_{TE}^{(z)} \right) \quad (2.365)$$

$$\widetilde{G}_{xy}^{HM} = \widetilde{G}_{yx}^{HM} = (\widetilde{Y}_{TE}^{(z)} - \widetilde{Y}_{TM}^{(z)}) \sin \Phi \cos \Phi = \frac{k_x k_y}{k_t^2} (\widetilde{Y}_{TE}^{(z)} - \widetilde{Y}_{TM}^{(z)}) \quad (2.366)$$

$$\widetilde{G}_{yy}^{HM} = \widetilde{Y}_{TM}^{(z)} \cos^2 \Phi + \widetilde{Y}_{TE}^{(z)} \sin^2 \Phi = \frac{1}{k_t^2} \left(k_x^2 \widetilde{Y}_{TM}^{(z)} + k_y^2 \widetilde{Y}_{TE}^{(z)} \right) \quad (2.367)$$

2.12.2 スペクトル領域の電界型ダイアディック・グリーン関数

同様に, 先に示した境界面に接する磁界のベクトル $\widetilde{\mathbf{H}}_{\text{tan}}$ は,

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{\text{tan}} = \widetilde{H}_v'(-\mathbf{u}_v) + \widetilde{H}_u \mathbf{u}_u = -P_{TE}^{(z)} \widetilde{J}_u \mathbf{u}_v + P_{TM}^{(z)} \widetilde{J}_v \mathbf{u}_u \quad (2.368)$$

成分を行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{H}_u \\ -\widetilde{H}_v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P_{TM}^{(z)} \\ -P_{TE}^{(z)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{J}_u \\ \widetilde{J}_v \end{pmatrix} \quad (2.369)$$

双対性より,

$$-\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}}^f = \widetilde{E}_u^{f'}(-\mathbf{u}_u) + \widetilde{E}_v^{f'} \mathbf{u}_v = \widetilde{Q}_{TE}^{(z)} \widetilde{M}_v(-\mathbf{u}_u) + \widetilde{Q}_{TM}^{(z)} \widetilde{M}_u \mathbf{u}_v \quad (2.370)$$

成分を行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}}^f \cdot \mathbf{u}_u \\ \widetilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}}^f \cdot \mathbf{u}_v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\widetilde{E}_u^{f''} \\ \widetilde{E}_v^{f'} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{Q}_{TE}^{(z)} \\ \widetilde{Q}_{TM}^{(z)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{M}_u \\ \widetilde{M}_v \end{pmatrix} \quad (2.371)$$

これより, スペクトル領域のグリーン関数を求めると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{G}_{xx}^{EM} & \widetilde{G}_{xy}^{EM} \\ \widetilde{G}_{yx}^{EM} & \widetilde{G}_{yy}^{EM} \end{pmatrix} &= -[\Phi]^t \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{Q}_{TE}^{(z)} \\ \widetilde{Q}_{TM}^{(z)} & 0 \end{pmatrix} [\Phi] \\ &= - \begin{pmatrix} \sin \Phi & \cos \Phi \\ -\cos \Phi & \sin \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{Q}_{TE}^{(z)} \\ \widetilde{Q}_{TM}^{(z)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \Phi & -\cos \Phi \\ \cos \Phi & \sin \Phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\widetilde{Q}_{TE}^{(z)} - \widetilde{Q}_{TM}^{(z)}) \sin \Phi \cos \Phi & \widetilde{Q}_{TM}^{(z)} \cos^2 \Phi + \widetilde{Q}_{TE}^{(z)} \sin^2 \Phi \\ -\widetilde{Q}_{TM}^{(z)} \sin^2 \Phi - \widetilde{Q}_{TE}^{(z)} \cos^2 \Phi & (\widetilde{Q}_{TM}^{(z)} - \widetilde{Q}_{TE}^{(z)}) \sin \Phi \cos \Phi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.372)$$

よって, $\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}}^f = \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EM} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}$ より, $\widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EM}$ を定義して,

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EM} = \widetilde{G}_{xx}^{EM} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{xy}^{EM} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \widetilde{G}_{yx}^{EM} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{yy}^{EM} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y \quad (2.373)$$

ここで,

$$\widetilde{G}_{xx}^{EM} = -\widetilde{G}_{yy}^{EM} = (\widetilde{Q}_{TE}^{(z)} - \widetilde{Q}_{TM}^{(z)}) \sin \Phi \cos \Phi = \frac{k_x k_y}{k_t^2} (\widetilde{Q}_{TE}^{(z)} - \widetilde{Q}_{TM}^{(z)}) \quad (2.374)$$

$$\widetilde{G}_{xy}^{EM} = \widetilde{Q}_{TM}^{(z)} \cos^2 \Phi + \widetilde{Q}_{TE}^{(z)} \sin^2 \Phi = \frac{1}{k_t^2} (k_x^2 \widetilde{Q}_{TM}^{(z)} + k_y^2 \widetilde{Q}_{TE}^{(z)}) \quad (2.375)$$

$$\widetilde{G}_{yx}^{EM} = -\widetilde{Q}_{TM}^{(z)} \sin^2 \Phi - \widetilde{Q}_{TE}^{(z)} \cos^2 \Phi = -\frac{1}{k_t^2} (k_y^2 \widetilde{Q}_{TM}^{(z)} + k_x^2 \widetilde{Q}_{TE}^{(z)}) \quad (2.376)$$

2.13 自由空間中の電流素子のスペクトル領域グリーン関数の導出

誘電体基板がなく, 自由空間中の xy 面上に電流源がある場合を考える.

$$\widetilde{Z}^{(0)} = -\frac{1}{Y_0 + Y_0} = -\frac{1}{2Y_0} \quad (2.377)$$

これより,

$$Z_{TE}^{(0)} = -\frac{1}{2Y_{0TE}} = -\frac{1}{2\frac{k_{z0}}{\omega\mu_0}} = -\frac{\omega\mu_0}{2k_{z0}} \quad (2.378)$$

$$Z_{TM}^{(0)} = -\frac{1}{2Y_{0TM}} = -\frac{1}{2\frac{\omega\epsilon_0}{k_{z0}}} = -\frac{k_{z0}}{2\omega\epsilon_0} \quad (2.379)$$

よって,

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{xx}^{EJ} &= \frac{1}{k_t^2} \left(k_y^2 \tilde{Z}_{TE}^{(0)} + k_x^2 \tilde{Z}_{TM}^{(0)} \right) = \frac{1}{k_t^2} \left\{ k_y^2 \left(-\frac{\omega\mu_0}{2k_{z0}} \right) + k_x^2 \left(-\frac{k_{z0}}{2\omega\epsilon_0} \right) \right\} \\ &= -\frac{k_0^2 k_y^2 + k_{z0}^2 k_x^2}{2\omega\epsilon_0 k_t^2 k_{z0}}\end{aligned}\quad (2.380)$$

ここで,

$$k_0^2 k_y^2 + k_{z0}^2 k_x^2 = k_0^2 (k_t^2 - k_x^2) + (k_0^2 - k_t^2) k_x^2 = k_t^2 (k_0^2 - k_x^2) \quad (2.381)$$

より,

$$\tilde{G}_{xx}^{EJ} = -\frac{k_0^2 - k_x^2}{2\omega\epsilon_0 k_{z0}} = \frac{k_0^2 - k_x^2}{j\omega\epsilon_0} \frac{1}{j2k_{z0}} = -\frac{j\omega\mu_0}{k_0^2} \frac{1}{j2k_{z0}} (k_0^2 - k_x^2) \quad (2.382)$$

また,

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{xy}^{EJ} &= \tilde{G}_{yx}^{EJ} = \frac{k_x k_y}{k_t^2} \left(\tilde{Z}_{TM}^{(z)} - \tilde{Z}_{TE}^{(z)} \right) = \frac{k_x k_y}{k_t^2} \left(-\frac{k_{z0}}{2\omega\epsilon_0} + \frac{\omega\mu_0}{2k_{z0}} \right) = \frac{k_x k_y (-k_{z0} + k_0^2)}{2\omega\epsilon_0 k_t^2 k_{z0}} \\ &= \frac{k_x k_y}{2\omega\epsilon_0 k_{z0}} = -\frac{k_x k_y}{j\omega\epsilon_0} \frac{1}{j2k_{z0}} = \frac{j\omega\mu_0}{k_0^2} \frac{1}{j2k_{z0}} k_x k_y\end{aligned}\quad (2.383)$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{yy}^{EJ} &= \frac{1}{k_t^2} \left(k_x^2 \tilde{Z}_{TE}^{(z)} + k_y^2 \tilde{Z}_{TM}^{(z)} \right) = -\frac{k_0^2 - k_y^2}{2\omega\epsilon_0 k_{z0}} = \frac{k_0^2 - k_y^2}{j\omega\epsilon_0} \frac{1}{j2k_{z0}} \\ &= -\frac{j\omega\mu_0}{k_0^2} \frac{1}{j2k_{z0}} (k_0^2 - k_y^2)\end{aligned}\quad (2.384)$$

2.14 マイクロストリップ素子のスペクトル領域グリーン関数の導出

2.14.1 地導体板付き単層誘電体基板の表面に面電流源がある場合

マイクロストリップ素子として、厚み d の単層誘電体基板（比誘電率 ϵ_r ）の片面に地導体板を付け（ $z = -d$ ），誘電体と空気の境界面（ $z = 0$ ）に電流源がある場合を考える。このとき、 $-d \leq z \leq 0$ の誘電体を領域 (1) として、スペクトル領域の電界および磁界は、

$$\tilde{E}_1(z) = \tilde{E}_1^+ e^{-jk_{z1}z} + \tilde{E}_1^- e^{jk_{z1}z} \quad (2.385)$$

$$\tilde{H}_1(z) = Y_1 \left(\tilde{E}_1^+ e^{-jk_{z1}z} - \tilde{E}_1^- e^{jk_{z1}z} \right) \quad (2.386)$$

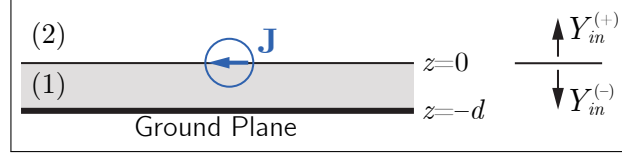


図 2.5. 地導体板付き単層誘電体基板の表面に面電流源がある場合

また, $z \geq 0$ の自由空間を領域 (2) として, 電界および磁界は,

$$\tilde{E}_2(z) = \tilde{E}_2^+ e^{-jk_z z} \quad (2.387)$$

$$\tilde{H}_2(z) = Y_2 \tilde{E}_2^+ e^{-jk_z z} \quad (2.388)$$

地導体板が完全導体のとき, $z = -d$ の電界の接線成分はゼロゆえ,

$$\tilde{E}_1(-d) = \tilde{E}_1^+ e^{jk_{z1}d} + \tilde{E}_1^- e^{-jk_{z1}d} = 0 \quad (2.389)$$

よって,

$$\tilde{E}_1^+ = -\tilde{E}_1^- e^{-j2k_{z1}d} \quad (2.390)$$

これより,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1(z) &= -\tilde{E}_1^- e^{-j2k_{z1}d} e^{-jk_{z1}z} + \tilde{E}_1^- e^{jk_{z1}z} = \tilde{E}_1^- e^{-jk_{z1}z} \left(-e^{-jk_{z1}(z+d)} + e^{jk_{z1}(z+d)} \right) \\ &= \tilde{E}_1^- e^{-jk_{z1}z} (j2) \sin k_{z1}(z+d) \equiv C_1 \sin k_{z1}(z+d) \end{aligned} \quad (2.391)$$

また,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(z) &= Y_1 \left(-\tilde{E}_1^- e^{-j2k_{z1}d} e^{-jk_z z} - \tilde{E}_1^- e^{jk_{z1}z} \right) \\ &= Y_1 \tilde{E}_1^- e^{-jk_{z1}z} \left(-e^{-jk_{z1}(z+d)} - e^{jk_{z1}(z+d)} \right) \\ &= Y_1 \tilde{E}_1^- e^{-jk_{z1}z} (-2) \cos k_{z1}(z+d) = jY_1 C_1 \cos k_{z1}(z+d) \end{aligned} \quad (2.392)$$

誘電体と空気の境界 ($z = 0$) において, $z \geq 0$ 自由空間を見た入力アドミタンス $Y_{in}^{(+)}$ は,

$$Y_{in}^{(+)} = \frac{\tilde{H}_2(0)}{\tilde{E}_2(0)} = \frac{Y_2 \tilde{E}_2^+}{\tilde{E}_2^+} = Y_2 \quad (2.393)$$

一方, 誘電体と空気の境界 ($z = 0$) において, $z \leq 0$ の誘電体を見た入力アドミタンス $Y_{in}^{(-)}$ は, $z = -d$ での電磁界の連続条件を考慮すると,

$$\begin{aligned} Y_{in}^{(-)} &= \frac{\tilde{H}_1(0)}{\tilde{E}_1(0)} = -\frac{-\tilde{E}_1(-d)jY_1 \sin k_{z1}d + \tilde{H}_1(-d) \cos k_{z1}d}{\tilde{E}_1(-d) \cos k_{z1}d - \tilde{H}_1(-d)jY_1 \sin k_{z1}d} \\ &= \frac{\cos k_{z1}d}{jY_1 \sin k_{z1}d} = -jY_1 \cot k_{z1}d \end{aligned} \quad (2.394)$$

2.14.2 スペクトル領域の電界型ダイアディック・グリーン関数

$z = 0$ におけるスペクトル領域の電流を $\tilde{J}$ とすると, $z = 0$ の電磁界の連続条件より,

$$\tilde{E}_2(0) - \tilde{E}_1(0) = 0 \quad (2.395)$$

$$\tilde{H}_2(0) - \tilde{H}_1(0) = -\tilde{J} \quad (2.396)$$

これより,

$$Y_{in}^{(+)} \tilde{E}_2(0) + Y_{in}^{(-)} \tilde{E}_2(0) = -\tilde{J} \quad (2.397)$$

よって,

$$\tilde{E}_2(0) = \tilde{E}_1(0) = -\frac{\tilde{J}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \equiv \tilde{Z}^{(0)} \tilde{J} \quad (2.398)$$

ただし,

$$\tilde{Z}^{(0)} = -\frac{1}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} = -\frac{1}{Y_2 - jY_1 \cot k_{z1}d} \quad (2.399)$$

これより,

$$Z_{TE}^{(0)} = -\frac{1}{Y_{2TE} - jY_{1TE} \cot k_{z1}d} = -\frac{1}{\frac{k_{z2}}{\omega\mu_2} - j\frac{k_{z1}}{\omega\mu_1} \cot k_{z1}d} \quad (2.400)$$

ここで, $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$ より,

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{TE}^{(0)} &= -\frac{\omega\mu_0 \sin k_{z1}d}{k_{z2} \sin k_{z1}d - jk_{z1} \cos k_{z1}d} = -\frac{j\omega\mu_0 \sin k_{z1}d}{k_{z1} \cos k_{z1}d + jk_{z2} \sin k_{z1}d} \\ &= -\frac{j\omega\mu_0 \sin k_{z1}d}{T_e} \end{aligned} \quad (2.401)$$

ただし,

$$T_e \equiv k_{z1} \cos k_{z1}d + jk_{z2} \sin k_{z1}d \quad (2.402)$$

また,

$$\tilde{Z}_{TM}^{(0)} = -\frac{1}{Y_{2TM} - jY_{1TM} \cot k_{z1}d} = -\frac{1}{\frac{\omega\epsilon_2}{k_{z2}} - j\frac{\omega\epsilon_1}{k_{z1}} \cot k_{z1}d} \quad (2.403)$$

ここで, $\epsilon_2 = \epsilon_0$, $\epsilon_1 = \epsilon_r \epsilon_0$ より,

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{TM}^{(0)} &= -\frac{k_{z1}k_{z2}}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{\sin k_{z1}d}{k_{z1} \sin k_{z1}d - jk_{z2}\epsilon_r \cos k_{z1}d} \\ &= -\frac{k_{z1}k_{z2}}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{j \sin k_{z1}d}{k_{z2}\epsilon_r \cos k_{z1}d + jk_{z1} \sin k_{z1}d} = -\frac{jk_{z1}k_{z2} \sin k_{z1}d}{\omega\epsilon_0 T_m} \end{aligned} \quad (2.404)$$

ただし,

$$T_m \equiv k_{z2}\epsilon_r \cos k_{z1}d + jk_{z1} \sin k_{z1}d \quad (2.405)$$

よって, ダイアデミック・グリーン関数の成分 $\tilde{G}_{xx}^{EJ}$ は,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{xx}^{EJ} &= \frac{1}{k_t^2} \left(k_y^2 \tilde{Z}_{TE}^{(0)} + k_x^2 \tilde{Z}_{TM}^{(0)} \right) = \frac{1}{k_t^2} \left(-k_y^2 \frac{j\omega\mu_0 \sin k_{z1}d}{T_e} - k_x^2 \frac{j k_{z1} k_{z2} \sin k_{z1}d}{\omega\epsilon_0 T_m} \right) \\ &= -\frac{j}{\omega\epsilon_0} \frac{\sin k_{z1}d}{k_t^2} \left(\frac{k_y^2 k_0^2}{T_e} + \frac{k_x^2 k_{z1} k_{z2}}{T_m} \right) = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{\sin k_{z1}d}{k_t^2} \cdot \frac{k_y^2 k_0^2 T_m + k_x^2 k_{z1} k_{z2} T_e}{T_e T_m} \\ &= \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \frac{\sin k_{z1}d}{k_t^2} \frac{k_{z2}(k_x^2 k_{z1}^2 + k_y^2 k_0^2 \epsilon_r) \cos k_{z1}d + k_{z1}(k_x^2 k_{z2}^2 + k_y^2 k_0^2) j \sin k_{z1}d}{T_e T_m} \end{aligned} \quad (2.406)$$

ここで,

$$k_x^2 k_{z1}^2 + k_y^2 k_0^2 \epsilon_r = k_x^2 (k_0^2 \epsilon_r - k_t^2) + (k_t^2 - k_x^2) k_0^2 \epsilon_r = k_t^2 (-k_x^2 + k_0^2 \epsilon_r) \quad (2.407)$$

$$k_x^2 k_{z2}^2 + k_y^2 k_0^2 = k_x^2 (k_0^2 - k_t^2) + (k_t^2 - k_x^2) k_0^2 = k_t^2 (-k_x^2 + k_0^2) \quad (2.408)$$

$$\frac{1}{\omega\epsilon_0} = \frac{1}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{Z_0}{k_0} \quad (2.409)$$

これより,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{xx}^{EJ} &= \frac{-jZ_0}{k_0} \frac{\sin k_{z1}d}{k_t^2} \frac{k_{z2}k_t^2(\epsilon_r k_0^2 - k_x^2) \cos k_{z1}d + k_{z1}k_t^2(k_0^2 - k_x^2) j \sin k_{z1}d}{T_e T_m} \\ &= \frac{-jZ_0}{k_0} \frac{k_{z2}(\epsilon_r k_0^2 - k_x^2) \cos k_{z1}d + j k_{z1}(k_0^2 - k_x^2) \sin k_{z1}d}{T_e T_m} \sin k_{z1}d \end{aligned} \quad (2.410)$$

また,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{xy}^{EJ} &= \tilde{G}_{yx}^{EJ} = \frac{k_x k_y}{k_t^2} \left(\tilde{Z}_{TM}^{(0)} - \tilde{Z}_{TE}^{(0)} \right) = \frac{k_x k_y}{k_t^2} \left(-\frac{j k_{z1} k_{z2} \sin k_{z1}d}{\omega\epsilon_0 T_m} + \frac{j\omega\mu_0 \sin k_{z1}d}{T_e} \right) \\ &= -\frac{j}{\omega\epsilon_0} \frac{k_x k_y \sin k_{z1}d}{k_t^2} \left(\frac{k_{z1} k_{z2}}{T_m} - \frac{k_0^2}{T_e} \right) = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{k_x k_y \sin k_{z1}d}{k_t^2} \cdot \frac{k_{z1} k_{z2} T_e - k_0^2 T_m}{T_e T_m} \\ &= \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{k_x k_y \sin k_{z1}d}{k_t^2} \cdot \frac{k_{z2}(k_{z1}^2 - k_0^2 \epsilon_r) \cos k_{z1}d + k_{z1}(k_{z2}^2 - k_0^2) j \sin k_{z1}d}{T_e T_m} \\ &= \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \cdot \frac{k_x k_y \sin k_{z1}d}{k_t^2} \cdot \frac{k_{z2}(-k_t^2) \cos k_{z1}d + j k_{z1}(-k_t^2) \sin k_{z1}d}{T_e T_m} \\ &= \frac{jZ_0}{k_0} \cdot \frac{k_x k_y (k_{z2} \cos k_{z1}d + j k_{z1} \sin k_{z1}d)}{T_e T_m} \sin k_{z1}d \end{aligned} \quad (2.411)$$

$\tilde{G}_{xx}^{EJ}$ の計算と同様にして,

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{yy}^{EJ} &= \frac{1}{k_t^2} \left(k_x^2 \tilde{Z}_{TE}^{(0)} + k_y^2 \tilde{Z}_{TM}^{(0)} \right) = \frac{1}{k_t^2} \left(-k_x^2 \frac{j\omega\mu_0 \sin k_{z1}d}{T_e} - k_y^2 \frac{j k_{z1} k_{z2} \sin k_{z1}d}{\omega\epsilon_0 T_m} \right) \\
&= -\frac{j}{\omega\epsilon_0} \frac{\sin k_{z1}d}{k_t^2} \left(\frac{k_x^2 k_0^2}{T_e} + \frac{k_y^2 k_{z1} k_{z2}}{T_m} \right) \\
&= \frac{-jZ_0}{k_0} \frac{k_{z2}(\epsilon_r k_0^2 - k_y^2) \cos k_{z1}d + j k_{z1}(k_0^2 - k_y^2) \sin k_{z1}d}{T_e T_m} \sin k_{z1}d
\end{aligned} \tag{2.412}$$

2.14.3 スペクトル領域の磁界型ダイアディック・グリーン関数

一方, $z = -d$ の地導体面上では,

$$\tilde{E}_1(-d) = 0 \tag{2.413}$$

また,

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_1(-d) &= \tilde{E}_1(0)jY_1 \sin k_{z1}d + \tilde{H}_1(0) \cos k_{z1}d \\
&= \tilde{E}_1(0)jY_1 \sin k_{z1}d - Y_{in}^{(-)} \tilde{E}_1(0) \cos k_{z1}d \\
&= -\frac{\tilde{J}}{Y_{in}^{(+)} + Y_{in}^{(-)}} \left(jY_1 \sin k_{z1}d - Y_{in}^{(+)} \cos k_{z1}d \right) \\
&= -\frac{\tilde{J}}{Y_2 - jY_1 \cot k_{z1}d} \left(jY_1 \sin k_{z1}d + jY_1 \cot k_{z1}d \cos k_{z1}d \right) \\
&= -\frac{jY_1 \tilde{J}}{Y_2 \sin k_{z1}d - jY_1 \cos k_{z1}d} = \frac{Y_1 \tilde{J}}{Y_1 \cos k_{z1}d + jY_2 \sin k_{z1}d} \equiv \tilde{P}^{(-d)} \tilde{J}
\end{aligned} \tag{2.414}$$

ここで,

$$\tilde{P}^{(-d)} = \frac{Y_1}{Y_1 \cos k_{z1}d + jY_2 \sin k_{z1}d} \tag{2.415}$$

これより ($\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$),

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{TE}^{(-d)} &= \frac{Y_{1TE}}{Y_{1TE} \cos k_{z,1}d + jY_{2TE} \sin k_{z,1}d} = \frac{\frac{k_{z1}}{\omega\mu_1}}{\frac{k_{z1}}{\omega\mu_1} \cos k_{z1}d + j \frac{k_{z2}}{\omega\mu_2} \sin k_{z1}d} \\
&= \frac{k_{z1}}{k_{z1} \cos k_{z1}d + j k_{z2} \sin k_{z1}d} = \frac{k_{z1}}{T_e}
\end{aligned} \tag{2.416}$$

また $(\epsilon_2 = \epsilon_0, \epsilon_1 = \epsilon_r \epsilon_0)$,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{TM}^{(-d)} &= \frac{Y_{1TM}}{Y_{1TM} \cos k_{z1}d + jY_{2TM} \sin k_{z1}d} = \frac{\frac{\omega\epsilon_1}{k_{z1}}}{\frac{\omega\epsilon_1}{k_{z1}} \cos k_{z1}d + j\frac{\omega\epsilon_2}{k_{z2}} \sin k_{z1}d} \\ &= \frac{k_{z2}\epsilon_r}{k_{z2}\epsilon_r \cos k_{z1}d + jk_{z1} \sin k_{z1}d} = \frac{k_{z2}\epsilon_r}{T_m}\end{aligned}\quad (2.417)$$

よって、磁界型ダイアデミック・グリーン関数の各成分は、

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{xx}^{HJ} &= -\tilde{G}_{yy}^{HJ} = \frac{k_x k_y}{k_t^2} \left(\tilde{P}_{TE}^{(-d)} - \tilde{P}_{TM}^{(-d)} \right) = \frac{k_x k_y}{k_t^2} \left(\frac{k_{z1}}{T_e} - \frac{k_{z2}\epsilon_r}{T_m} \right) \\ &= \frac{k_x k_y}{k_t^2} \cdot \frac{k_{z1}T_m - \epsilon_r k_{z2}T_e}{T_e T_m} \\ &= \frac{k_x k_y}{k_t^2} \frac{k_{z1}(k_{z2}\epsilon_r \cos k_{z1}d + jk_{z1} \sin k_{z1}d) - \epsilon_r k_2(k_1 \cos k_1d + jk_2 \sin k_1d)}{T_e T_m} \\ &= \frac{k_x k_y}{k_t^2} \frac{(jk_{z1}^2 - j\epsilon_r k_{z2}^2) \sin k_{z1}d}{T_e T_m} \\ &= \frac{jk_x k_y}{k_t^2} \frac{\{(k_0^2 \epsilon_r - k_t^2) - \epsilon_r(k_0^2 - k_t^2)\} \sin k_{z1}d}{T_e T_m} \\ &= \frac{jk_x k_y (\epsilon_r - 1) \sin k_{z1}d}{T_e T_m}\end{aligned}\quad (2.418)$$

また、

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{xy}^{HJ} &= -\frac{1}{k_t^2} \left(k_x^2 \tilde{P}_{TE}^{(-d)} + k_y^2 \tilde{P}_{TM}^{(-d)} \right) = -\frac{1}{k_t^2} \left(\frac{k_x^2 k_{z1}}{T_e} + \frac{\epsilon_r k_y^2 k_{z2}}{T_m} \right) \\ &= -\frac{1}{k_t^2} \left\{ \frac{(k_t^2 - k_y^2)k_{z1}}{T_e} + \frac{\epsilon_r k_y^2 k_{z2}}{T_m} \right\} = -\frac{k_{z1}}{T_e} - \frac{k_y^2}{k_t^2} \left(\frac{k_{z1}}{T_e} - \frac{\epsilon_r k_{z2}}{T_m} \right) \\ &= \frac{k_{z1}}{T_e} - \frac{jk_y^2 (\epsilon_r - 1) \sin k_{z1}d}{T_e T_m}\end{aligned}\quad (2.419)$$

同様にして、

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{yx}^{HJ} &= \frac{1}{k_t^2} \left(k_y^2 \tilde{P}_{TE}^{(-d)} + k_x^2 \tilde{P}_{TM}^{(-d)} \right) = \frac{1}{k_t^2} \left(\frac{k_y^2 k_{z1}}{T_e} + \frac{\epsilon_r k_x^2 k_{z2}}{T_m} \right) \\ &= \frac{1}{k_t^2} \left\{ \frac{(k_t^2 - k_x^2)k_{z1}}{T_e} + \frac{\epsilon_r k_x^2 k_{z2}}{T_m} \right\} = -\frac{k_{z1}}{T_e} + \frac{k_x^2}{k_t^2} \left(\frac{k_{z1}}{T_e} - \frac{\epsilon_r k_{z2}}{T_m} \right) \\ &= -\frac{k_{z1}}{T_e} + \frac{jk_x^2 (\epsilon_r - 1) \sin k_{z1}d}{T_e T_m}\end{aligned}\quad (2.420)$$

2.15 スロット素子のスペクトル領域グリーン関数の導出

2.15.1 単層誘電体基板の地導体面に磁流源がある場合

誘電体基板（厚さ d ，比誘電率 ϵ_r ）の地導体に設けたスロット素子を考える． $z = 0$ の境界条件より，

$$\tilde{E}_1(0) = -\tilde{M} \quad (2.421)$$



図 2.6. 単層誘電体基板の地導体面に磁流源がある場合

このとき，

$$\tilde{H}_1(0) = Y_{in}^{(+)} \tilde{E}_1(0) = -Y_{in}^{(+)} \tilde{M} \equiv \tilde{Y}^{(0)} \tilde{M} \quad (2.422)$$

ここで，

$$\tilde{Y}^{(0)} = -Y_{in}^{(+)} = -Y_1 \frac{Y_2 + jY_1 \tan k_{z1}d}{Y_1 + jY_2 \tan k_{z1}d} = -Y_1 \frac{Y_2 \cos k_{z1}d + jY_1 \sin k_{z1}d}{Y_1 \cos k_{z1}d + jY_2 \sin k_{z1}d} \quad (2.423)$$

2.15.2 スペクトル領域の磁界型ダイアディック・グリーン関数

これより，

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{TE}^{(0)} &= -Y_{1TE} \frac{Y_{2TE} \cos k_{z1}d + jY_{1TE} \sin k_{z1}d}{Y_{1TE} \cos k_{z1}d + jY_{2TE} \sin k_{z1}d} = -\frac{k_{z1}}{\omega\mu_1} \cdot \frac{\frac{k_{z2}}{\omega\mu_2} \cos k_{z1}d + j\frac{k_{z1}}{\omega\mu_1} \sin k_{z1}d}{\frac{k_{z1}}{\omega\mu_1} \cos k_{z1}d + j\frac{k_{z2}}{\omega\mu_2} \sin k_{z1}d} \\ &= -\frac{jk_{z1}}{\omega\mu_0 T_e} \left(-jk_{z2} \cos k_{z1}d + k_{z1} \sin k_{z1}d \right) \end{aligned} \quad (2.424)$$

また，

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{TM}^{(0)} &= -Y_{1TM} \frac{Y_{2TM} \cos k_{z1}d + jY_{1TM} \sin k_{z1}d}{Y_{1TM} \cos k_{z1}d + jY_{2TM} \sin k_{z1}d} = -\frac{\omega\epsilon_1}{k_{z1}} \cdot \frac{\frac{\omega\epsilon_2}{k_{z2}} \cos k_{z1}d + j\frac{\omega\epsilon_1}{k_{z1}} \sin k_{z1}d}{\frac{\omega\epsilon_1}{k_{z1}} \cos k_{z1}d + j\frac{\omega\epsilon_2}{k_{z2}} \sin k_{z1}d} \\ &= -\frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}{k_{z1}T_m} \left(-jk_{z1} \cos k_{z1}d + k_{z2}\epsilon_r \sin k_{z1}d \right) \end{aligned} \quad (2.425)$$

よって、磁界型ダイアデック・グリーン関数の各成分は、

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{xx}^{HM} &= \frac{1}{k_t^2} \left(k_y^2 \tilde{Y}_{TM}^{(0)} + k_x^2 \tilde{Y}_{TE}^{(0)} \right) \\
&= -\frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_r k_y^2}{k_t^2 k_{z1} T_m} \left(k_{z2}\epsilon_r \sin k_{z1}d - jk_{z1} \cos k_{z1}d \right) \\
&\quad - \frac{jk_{z1}k_x^2}{\omega\mu_0 k_t^2 T_e} \left(k_{z1} \sin k_{z1}d - jk_{z2} \cos k_{z1}d \right)
\end{aligned} \tag{2.426}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{xy}^{HM} &= \tilde{G}_{yx}^{HM} = \frac{k_x k_y}{k_t^2} \left(\tilde{Y}_{TE}^{(0)} - \tilde{Y}_{TM}^{(0)} \right) \\
&= \frac{k_x k_y}{k_t^2} \left\{ \frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}{k_{z1} T_m} \left(k_{z2}\epsilon_r \sin k_{z1}d - jk_{z1} \cos k_{z1}d \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{jk_{z1}}{\omega\mu_0 T_e} \left(k_{z1} \sin k_{z1}d - jk_{z2} \cos k_{z1}d \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.427}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{yy}^{HM} &= \frac{1}{k_t^2} \left(k_x^2 \tilde{Y}_{TM}^{(0)} + k_y^2 \tilde{Y}_{TE}^{(0)} \right) \\
&= -\frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_r k_x^2}{k_t^2 k_{z1} T_m} \left(k_{z2}\epsilon_r \sin k_{z1}d - jk_{z1} \cos k_{z1}d \right) \\
&\quad - \frac{jk_{z1}k_y^2}{\omega\mu_0 k_t^2 T_e} \left(k_{z1} \sin k_{z1}d - jk_{z2} \cos k_{z1}d \right)
\end{aligned} \tag{2.428}$$

2.15.3 スペクトル領域の電界型ダイアデック・グリーン関数

また、

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_1(d) &= -\tilde{E}_1(0)jY_1 \sin k_{z1}d + \tilde{H}_1(0) \cos k_{z1}d \\
&= -\left(-jY_1 \sin k_{z1}d + Y_{in}^{(+)} \cos k_{z1}d \right) \tilde{M} \equiv \tilde{Y}^{(d)} \tilde{M}
\end{aligned} \tag{2.429}$$

$$\tilde{E}_1(d) = Z_2 \tilde{H}_1(d) = Z_2 \tilde{Y}^{(d)} \tilde{M} \equiv \tilde{Q}^{(d)} \tilde{M} \tag{2.430}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}^{(d)} &= jY_1 \sin k_{z1}d - Y_{in}^{(+)} \cos k_{z1}d = \left(j \frac{Y_1}{Y_{in}^{(+)}} \sin k_{z1}d - \cos k_{z1}d \right) Y_{in}^{(+)} \\
&= \frac{-Y_2}{Y_2 \cos k_{z1}d + jY_1 \sin k_{z1}d} Y_{in}^{(+)} \\
&= \frac{-Y_2}{Y_2 \cos k_{z1}d + jY_1 \sin k_{z1}d} Y_1 \frac{Y_2 \cos k_{z1}d + jY_1 \sin k_{z1}d}{Y_1 \cos k_{z1}d + jY_2 \sin k_{z1}d} \\
&= \frac{-Y_1 Y_2}{Y_1 \cos k_{z1}d + jY_2 \sin k_{z1}d}
\end{aligned} \tag{2.431}$$

また、

$$\tilde{Q}^{(d)} = Z_2 \tilde{Y}^{(d)} = -\frac{Y_1}{Y_1 \cos k_{z1}d + jY_2 \sin k_{z1}d} = -\tilde{P}^{(-d)} \tag{2.432}$$

これより,

$$\tilde{Q}_{TE}^{(d)} = -\tilde{P}_{TE}^{(-d)} = -\frac{k_{z1}}{T_e} \quad (2.433)$$

$$\tilde{Q}_{TM}^{(d)} = -\tilde{P}_{TM}^{(-d)} = -\frac{k_{z2}\epsilon_r}{T_m} \quad (2.434)$$

よって, 電界型ダイアデミック・グリーン関数の各成分は,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{xx}^{EM} &= -\tilde{G}_{yy}^{EM} = \frac{k_x k_y}{k_t^2} \left(\tilde{Q}_{TE}^{(d)} - \tilde{Q}_{TM}^{(d)} \right) = \frac{k_x k_y}{k_t^2} \left(-\frac{k_{z1}}{T_e} + \frac{k_{z2}\epsilon_r}{T_m} \right) \\ &= -\frac{jk_x k_y (\epsilon_r - 1) \sin k_{z1} d}{T_e T_m} = -\tilde{G}_{xx}^{HJ} = \tilde{G}_{yy}^{HJ} \end{aligned} \quad (2.435)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{xy}^{EM} &= \frac{1}{k_t^2} \left(k_x^2 \tilde{Q}_{TM}^{(d)} + k_y^2 \tilde{Q}_{TE}^{(d)} \right) = -\frac{1}{k_t^2} \left(\frac{\epsilon_r k_x^2 k_{z2}}{T_m} + \frac{k_y^2 k_{z1}}{T_e} \right) \\ &= \frac{k_{z1}}{T_e} - \frac{jk_x^2 (\epsilon_r - 1) \sin k_{z1} d}{T_e T_m} = -\tilde{G}_{yx}^{HJ} \end{aligned} \quad (2.436)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{yx}^{EM} &= -\frac{1}{k_t^2} \left(k_y^2 \tilde{Q}_{TM}^{(d)} + k_x^2 \tilde{Q}_{TE}^{(d)} \right) = \frac{1}{k_t^2} \left(\frac{\epsilon_r k_y^2 k_{z2}}{T_m} + \frac{k_x^2 k_{z1}}{T_e} \right) \\ &= -\frac{k_{z1}}{T_e} + \frac{jk_y^2 (\epsilon_r - 1) \sin k_{z1} d}{T_e T_m} = -\tilde{G}_{xy}^{HJ} \end{aligned} \quad (2.437)$$

CHAPTER 3

周期境界条件とフロケモード展開

周期境界条件のもとで電磁界問題を解析するためのフロケモード展開という手法について詳述する。まず、四角配列と三角配列における電磁界の周期性を定式化し、*Floquet* の定理を用いて解をフーリエ級数展開することで、電磁界が離散的な波数を持つ「フロケモード」の重ね合わせとして表現されることを示す。さらに、これらのスカラーモードから *TE* 波と *TM* 波のベクトル・フロケモード関数を導出し、これらが伝搬モードとエバネッセントモードの両方を含む完全な基底として機能することを説明する。そして、このモード展開を用いれば、面電流・面磁流分布や散乱電磁界の表現式、そして周期グリーン関数をスペクトル領域で定義する方法が体系的に得られことを明らかにしていく。

3.1 四角配列の周期境界条件

x 方向の周期構造（周期 d_x ）に起因する電磁界の周期性を、位相を考慮して表すと、

$$f_x(x + d_x) = f_x(x)e^{j\Phi_x} \quad (3.1)$$

無限アレーにおいて共相励振した場合や、周波数選択膜に平面波を入射させた場合などがこれに対応する。いま、

$$g_x(x) \equiv f_x(x)e^{-j(\Phi_x/d_x)x} \quad (3.2)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} g_x(x + d_x) &= f_x(x + d_x)e^{-j(\Phi_x/d_x)(x+d_x)} = f_x(x)e^{j\Phi_x}e^{-j(\Phi_x/d_x)x}e^{-j\Phi_x} \\ &= f_x(x)e^{-j(\Phi_x/d_x)x} \\ &= g_x(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

より, $g_x(x)$ は周期 d_x の周期関数であることがわかる. よって, $g_x(x)$ をフーリエ級数で展開すると,

$$g_x(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j(2\pi m/d_x)x} \quad (3.4)$$

これより, $f_x(x)$ は,

$$f_x(x) = g_x(x) e^{j(\Phi_x/d_x)x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j\{(2\pi m + \Phi_x)/d_x\}x} \quad (3.5)$$

いま, $f_x(x)$ が

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_x^2 \right) f_x = 0 \quad (3.6)$$

を満たすとき, $e^{jk_x x}$ を解にもつことから, k_x は次のようになる.

$$k_x = \frac{2\pi m + \Phi_x}{d_x} \equiv k_{xm} \quad (3.7)$$

同様にして, y 方向の周期を d_y とすると,

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + k_y^2 \right) f_y = 0 \quad (3.8)$$

$$f_y(y + d_y) = f_y(y) e^{j\Phi_y} \quad (3.9)$$

より,

$$k_y = \frac{2\pi n + \Phi_y}{d_y} \equiv k_{yn} \quad (3.10)$$

ただし, m, n は整数である. したがって,

$$\left(\nabla^2 + k^2 \right) f = 0 \quad (3.11)$$

を周期境界条件

$$f(x + d_x, y, z) = f(x, y, z) e^{j\Phi_x} \quad (3.12)$$

$$f(x, y + d_y, z) = f(x, y, z) e^{j\Phi_y} \quad (3.13)$$

のもとで解くことができる. $f(x, y, z)$ が変数分離形で,

$$f(x, y, z) = f_x(x) f_y(y) f_z(z), \quad (3.14)$$

で表されるものとする,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_x^2 \right) f_x = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dy^2} + k_y^2 \right) f_y = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} + k_z^2 \right) f_z = 0 \quad (3.15)$$

ここで,

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (3.16)$$

周期境界条件より,

$$f_x(x + d_x) = f_x(x)e^{j\Phi_x} \quad (3.17)$$

$$f_y(y + d_y) = f_y(y)e^{j\Phi_y} \quad (3.18)$$

このとき, フロケの定理より, 解は次のようになる.

$$e^{jk_{xm}x} e^{jk_{yn}y} e^{\pm jk_{zmn}z} \quad (3.19)$$

ただし,

$$k_{xm} = \frac{2\pi m + \Phi_x}{d_x} \quad (3.20)$$

$$k_{yn} = \frac{2\pi n + \Phi_y}{d_y} \quad (3.21)$$

ここで,

$$k^2 = k_{xm}^2 + k_{yn}^2 + k_{zmn}^2 \quad (3.22)$$

また,

$$\mathbf{k}_{mn} = k_{xm}\mathbf{u}_x + k_{yn}\mathbf{u}_y + k_{zmn}\mathbf{u}_z \quad (3.23)$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z \quad (3.24)$$

3.2 三角配列の周期境界条件

三角配列 (skewed grid array) の周期を d_1, d_2 とし, d_1 を x 軸方向に沿う周期とする. 一方, 周期 d_2 の方向を x 軸から角度 α 傾けて定義すると, このとき, 周期境界条件は次のようになる.

$$f(\boldsymbol{\rho} + d_1\mathbf{u}_1) = f(\boldsymbol{\rho})e^{j\Phi_1} \quad (3.25)$$

$$f(\boldsymbol{\rho} + d_2\mathbf{u}_2) = f(\boldsymbol{\rho})e^{j\Phi_2} \quad (3.26)$$

ここで,

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y \quad (3.27)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_x \quad (3.28)$$

$$\mathbf{u}_2 = \cos \alpha \mathbf{u}_x + \sin \alpha \mathbf{u}_y \quad (3.29)$$

このとき,

$$\boldsymbol{\rho} + d_1 \mathbf{u}_1 = (x + d_1) \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y \quad (3.30)$$

$$\boldsymbol{\rho} + d_2 \mathbf{u}_2 = (x + d_2 \cos \alpha) \mathbf{u}_x + (y + d_2 \sin \alpha) \mathbf{u}_y \quad (3.31)$$

これより, 周期境界条件は,

$$f_x(x + d_1) = f_x(x) e^{j\Phi_1} \quad (3.32)$$

$$f_x(x + d_2 \cos \alpha) f_y(y + d_2 \sin \alpha) = f_x(x) f_y(y) e^{j\Phi_2} \quad (3.33)$$

式 (3.32) より k_x は,

$$k_x = \frac{2\pi m + \Phi_1}{d_1} \equiv k_{xm} \quad (m = \dots, -1, 0, 1, \dots) \quad (3.34)$$

また, 式 (3.33) より,

$$e^{jk_x(x+d_2 \cos \alpha)} e^{jk_y(y+d_2 \sin \alpha)} = e^{jk_x x} e^{jk_y y} e^{j\Phi_2} \quad (3.35)$$

上式の位相項は,

$$\begin{aligned} k_x(x + d_2 \cos \alpha) + k_y(y + d_2 \sin \alpha) &= k_x x + k_y y + \Phi_2 + 2\pi n \\ k_x d_2 \cos \alpha + k_y d_2 \sin \alpha &= \Phi_2 + 2\pi n \end{aligned} \quad (3.36)$$

よって,

$$k_y = \frac{\Phi_2 + 2\pi n - k_x d_2 \cos \alpha}{d_2 \sin \alpha} = \frac{\Phi_2 + 2\pi n - \frac{2\pi m + \Phi_1}{d_1} d_2 \cos \alpha}{d_2 \sin \alpha} \quad (3.37)$$

いま,

$$\Phi_y \equiv \Phi_2 - \frac{d_2}{d_1} \Phi_1 \cos \alpha \quad (3.38)$$

とおくと,

$$k_y = \frac{2\pi n + \Phi_y}{d_2 \sin \alpha} - \frac{2\pi m}{d_1} \cot \alpha \equiv k_{ymn} \quad (3.39)$$

x 方向の周期 d_x , y 方向の周期 d_y 等は,

$$\Phi_x \equiv \Phi_1 \quad (3.40)$$

$$d_x \equiv d_1 \quad (3.41)$$

$$d_y \equiv d_2 \sin \alpha \quad (3.42)$$

また,

$$\Phi_y \equiv \Phi_2 - \frac{d_y}{d_x} \Phi_1 \cot \alpha \quad (3.43)$$

したがって、周期境界条件 (3.26) のもとで、スカラヘルムホルツ方程式の周期解は、

$$e^{jk_{xm}x} e^{jk_{ymn}y} e^{\pm jk_{zmn}z} \quad (m, n = \dots, -1, 0, 1, \dots) \quad (3.44)$$

ここで、

$$k_{xm} = \frac{2\pi m + \Phi_x}{d_x} \quad (3.45)$$

$$k_{ymn} = \frac{2\pi n + \Phi_y}{d_y} - \frac{2\pi m}{d_x} \cot \alpha \quad (3.46)$$

$$k^2 = k_{xm}^2 + k_{ymn}^2 + k_{zmn}^2 \quad (3.47)$$

これを、Floquet's Harmonics という。

3.3 ベクトル・フロケモード関数

3.3.1 TE 波

ベクトルポテンシャル

$$\psi(\mathbf{r})\mathbf{u}_z = \Psi(x, y)Z(z)\mathbf{u}_z \quad (3.48)$$

が周期境界条件 (xy 面) を満たしているとき、 $\Psi(x, y)$ はスカラー・フロケモード Ψ_{mn} によって与えられ、次式を満足する。

$$\left(\nabla_t^2 + k_{tmn}^2\right)\Psi_{mn} = 0 \quad (3.49)$$

四角配列のとき、TE 波の Ψ_{mn}^f は、

$$\left(\nabla_t^2 + k_{tmn}^2\right)\Psi_{mn}^f = 0 \quad (3.50)$$

より、

$$\Psi_{mn}^f = A_{mn}^f e^{\mp j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{k}_{tmn} = k_{xm}\mathbf{u}_x + k_{yn}\mathbf{u}_y \quad (3.52)$$

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y \quad (3.53)$$

$$k_{xm} = \frac{2\pi m + \Phi_x}{d_x} \quad (3.54)$$

$$k_{yn} = \frac{2\pi n + \Phi_y}{d_y} \quad (3.55)$$

$$k^2 = k_{xm}^2 + k_{yn}^2 + k_{zmn}^2 \quad (3.56)$$

これより、TE 波のモード関数 $\mathbf{h}_{[mn]}$ は、

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{[mn]} &= -\nabla_t \Psi_{mn}^f = -A_{mn}^f \nabla_t e^{\mp j \mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} = -A_{mn}^f (\mp \mathbf{k}_{tmn}) e^{\mp j \mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \\ &\equiv \mathbf{k}_{tmn} A_{mn}^{f'} e^{\mp j \mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \equiv \mathbf{k}_{tmn} \Psi_{mn}^{f'} = k_{tmn} \mathbf{u}_{tmn} \Psi_{mn}^{f'}\end{aligned}\quad (3.57)$$

また、 $\mathbf{e}_{[mn]}$ は、

$$\mathbf{e}_{[mn]} = Z_{[mn]} \mathbf{h}_{[mn]} \times \mathbf{u}_z = k_{tmn} Z_{[mn]} \mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z \Psi_{mn}^{f'} \quad (3.58)$$

ここで、TE 波のインピーダンス $Z_{[mn]}$ は、

$$Z_{[mn]} = \frac{\omega \mu}{k_{zmn}} \quad (3.59)$$

これより、

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_{[mn]} \times \mathbf{h}_{[mn]}^*) \cdot \mathbf{u}_z &= k_{tmn}^2 Z_{[mn]} \left\{ (\mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z) \times \mathbf{u}_{tmn} \right\} \cdot \mathbf{u}_z \Psi_{mn}^{f'} \Psi_{mn}^{f'*} \\ &= k_{tmn}^2 Z_{[mn]} \left| \Psi_{mn}^{f'} \right|^2\end{aligned}\quad (3.60)$$

また、

$$\int_0^{d_y} \int_0^{d_x} \Psi_{mn}^{f'} \Psi_{m'n'}^{f'*} dx dy = \left| A_{mn}^{f'} \right|^2 d_x d_y \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (3.61)$$

よって、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{d_x d_y} \int_0^{d_y} \int_0^{d_x} (\mathbf{e}_{[mn]} \times \mathbf{h}_{[m'n']}^*) \cdot \mathbf{u}_z dx dy \\ &= \frac{k_{tmn} k_{tm'n'} Z_{[mn]}}{d_x d_y} \left\{ (\mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z) \times \mathbf{u}_{tmn} \right\} \cdot \mathbf{u}_z \cdot \int_0^{d_y} \int_0^{d_x} \Psi_{mn}^{f'} \Psi_{m'n'}^{f'*} dx dy \\ &= k_{tmn}^2 Z_{[mn]} \left| A_{mn}^{f'} \right|^2 \delta_{mm'} \delta_{nn'}\end{aligned}\quad (3.62)$$

いま、 $m = m'$, $n = n'$ が伝搬モードのとき、

$$\frac{1}{d_x d_y} \int_0^{d_y} \int_0^{d_x} (\mathbf{e}_{[mn]} \times \mathbf{h}_{[m'n']}^*) \cdot \mathbf{u}_z dx dy \equiv \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (3.63)$$

で規格化すると、係数 $A_{mn}^{f'}$ は、

$$A_{mn}^{f'} = \frac{1}{\left| k_{tmn} \right| \sqrt{Z_{[mn]}}} \quad (3.64)$$

エバネッセントモードに対しても同じ規格化係数を用いることにすると、

$$\mathbf{h}_{[mn]} = \frac{\mathbf{k}_{tmn}}{\left| k_{tmn} \right| \sqrt{Z_{[mn]}}} e^{\mp j \mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} = \sqrt{Y_{[mn]}} \mathbf{u}_{tmn} e^{\mp j \mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{e}_{[mn]} = Z_{[mn]} \mathbf{h}_{[mn]} \times \mathbf{u}_z = \sqrt{Z_{[mn]}} (\mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z) e^{\mp j \mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (3.66)$$

3.3.2 TM 波

同様にして, TM 波については,

$$\left(\nabla_t^2 + k_{tmn}^2\right)\Psi_{mn}^a = 0 \quad (3.67)$$

より,

$$\Psi_{mn}^a = A_{mn}^a e^{\mp j \mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (3.68)$$

TM 波のモード関数 $\mathbf{e}_{(mn)}$ は,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(mn)} &= -\nabla_t \Psi_{mn}^a = -A_{mn}^a \nabla_t e^{\mp j \mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} = -A_{mn}^a (\mp \mathbf{k}_{tmn}) e^{\mp j \mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \\ &\equiv \mathbf{k}_{tmn} A_{mn}^{a'} e^{\mp j \mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \equiv \mathbf{k}_{tmn} \Psi_{mn}^{a'} = k_{tmn} \mathbf{u}_{tmn} \Psi_{mn}^{a'} \end{aligned} \quad (3.69)$$

これより, $\mathbf{h}_{(mn)}$ は,

$$\mathbf{h}_{(mn)} = -Y_{(mn)} \mathbf{e}_{(mn)} \times \mathbf{u}_z = -k_{tmn} Y_{(mn)} \mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z \Psi_{mn}^{a'} \quad (3.70)$$

ここで, TM 波のアドミタンス $Y_{(mn)}$ は,

$$Y_{(mn)} = \frac{\omega \epsilon}{k_{zmn}} \quad (3.71)$$

これより,

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{e}_{(mn)} \times \mathbf{h}_{(mn)}^*\right) \cdot \mathbf{u}_z &= -k_{tmn}^2 Y_{(mn)}^* \left\{ \left(\mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z\right) \times \mathbf{u}_{tmn} \right\} \cdot \mathbf{u}_z \Psi_{mn}^{a'} \Psi_{mn}^{a'*} \\ &= k_{tmn}^2 Y_{(mn)}^* \left| \Psi_{mn}^{a'} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.72)$$

また,

$$\int_0^{d_y} \int_0^{d_x} \Psi_{mn}^{a'} \Psi_{m'n'}^{a'*} dx dy = \left| A_{mn}^{a'} \right|^2 d_x d_y \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (3.73)$$

よって,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{d_x d_y} \int_0^{d_y} \int_0^{d_x} \left(\mathbf{e}_{(mn)} \times \mathbf{h}_{(m'n')}^*\right) \cdot \mathbf{u}_z dx dy \\ &= -\frac{k_{tmn} k_{tm'n'} Y_{(mn)}^*}{d_x d_y} \left\{ \left(\mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z\right) \times \mathbf{u}_{tmn} \right\} \cdot \mathbf{u}_z \cdot \int_0^{d_y} \int_0^{d_x} \Psi_{mn}^{a'} \Psi_{m'n'}^{a'*} dx dy \\ &= k_{tmn}^2 Y_{(mn)}^* \left| A_{mn}^{a'} \right|^2 \delta_{mm'} \delta_{nn'} \end{aligned} \quad (3.74)$$

同様に, $m = m', n = n'$ が伝搬モードのとき,

$$\frac{1}{d_x d_y} \int_0^{d_y} \int_0^{d_x} \left(\mathbf{e}_{(mn)} \times \mathbf{h}_{(m'n')}^*\right) \cdot \mathbf{u}_z dx dy \equiv \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (3.75)$$

係数 $A_{mn}^{a'}$ は,

$$A_{mn}^{a'} = \frac{1}{|k_{tmn}| \sqrt{Y_{(mn)}}} \quad (3.76)$$

したがって,

$$\mathbf{e}_{(mn)} = \frac{\mathbf{k}_{tmn}}{|k_{tmn}| \sqrt{Y_{(mn)}}} e^{\mp j \mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} = \sqrt{Z_{(mn)}} \mathbf{u}_{tmn} e^{\mp j \mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{h}_{(mn)} = -Y_{(mn)} \mathbf{e}_{(mn)} \times \mathbf{u}_z = -\sqrt{Y_{(mn)}} (\mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z) e^{\mp j \mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (3.78)$$

3.4 フロケモード展開

3.4.1 接線電磁界のフロケモードによる展開

ベクトル・フロケモード関数を用いて接線電磁界を次のように展開する.

$$\mathbf{E}_{\text{tan}} = \sum_{m,n} \left\{ \bar{V}_{[mn]}(z) \mathbf{e}_{[mn]} + \bar{V}_{(mn)}(z) \mathbf{e}_{(mn)} \right\} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{H}_{\text{tan}} = \sum_{m,n} \left\{ \bar{I}_{[mn]}(z) \mathbf{h}_{[mn]} + \bar{I}_{(mn)}(z) \mathbf{h}_{(mn)} \right\} \quad (3.80)$$

ここで,

$$\bar{V}_{[mn]}(z) = \bar{V}_{[mn]}^+ e^{-jk_{zmn}z} + \bar{V}_{[mn]}^- e^{jk_{zmn}z} \quad (3.81)$$

$$\bar{V}_{(mn)}(z) = \bar{V}_{(mn)}^+ e^{-jk_{zmn}z} + \bar{V}_{(mn)}^- e^{jk_{zmn}z} \quad (3.82)$$

$$\bar{I}_{[mn]}(z) = \bar{V}_{[mn]}^+ e^{-jk_{zmn}z} - \bar{V}_{[mn]}^- e^{jk_{zmn}z} \quad (3.83)$$

$$\bar{I}_{(mn)}(z) = \bar{V}_{(mn)}^+ e^{-jk_{zmn}z} - \bar{V}_{(mn)}^- e^{jk_{zmn}z} \quad (3.84)$$

いま,

$$\bar{V}_{[mn]}^{\pm} \equiv \sqrt{Y_{[mn]}} V_{[mn]}^{\pm} \quad (3.85)$$

$$\bar{V}_{(mn)}^{\pm} \equiv \sqrt{Y_{(mn)}} V_{(mn)}^{\pm} \quad (3.86)$$

$$\bar{I}_{[mn]}^{\pm} \equiv \sqrt{Z_{[mn]}} I_{[mn]}^{\pm} \quad (3.87)$$

$$\bar{I}_{(mn)}^{\pm} \equiv \sqrt{Z_{(mn)}} I_{(mn)}^{\pm} \quad (3.88)$$

とおくと,

$$\bar{V}_{[mn]}(z) = \sqrt{Y_{[mn]}} \left(V_{[mn]}^+ e^{-jk_{zmn}z} + V_{[mn]}^- e^{jk_{zmn}z} \right) \equiv \sqrt{Y_{[mn]}} V_{[mn]}(z) \quad (3.89)$$

$$\bar{V}_{(mn)}(z) = \sqrt{Y_{(mn)}} \left(V_{(mn)}^+ e^{-jk_{zmn}z} + V_{(mn)}^- e^{jk_{zmn}z} \right) \equiv \sqrt{Y_{(mn)}} V_{(mn)}(z) \quad (3.90)$$

$$\bar{I}_{[mn]}(z) = \sqrt{Y_{[mn]}} \left(V_{[mn]}^+ e^{-jk_{zmn}z} - V_{[mn]}^- e^{jk_{zmn}z} \right) \equiv \sqrt{Z_{[mn]}} I_{[mn]}(z) \quad (3.91)$$

$$\bar{I}_{(mn)}(z) = \sqrt{Y_{(mn)}} \left(V_{(mn)}^+ e^{-jk_{zmn}z} - V_{(mn)}^- e^{jk_{zmn}z} \right) \equiv \sqrt{Z_{(mn)}} I_{(mn)}(z) \quad (3.92)$$

ここで,

$$I_{[mn]}(z) = Y_{[mn]} \left(V_{[mn]}^+ e^{-jk_{zmn}z} - V_{[mn]}^- e^{jk_{zmn}z} \right) \quad (3.93)$$

$$I_{(mn)}(z) = Y_{(mn)} \left(V_{(mn)}^+ e^{-jk_{zmn}z} - V_{(mn)}^- e^{jk_{zmn}z} \right) \quad (3.94)$$

よって,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tan}} &= \sum_{m,n} \left\{ \sqrt{Y_{[mn]}} V_{[mn]}(z) \mathbf{e}_{[mn]} + \sqrt{Y_{(mn)}} V_{(mn)}(z) \mathbf{e}_{(mn)} \right\} \\ &= \sum_{m,n} \left\{ V_{[mn]} (\mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z) + V_{(mn)} \mathbf{u}_{tmn} \right\} e^{jk_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{tan}} &= \sum_{m,n} \left\{ \sqrt{Z_{[mn]}} I_{[mn]}(z) \mathbf{h}_{[mn]} + \sqrt{Z_{(mn)}} I_{(mn)}(z) \mathbf{h}_{(mn)} \right\} \\ &= \sum_{m,n} \left\{ I_{[mn]} \mathbf{u}_{tmn} - I_{(mn)} (\mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z) \right\} e^{jk_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \end{aligned} \quad (3.96)$$

3.4.2 面電磁流分布のフロケモードによる展開

入射波の波数の x 成分および y 成分を $k_x^{\text{inc}}, k_y^{\text{inc}}$ とおき, 周期境界条件を満足するよう面電流分布 $\mathbf{J}_s$ をフロケモードで展開すると,

$$\mathbf{J}_s(x', y') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_{mn} e^{j(k_{xmn}x' + k_{ymn}y')} \quad (3.97)$$

ただし,

$$k_{xmn} = \frac{2\pi m}{d_x} + k_x^{\text{inc}} \quad (3.98)$$

$$k_{ymn} = \frac{2\pi n}{d_y} - \frac{2\pi m}{d_x} \cot \alpha + k_y^{\text{inc}} \quad (3.99)$$

これより, 係数 $\mathbf{c}_{mn}$ は,

$$\mathbf{c}_{mn} = \frac{1}{d_x d_y} \iint_S \mathbf{J}_s(x', y') e^{-j(k_{xmn}x' + k_{ymn}y')} dx' dy' \quad (3.100)$$

ここで,

$$\tilde{\mathbf{J}}_s(k_{xmn}, k_{ymn}) \equiv \iint_S \mathbf{J}_s(x', y') e^{-j(k_{xmn}x' + k_{ymn}y')} dx' dy' \quad (3.101)$$

とおく. これより,

$$\mathbf{c}_{mn} = \frac{1}{d_x d_y} \tilde{\mathbf{J}}_s(k_{xmn}, k_{ymn}) \quad (3.102)$$

したがって,

$$\mathbf{J}_s(x', y') = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{J}}_s(k_{xmn}, k_{ymn}) e^{j(k_{xmn}x' + k_{ymn}y')} \quad (3.103)$$

同様にして, 面磁流分布 $\mathbf{M}_s$ をフロケモードで展開すると,

$$\mathbf{M}_s(x', y') = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{M}}_s(k_{xmn}, k_{ymn}) e^{j(k_{xmn}x' + k_{ymn}y')} \quad (3.104)$$

3.4.3 散乱電磁界の表示式

面電流源によるスペクトル領域散乱電界 $\tilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}}$ は,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}}(k_x, k_y, z) & \stackrel{\cong}{=} \bar{\mathbf{G}}_T^{EJ}(k_x, k_y, z - z') \cdot \tilde{\mathbf{J}}_s(k_x, k_y, z') \\ & = \left(\iint_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{G}}_T^{EJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-j(k_x \bar{x} + k_y \bar{y})} d\bar{x} d\bar{y} \right) \cdot \left(\iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') e^{-j(k_x x' + k_y y')} dx' dy' \right) \\ & = \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{G}}_T^{EJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') e^{-j\{k_x(\bar{x}+x') + k_y(\bar{y}+y')\}} dx' dy' d\bar{x} d\bar{y} \end{aligned} \quad (3.105)$$

ここで, $\bar{x} = x - x'$, $\bar{y} = y - y'$ とおくと, $d\bar{x} = dx$, $d\bar{y} = dy$ より,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}}(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\iint_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{G}}_T^{EJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dx' dy' \right) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (3.106)$$

これより, $\mathbf{E}_{\text{tan}}(\mathbf{r})$ は,

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}(\mathbf{r}) = \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{G}}_T^{EJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dx' dy' \quad (3.107)$$

フロケモードで展開した電流分布を代入して,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tan}} & = \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{G}}_T^{EJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\mathbf{J}}_s(k_{xmn}, k_{ymn})}{d_x d_y} e^{j(k_{xmn}x' + k_{ymn}y')} dx' dy' \\ & = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\iint_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{G}}_T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{j(k_{xmn}x' + k_{ymn}y')} dx' dy' \right) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_s(k_{xmn}, k_{ymn}) \end{aligned} \quad (3.108)$$

ここで, $x' = x - \bar{x}$, $y' = y - \bar{y}$, $dx' = d\bar{x}$, $dy' = d\bar{y}$ より,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tan}}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-j(k_{xmn}\bar{x} + k_{ymn}\bar{y})} d\bar{x} d\bar{y} \right) \\ & \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(k_{xmn}, k_{ymn}) e^{j(k_{xmn}x + k_{ymn}y)} \end{aligned} \quad (3.109)$$

スペクトル領域のグリーン関数 $\widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ}(k_{xmn}, k_{ymn})$ より,

$$\mathbf{E}_{\text{tan}} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ}(k_{xmn}, k_{ymn}) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(k_{xmn}, k_{ymn}) e^{j(k_{xmn}x + k_{ymn}y)} \quad (3.110)$$

ここで,

$$\widetilde{\mathbf{J}}_s(k_{xmn}, k_{ymn}) = \iint_S \mathbf{J}_s(x', y') e^{-j(k_{xmn}x' + k_{ymn}y')} dx' dy' \quad (3.111)$$

ただし,

$$k_{xmn} = \frac{2\pi m}{d_x} + k_x^{\text{inc}} \quad (3.112)$$

$$k_{ymn} = \frac{2\pi n}{d_y} - \frac{2\pi m}{d_x} \cot \alpha + k_y^{\text{inc}} \quad (3.113)$$

同様にして, 散乱磁界 $\mathbf{H}_{\text{tan}}(\mathbf{r})$ は,

$$\mathbf{H}_{\text{tan}} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{HJ}(k_{xmn}, k_{ymn}) \widetilde{\mathbf{J}}_s(k_{xmn}, k_{ymn}) e^{j(k_{xmn}x + k_{ymn}y)} \quad (3.114)$$

また, 面磁流源によるスペクトル領域の散乱電磁界は,

$$\mathbf{H}_{\text{tan}}^f = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{HM}(k_{xmn}, k_{ymn}) \widetilde{\mathbf{M}}_s(k_{xmn}, k_{ymn}) e^{j(k_{xmn}x + k_{ymn}y)} \quad (3.115)$$

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}^f = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EM}(k_{xmn}, k_{ymn}) \widetilde{\mathbf{M}}_s(k_{xmn}, k_{ymn}) e^{j(k_{xmn}x + k_{ymn}y)} \quad (3.116)$$

3.5 周期グリーン関数

電磁流分布をデルタ関数 $\delta(x - x', y - y')$ におくと, 周期境界条件を満たしたグリーン関数が得られる. デルタ関数のフーリエ変換は,

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x', y - y') e^{-j(k_{xmn}x + k_{ymn}y)} dx dy = e^{-j(k_{xmn}x' + k_{ymn}y')} \quad (3.117)$$

まず, x 方向の微小電流源について考えると,

$$\begin{aligned}
& G_{xx}^p \mathbf{u}_x + G_{yx}^p \mathbf{u}_y \\
&= \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T(k_{xmn}, k_{ymn}) \cdot e^{-j(k_{xmn}x' + k_{ymn}y')} \mathbf{u}_x e^{j(k_{xmn}x + k_{ymn}y)} \\
&= \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\widetilde{G}_{xx}^{mn} \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{yx}^{mn} \mathbf{u}_y \right) e^{j\{k_{xmn}(x-x') + k_{ymn}(y-y')\}} \quad (3.118)
\end{aligned}$$

同様にして, y 方向の微小電流源については,

$$\begin{aligned}
& G_{xy}^p \mathbf{u}_x + G_{yy}^p \mathbf{u}_y \\
&= \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\widetilde{G}_{xy}^{mn} \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{yy}^{mn} \mathbf{u}_y \right) e^{j\{k_{xmn}(x-x') + k_{ymn}(y-y')\}} \quad (3.119)
\end{aligned}$$

したがって, 周期境界条件を満たすダイアディック・グリーン関数 $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_p$ は,

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\mathbf{G}}}_p &= G_{xx}^p \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + G_{yx}^p \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + G_{xy}^p \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + G_{yy}^p \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y \\
&= \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T(k_{xmn}, k_{ymn}) e^{j\{k_{xmn}(x-x') + k_{ymn}(y-y')\}} \quad (3.120)
\end{aligned}$$

ただし,

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T(k_{xmn}, k_{ymn}) = \widetilde{G}_{xx}^{mn} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{yx}^{mn} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{xy}^{mn} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \widetilde{G}_{yy}^{mn} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y \quad (3.121)$$

これより, 散乱波の接線電磁界は, 単位セル内の電磁流源を用いて次のように表される.

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_p^{EJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \quad (3.122)$$

$$\mathbf{H}_t(\mathbf{r}) = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_p^{HJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \quad (3.123)$$

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_p^{EM}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) \quad (3.124)$$

$$\mathbf{H}_t(\mathbf{r}) = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_p^{HM}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) \quad (3.125)$$

CHAPTER 4

スペクトル領域MoMとFSSの解析

周期的な電磁構造を解析するための方法として、周期境界条件を用いたスペクトル領域モーメント法 (*Method of Moments in the Spectral Domain with Periodic Boundary Conditions*) について詳述する。まず、自立型周波数選択面 (*FSS*) の散乱電界を導出し、次に、導体パッチアレーの電流分布を基底関数で展開し、境界条件を適用して連立方程式を導く。さらに、マイクロストリップ・リフレクト無限アレーや誘電体基板中に装荷した *FSS* の解析、反射係数および透過係数の計算法を示し、最後に *Roof-top* 型部分領域基底関数を用いた高速化アルゴリズム、およびスロット結合パッチアレー *FSS* のガラーキン法による解析を詳細に説明する。

4.1 自立型FSS (Frequency Selective Surface)

4.1.1 導体パッチアレーによる散乱電界

導体パッチアレー上の電流分布による散乱電界（接線成分） $\mathbf{E}_{s,\tan}$ は、

$$\mathbf{E}_{s,\tan}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_{tmn}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.1)$$

ここで、

$$\mathbf{k}_{tmn} = k_{xmn}\mathbf{u}_x + k_{ymn}\mathbf{u}_y \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y \quad (4.3)$$

スペクトル領域のグリーン関数 $\widetilde{\mathbf{G}}_T^{\cong EJ}$ は,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{G}}_T^{\cong EJ}(\mathbf{k}_{tmn}) &= \widetilde{G}_{xx}^{EJ}(\mathbf{k}_{tmn})\mathbf{u}_x\mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{xy}^{EJ}(\mathbf{k}_{tmn})\mathbf{u}_x\mathbf{u}_y \\ &\quad + \widetilde{G}_{yx}^{EJ}(\mathbf{k}_{tmn})\mathbf{u}_y\mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{yy}^{EJ}(\mathbf{k}_{tmn})\mathbf{u}_y\mathbf{u}_y \\ &\equiv \widetilde{G}_{xx}^{mn}\mathbf{u}_x\mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{xy}^{mn}\mathbf{u}_x\mathbf{u}_y + \widetilde{G}_{yx}^{mn}\mathbf{u}_y\mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{yy}^{mn}\mathbf{u}_y\mathbf{u}_y\end{aligned}\tag{4.4}$$

$$(4.5)$$

また, スペクトル領域の電流 $\widetilde{\mathbf{J}}_s$ は,

$$\widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_{tmn}) = \int_S \mathbf{J}_s(\boldsymbol{\rho}') e^{-j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}'} dS' \equiv \widetilde{J}_x^{mn}\mathbf{u}_x + \widetilde{J}_y^{mn}\mathbf{u}_y\tag{4.6}$$

4.1.2 導体パッチアレーを誘電体で支持しない FSS

素子を誘電体で支持しない場合, 次の自由空間のグリーン関数を用いればよい.

$$\widetilde{G}_{xx}^{EJ}(\mathbf{k}_{tmn}) = -\frac{\omega\mu}{k^2} \frac{1}{2k_{zmn}} (k^2 - k_{xmn}^2)\tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_{xy}^{EJ}(\mathbf{k}_{tmn}) &= \widetilde{G}_{yx}^{EJ}(\mathbf{k}_{tmn}) \\ &= \frac{\omega\mu}{k^2} \frac{1}{2k_{zmn}} k_{xmn}k_{ymn}\end{aligned}\tag{4.8}$$

$$\widetilde{G}_{yy}^{EJ}(\mathbf{k}_{tmn}) = -\frac{\omega\mu}{k^2} \frac{1}{2k_{zmn}} (k^2 - k_{ymn}^2)\tag{4.9}$$

導体素子上の境界条件より,

$$\mathbf{E}_{i,\tan} + \mathbf{E}_{s,\tan} = Z_s \mathbf{J}_s \quad (\text{on } S)\tag{4.10}$$

よって,

$$-\mathbf{E}_{i,\tan}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\mathbf{G}}_T^{\cong EJ}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_{tmn}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} - Z_s \mathbf{J}_s(\boldsymbol{\rho})\tag{4.11}$$

成分を行列表示すると,

$$-\begin{pmatrix} E_{i,x}(\boldsymbol{\rho}) \\ E_{i,y}(\boldsymbol{\rho}) \end{pmatrix} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \begin{pmatrix} \widetilde{G}_{xx}^{mn} & \widetilde{G}_{xy}^{mn} \\ \widetilde{G}_{yx}^{mn} & \widetilde{G}_{yy}^{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{J}_x^{mn} \\ \widetilde{J}_y^{mn} \end{pmatrix} e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} - Z_s \begin{pmatrix} J_x(\boldsymbol{\rho}) \\ J_y(\boldsymbol{\rho}) \end{pmatrix}\tag{4.12}$$

いま, 電流分布 $\mathbf{J}_s(\boldsymbol{\rho})$ を, 基底関数 $B_{xpq}(\boldsymbol{\rho})$, $B_{ypq}(\boldsymbol{\rho})$ を用いて,

$$\mathbf{J}_s(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{p,q} \left(I_{xpq} B_{xpq}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_x + I_{ypq} B_{ypq}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_y \right)\tag{4.13}$$

で展開すると、スペクトル領域の $\tilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_{tmn})$ は、

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_{tmn}) &= \sum_{p,q} \left(I_{xpq} \tilde{B}_{xpq}(\mathbf{k}_{tmn}) \mathbf{u}_x + I_{ypq} \tilde{B}_{ypq}(\mathbf{k}_{tmn}) \mathbf{u}_y \right) \\ &\equiv \sum_{p,q} \left(I_{xpq} \tilde{B}_{xpq}^{mn} \mathbf{u}_x + I_{ypq} \tilde{B}_{ypq}^{mn} \mathbf{u}_y \right)\end{aligned}\quad (4.14)$$

ここで、スペクトル領域の基底関数は、フロケモードの次数 m, n に対応して次のようになる。

$$\tilde{B}_{(x/y)pq}(\mathbf{k}_{tmn}) = \int_S B_{(x/y)pq}(\boldsymbol{\rho}') e^{-j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}'} dS' \equiv \tilde{B}_{(x/y)pq}^{mn} \quad (4.15)$$

これより、散乱電界 $\mathbf{E}_{s,\text{tan}}(\boldsymbol{\rho})$ は、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{s,\text{tan}} &= \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \left(\tilde{G}_{xx}^{mn} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{xy}^{mn} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \tilde{G}_{yx}^{mn} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{yy}^{mn} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y \right) \\ &\quad \cdot \sum_{p,q} \left(I_{xpq} \tilde{B}_{xpq}^{mn} \mathbf{u}_x + I_{ypq} \tilde{B}_{ypq}^{mn} \mathbf{u}_y \right) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \\ &= \frac{1}{d_x d_y} \left[\sum_{p,q} I_{xpq} \left\{ \sum_{m,n} \left(\tilde{G}_{xx}^{mn} \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{yx}^{mn} \mathbf{u}_y \right) \tilde{B}_{xpq}^{mn} e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p,q} I_{ypq} \left\{ \sum_{m,n} \left(\tilde{G}_{xy}^{mn} \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{yy}^{mn} \mathbf{u}_y \right) \tilde{B}_{ypq}^{mn} e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right\} \right]\end{aligned}\quad (4.16)$$

よって、

$$\begin{aligned}-\mathbf{E}_{i,\text{tan}} &= \frac{1}{d_x d_y} \left[\sum_{p,q} I_{xpq} \left\{ \sum_{m,n} \left(\tilde{G}_{xx}^{mn} \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{yx}^{mn} \mathbf{u}_y \right) \tilde{B}_{xpq}^{mn} e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p,q} I_{ypq} \left\{ \sum_{m,n} \left(\tilde{G}_{xy}^{mn} \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{yy}^{mn} \mathbf{u}_y \right) \tilde{B}_{ypq}^{mn} e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right\} \right] \\ &\quad - Z_s \sum_{p,q} \left(I_{xpq} B_{xpq}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_x + I_{ypq} B_{ypq}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_y \right)\end{aligned}\quad (4.17)$$

成分表示すると、

$$\begin{aligned}-E_{i,x} &= \frac{1}{d_x d_y} \sum_{p,q} I_{xpq} \sum_{m,n} \tilde{G}_{xx}^{mn} \tilde{B}_{xpq}^{mn} e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \\ &\quad + \frac{1}{d_x d_y} \sum_{p,q} I_{ypq} \sum_{m,n} \tilde{G}_{xy}^{mn} \tilde{B}_{ypq}^{mn} e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} - Z_s \sum_{p,q} I_{xpq} B_{xpq}(\boldsymbol{\rho})\end{aligned}\quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}-E_{i,y} &= \frac{1}{d_x d_y} \sum_{p,q} I_{xpq} \sum_{m,n} \tilde{G}_{yx}^{mn} \tilde{B}_{xpq}^{mn} e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \\ &\quad + \frac{1}{d_x d_y} \sum_{p,q} I_{ypq} \sum_{m,n} \tilde{G}_{yy}^{mn} \tilde{B}_{ypq}^{mn} e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} - Z_s \sum_{p,q} I_{ypq} B_{ypq}(\boldsymbol{\rho})\end{aligned}\quad (4.19)$$

両辺に試行関数 $T_{xkl}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{u}_x$ の複素共役 $T_{xkl}^*(\boldsymbol{\rho})\mathbf{u}_x$ でスカラー積をとって積分すると,

$$\begin{aligned}
& - \int_S T_{xkl}^* \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{E}_{i,\tan} dS = - \int_S T_{xkl}^* E_{i,x} dS \\
& = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{p,q} I_{xpq} \sum_{m,n} \tilde{G}_{xx}^{mn} \tilde{B}_{xpq}^{mn} \int_S T_{xkl}^* e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \\
& + \frac{1}{d_x d_y} \sum_{p,q} I_{ypq} \sum_{m,n} \tilde{G}_{xy}^{mn} \tilde{B}_{ypq}^{mn} \int_S T_{xkl}^* e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS - Z_s \sum_{p,q} I_{xpq} \int_S T_{xkl}^* B_{xpq} dS \quad (4.20)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\tilde{T}_{xkl}(\mathbf{k}_{tmn}) \equiv \int_S T_{xkl}(\boldsymbol{\rho}) e^{-j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \equiv \tilde{T}_{xkl}^{mn} \quad (4.21)$$

$$\tilde{T}_{ykl}(\mathbf{k}_{tmn}) \equiv \int_S T_{ykl}(\boldsymbol{\rho}) e^{-j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \equiv \tilde{T}_{ykl}^{mn} \quad (4.22)$$

とおくと,

$$\tilde{T}_{xkl}^{mn*} = \int_S T_{xkl}^*(\boldsymbol{\rho}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \quad (4.23)$$

$$\tilde{T}_{ykl}^{mn*} = \int_S T_{ykl}^*(\boldsymbol{\rho}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \quad (4.24)$$

これより,

$$\begin{aligned}
- \int_S T_{xkl}^* E_{i,x} dS & = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{p,q} I_{xpq} \sum_{m,n} \tilde{T}_{xkl}^{mn*} \tilde{G}_{xx}^{mn} \tilde{B}_{xpq}^{mn} \\
& + \frac{1}{d_x d_y} \sum_{p,q} I_{ypq} \sum_{m,n} \tilde{T}_{xkl}^{mn*} \tilde{G}_{xy}^{mn} \tilde{B}_{ypq}^{mn} - Z_s \sum_{p,q} I_{xpq} \int_S T_{xkl}^* B_{xpq} dS \quad (4.25)
\end{aligned}$$

同様にして, 両辺に試行関数 $T_{ykl}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{u}_y$ の複素共役 $T_{ykl}^*(\boldsymbol{\rho})\mathbf{u}_y$ でスカラー積をとって積分すると (導出省略),

$$\begin{aligned}
- \int_S T_{ykl}^* E_{i,y} dS & = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{p,q} I_{xpq} \sum_{m,n} \tilde{T}_{ykl}^{mn*} \tilde{G}_{yx}^{mn} \tilde{B}_{xpq}^{mn} \\
& + \frac{1}{d_x d_y} \sum_{p,q} I_{ypq} \sum_{m,n} \tilde{T}_{ykl}^{mn*} \tilde{G}_{yy}^{mn} \tilde{B}_{ypq}^{mn} - Z_s \sum_{p,q} I_{ypq} \int_S T_{ykl}^* B_{ypq} dS \quad (4.26)
\end{aligned}$$

行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} Z_{xx} \\ Z_{yx} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z_{xy} \\ Z_{yy} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_x \\ \mathbf{I}_y \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

ただし、行列 $\begin{bmatrix} Z_{xx} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} Z_{xy} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} Z_{yx} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} Z_{yy} \end{bmatrix}$ の各々の要素 $z_{kl,pq}^{xx}$, $z_{kl,pq}^{xy}$, $z_{kl,pq}^{yx}$, $z_{kl,pq}^{yy}$ は、次のようになる。

$$z_{kl,pq}^{xx} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{T}_{xkl}^{mn*} \tilde{G}_{xx}^{mn} \tilde{B}_{xpq}^{mn} - Z_s \int_S T_{xkl}^* B_{xpq} dS \quad (4.28)$$

$$z_{kl,pq}^{xy} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{T}_{xkl}^{mn*} \tilde{G}_{xy}^{mn} \tilde{B}_{ypq}^{mn} \quad (4.29)$$

$$z_{kl,pq}^{yx} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{T}_{ykl}^{mn*} \tilde{G}_{yx}^{mn} \tilde{B}_{xpq}^{mn} \quad (4.30)$$

$$z_{kl,pq}^{yy} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{T}_{ykl}^{mn*} \tilde{G}_{yy}^{mn} \tilde{B}_{ypq}^{mn} - Z_s \int_S T_{ykl}^* B_{ypq} dS \quad (4.31)$$

また、列ベクトル $\mathbf{V}_x$, $\mathbf{V}_y$ の各々の要素 v_{xkl} , v_{ykl} は、

$$v_{xkl} = - \int_S T_{xkl}^* E_{i,x} dS \quad (4.32)$$

$$v_{ykl} = - \int_S T_{ykl}^* E_{i,y} dS \quad (4.33)$$

いま、入射電界 $\mathbf{E}_{i,\tan}$ を

$$\mathbf{E}_{i,\tan} \Big|_S = E_{i,x}(x,y) \mathbf{u}_x + E_{i,y}(x,y) \mathbf{u}_y = (V_{1x}^+ \mathbf{u}_x + V_{1y}^+ \mathbf{u}_y) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.34)$$

とおくと、

$$v_{(x)ykl} = - \int_S T_{(x)ykl}^* E_{i,(x)y} dS = -V_{1(y)}^+ \int_S T_{(x)ykl}^* e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \quad (4.35)$$

ここで、

$$\tilde{T}_{(x)ykl} \equiv \int_S T_{(x)ykl} e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \quad (4.36)$$

とおくと、

$$v_{xkl} = -V_{1x}^+ \tilde{T}_{xkl}^* \quad (4.37)$$

$$v_{ykl} = -V_{1y}^+ \tilde{T}_{ykl}^* \quad (4.38)$$

行列表示して、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{xkl} \\ v_{ykl} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \tilde{T}_{xkl}^* & 0 \\ 0 & \tilde{T}_{ykl}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1x}^+ \\ V_{1y}^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \tilde{T}_{xkl}^* & 0 \\ 0 & \tilde{T}_{ykl}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \phi_i & \cos \phi_i \\ -\cos \phi_i & \sin \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \tilde{T}_{xkl}^* \sin \phi_i & \tilde{T}_{xkl}^* \cos \phi_i \\ -\tilde{T}_{ykl}^* \cos \phi_i & \tilde{T}_{ykl}^* \sin \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \equiv - \begin{pmatrix} \tilde{T}_{xu,kl}^* & \tilde{T}_{xt,kl}^* \\ \tilde{T}_{yu,kl}^* & \tilde{T}_{yt,kl}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.39)$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_{xu,kl}^* & \tilde{T}_{xt,kl}^* \\ \tilde{T}_{yu,kl}^* & \tilde{T}_{yt,kl}^* \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{T}_{xkl}^* \sin \phi_i & \tilde{T}_{xkl}^* \cos \phi_i \\ -\tilde{T}_{ykl}^* \cos \phi_i & \tilde{T}_{ykl}^* \sin \phi_i \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

これより, 列ベクトル $\mathbf{V}_x$, $\mathbf{V}_y$ は,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [\tilde{T}_x^*]^t & 0 \\ 0 & [\tilde{T}_y^*]^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1x}^+ \\ V_{1y}^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [\tilde{T}_{xu}^*]^t & [\tilde{T}_{xt}^*]^t \\ [\tilde{T}_{yu}^*]^t & [\tilde{T}_{yt}^*]^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

ただし, 列ベクトル $[\tilde{T}_x^*]^t$, $[\tilde{T}_y^*]^t$ の各々の要素は $\tilde{T}_{xkl}^*$, $\tilde{T}_{ykl}^*$, 列ベクトル $[\tilde{T}_{xu}^*]^t$, $[\tilde{T}_{xt}^*]^t$, $[\tilde{T}_{yu}^*]^t$, $[\tilde{T}_{yt}^*]^t$ の各々の要素は $\tilde{T}_{xu,kl}^*$, $\tilde{T}_{xt,kl}^*$, $\tilde{T}_{yu,kl}^*$, $\tilde{T}_{yt,kl}^*$ である.

4.2 マイクロストリップ・リフレクト無限アレー

地導体のある誘電体基板で支持するマイクロストリップパッチの無限アレーでは, グリーン関数は次式で与えられる.

$$\tilde{G}_{xx}^{EJ} = \frac{-jZ_0}{k_0} \frac{k_{zmn}^{(air)}(\epsilon_r k_0^2 - k_{xmn}^2) \cos k_{zmn}d + jk_{zmn}(k_0^2 - k_{xmn}^2) \sin k_{zmn}d}{T_e^{(mn)} T_m^{(mn)}} \sin k_{zmn}d \quad (4.42)$$

$$\tilde{G}_{xy}^{EJ} = \tilde{G}_{yx}^{EJ} = \frac{jZ_0}{k_0} \cdot \frac{k_{xmn}k_{ymn} \left(k_{zmn}^{(air)} \cos k_{zmn}d + jk_{zmn} \sin k_{zmn}d \right)}{T_e^{(mn)} T_m^{(mn)}} \sin k_{zmn}d \quad (4.43)$$

$$\tilde{G}_{yy}^{EJ} = \frac{-jZ_0}{k_0} \frac{k_{zmn}^{(air)}(\epsilon_r k_0^2 - k_{ymn}^2) \cos k_{zmn}d + jk_{zmn}(k_0^2 - k_{ymn}^2) \sin k_{zmn}d}{T_e^{(mn)} T_m^{(mn)}} \sin k_{zmn}d \quad (4.44)$$

ここで,

$$T_e^{(mn)} = k_{zmn} \cos k_{zmn}d + jk_{zmn}^{(air)} \sin k_{zmn}d \quad (4.45)$$

$$T_m^{(mn)} = k_{zmn}^{(air)} \epsilon_r \cos k_{zmn}d + jk_{zmn} \sin k_{zmn}d \quad (4.46)$$

導体素子上の境界条件より,

$$\mathbf{E}_{i,\text{tan}} + \mathbf{E}_{r,\text{tan}} + \mathbf{E}_{s,\text{tan}} = Z_s \mathbf{J}_s \quad (\text{on } S) \quad (4.47)$$

ただし, $\mathbf{E}_{i,\text{tan}}$ は入射電界, $\mathbf{E}_{r,\text{tan}}$ は導体素子がない場合の反射電界を示し,

$$\mathbf{E}_{i,\text{tan}} \Big|_S = E_{i,x}(x,y) \mathbf{u}_x + E_{i,y}(x,y) \mathbf{u}_y = (V_{1x}^+ \mathbf{u}_x + V_{1y}^+ \mathbf{u}_y) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{E}_{r,\text{tan}} \Big|_S = E_{r,x}(x,y) \mathbf{u}_x + E_{r,y}(x,y) \mathbf{u}_y = (V_{1x}^- \mathbf{u}_x + V_{1y}^- \mathbf{u}_y) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.49)$$

このとき、列ベクトル $\mathbf{V}_x$, $\mathbf{V}_y$ の各々の要素 v_{xkl} , v_{ykl} は、

$$\begin{aligned} v_{(x)ykl} &= - \int_S T_{(x)ykl}^* \left(E_{i,(x)} + E_{r,(x)} \right) dS = - \left(V_{1(y)}^+ + V_{1(y)}^- \right) \int_S T_{(x)ykl}^* e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \\ &= - \left(V_{1(y)}^+ + V_{1(y)}^- \right) \tilde{T}_{(x)ykl}^* \end{aligned} \quad (4.50)$$

行列表示して、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{xkl} \\ v_{ykl} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \tilde{T}_{xkl}^* & 0 \\ 0 & \tilde{T}_{ykl}^* \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} V_{1x}^+ \\ V_{1y}^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{1x}^- \\ V_{1y}^- \end{pmatrix} \right\} \\ &= - \begin{pmatrix} \tilde{T}_{xu,kl}^* & \tilde{T}_{xt,kl}^* \\ \tilde{T}_{yu,kl}^* & \tilde{T}_{yt,kl}^* \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^- \\ V_{1\text{TM}}^- \end{pmatrix} \right\} \\ &= - \begin{pmatrix} \tilde{T}_{xu,kl}^* & \tilde{T}_{xt,kl}^* \\ \tilde{T}_{yu,kl}^* & \tilde{T}_{yt,kl}^* \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{te}^{E+} & 0 \\ 0 & R_{tm}^{E+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \right\} \\ &= - \begin{pmatrix} \tilde{T}_{xu,kl}^* & \tilde{T}_{xt,kl}^* \\ \tilde{T}_{yu,kl}^* & \tilde{T}_{yt,kl}^* \end{pmatrix} \left\{ [U] + [R^{E+}]_d \right\} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.51)$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_{xu,kl}^* & \tilde{T}_{xt,kl}^* \\ \tilde{T}_{yu,kl}^* & \tilde{T}_{yt,kl}^* \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{T}_{xkl}^* \sin \phi_i & \tilde{T}_{xkl}^* \cos \phi_i \\ -\tilde{T}_{ykl}^* \cos \phi_i & \tilde{T}_{ykl}^* \sin \phi_i \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

また、

$$[U] \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

$$[R^{E+}]_d \equiv \begin{pmatrix} R_{te}^{E+} & 0 \\ 0 & R_{tm}^{E+} \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

ここで、

$$R_{te}^{E+} = \frac{k_z^{(air)} \sin k_z d + j k_z \cos k_z d}{k_z^{(air)} \sin k_z d - j k_z \cos k_z d} \quad (4.55)$$

$$R_{tm}^{E+} = \frac{k_z \sin k_z d + j \epsilon_r k_z^{(air)} \cos k_z d}{k_z \sin k_z d - j \epsilon_r k_z^{(air)} \cos k_z d} \quad (4.56)$$

これより、列ベクトル $\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$ は、

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{xu}^* \\ \tilde{T}_{yu}^* \end{bmatrix}^t & \begin{bmatrix} \tilde{T}_{xt}^* \\ \tilde{T}_{yt}^* \end{bmatrix}^t \end{pmatrix} \left\{ [U] + [R^{E+}]_d \right\} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

ただし、列ベクトル $\begin{bmatrix} \tilde{T}_{xu}^* \\ \tilde{T}_{xt}^* \\ \tilde{T}_{yu}^* \\ \tilde{T}_{yt}^* \end{bmatrix}^t$ の各々の要素は $\tilde{T}_{xu,kl}^*$, $\tilde{T}_{xt,kl}^*$, $\tilde{T}_{yu,kl}^*$, $\tilde{T}_{yt,kl}^*$ である。

4.3 導体素子を誘電体基板中に装荷した FSS

導体素子がない場合の透過電界 $\mathbf{E}_{t,\text{tan}}$, 反射電界 $\mathbf{E}_{r,\text{tan}}$ は, 導体素子のある境界面 i 上で, 次のようになる.

$$\mathbf{E}_{t,\text{tan}} \Big|_S = E_{t,x}(x,y)\mathbf{u}_x + E_{t,y}(x,y)\mathbf{u}_y = (V_{ix}^+ \mathbf{u}_x + V_{iy}^+ \mathbf{u}_y) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{E}_{r,\text{tan}} \Big|_S = E_{r,x}(x,y)\mathbf{u}_x + E_{r,y}(x,y)\mathbf{u}_y = (V_{ix}^- \mathbf{u}_x + V_{iy}^- \mathbf{u}_y) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.59)$$

このとき, 列ベクトル $[V_x]$, $[V_y]$ の各々の要素 v_{xkl} , v_{ykl} は,

$$v_{(x/y)kl} = - \left(V_{i(x/y)}^+ + V_{i(x/y)}^- \right) \tilde{T}_{(x/y)kl}^* \quad (4.60)$$

行列表示して,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{xkl} \\ v_{ykl} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \tilde{T}_{xkl}^* & 0 \\ 0 & \tilde{T}_{ykl}^* \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} V_{ix}^+ \\ V_{iy}^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{ix}^- \\ V_{iy}^- \end{pmatrix} \right\} \\ &= - \begin{pmatrix} \tilde{T}_{xu,kl}^* & \tilde{T}_{xt,kl}^* \\ \tilde{T}_{yu,kl}^* & \tilde{T}_{yt,kl}^* \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} V_{i\text{TE}}^+ \\ V_{i\text{TM}}^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{i\text{TE}}^- \\ V_{i\text{TM}}^- \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.61)$$

ここで,

$$[T^{E+}]_d \equiv \begin{pmatrix} T_{te}^{E+} & 0 \\ 0 & T_{tm}^{E+} \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

$$[R^{E+}]_d \equiv \begin{pmatrix} R_{te}^{E+} & 0 \\ 0 & R_{tm}^{E+} \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

より,

$$\begin{pmatrix} v_{xkl} \\ v_{ykl} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \tilde{T}_{xu,kl}^* & \tilde{T}_{xt,kl}^* \\ \tilde{T}_{yu,kl}^* & \tilde{T}_{yt,kl}^* \end{pmatrix} \left\{ [T^{E+}]_d + [R^{E+}]_d \right\} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

これより, 列ベクトル $[V_x]$, $[V_y]$ は,

$$\begin{pmatrix} [V_x] \\ [V_y] \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [\tilde{T}_{xu}^*]^t & [\tilde{T}_{xt}^*]^t \\ [\tilde{T}_{yu}^*]^t & [\tilde{T}_{yt}^*]^t \end{pmatrix} \left\{ [T^{E+}]_d + [R^{E+}]_d \right\} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

いま, 基底関数をベクトル $\mathbf{f}_i(\boldsymbol{\rho})$ で定義すると, 面電流分布 $\mathbf{J}_s(\boldsymbol{\rho})$ は,

$$\mathbf{J}_s(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{p,q} \left(I_{xpq} B_{xpq}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_x + I_{ypq} B_{ypq}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_y \right) = \sum_i I_i \mathbf{f}_i(\boldsymbol{\rho}) \quad (4.66)$$

フーリエ変換して,

$$\tilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_{tmn}) = \sum_{p,q} \left(I_{xpq} \tilde{B}_{xpq}(\mathbf{k}_{tmn}) \mathbf{u}_x + I_{ypq} \tilde{B}_{ypq}(\mathbf{k}_{tmn}) \mathbf{u}_y \right) = \sum_i I_i \tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{k}_{tmn}) \quad (4.67)$$

あるいは,

$$\tilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_{tmn}) = \sum_{p,q} \left(I_{xpq} \tilde{f}_{xpq}^{mn} \mathbf{u}_x + I_{ypq} \tilde{f}_{ypq}^{mn} \mathbf{u}_y \right) = \sum_i I_i \tilde{\mathbf{f}}_i^{mn} \quad (4.68)$$

そして, 試行関数も $\mathbf{f}_j(\boldsymbol{\rho})$ にとると, マトリクス方程式の行列 $\begin{bmatrix} Z_{xx} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} Z_{xy} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} Z_{yx} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} Z_{yy} \end{bmatrix}$ の各々の要素 $z_{kl,pq}^{xx}$, $z_{kl,pq}^{xy}$, $z_{kl,pq}^{yx}$, $z_{kl,pq}^{yy}$ は次のようになる.

$$z_{kl,pq}^{xx} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{f}_{xkl}^{mn*} \tilde{G}_{xx}^{mn} \tilde{f}_{xpq}^{mn} - Z_s \int_S f_{xkl}^* f_{xpq} dS \quad (4.69)$$

$$z_{kl,pq}^{xy} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{f}_{xkl}^{mn*} \tilde{G}_{xy}^{mn} \tilde{f}_{ypq}^{mn} \quad (4.70)$$

$$z_{kl,pq}^{yx} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{f}_{ykl}^{mn*} \tilde{G}_{yx}^{mn} \tilde{f}_{xpq}^{mn} \quad (4.71)$$

$$z_{kl,pq}^{yy} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{f}_{ykl}^{mn*} \tilde{G}_{yy}^{mn} \tilde{f}_{ypq}^{mn} - Z_s \int_S f_{ykl}^* f_{ypq} dS \quad (4.72)$$

また, 列ベクトル $\mathbf{V}_x$, $\mathbf{V}_y$ は,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_{xu}^* \end{bmatrix}^t & \begin{bmatrix} \tilde{f}_{xt}^* \end{bmatrix}^t \\ \begin{bmatrix} \tilde{f}_{yu}^* \end{bmatrix}^t & \begin{bmatrix} \tilde{f}_{yt}^* \end{bmatrix}^t \end{pmatrix} \left\{ [T^{E+}]_d + [R^{E+}]_d \right\} \begin{pmatrix} V_{1_{\text{TE}}}^+ \\ V_{1_{\text{TM}}}^+ \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

いま,

$$\mathbf{V} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{Z}] \equiv \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} Z_{xx} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{xy} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z_{yx} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{yy} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{I}_x \\ \mathbf{I}_y \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

とおくと,

$$\mathbf{V} = [\mathbf{Z}] \mathbf{I} \quad (4.75)$$

このとき, 行列 $[\mathbf{Z}]$ の要素 z_{ij} は次のようになる.

$$z_{ij} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{\mathbf{f}}_j^*(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{k}_{tmn}) - Z_s \int_S \mathbf{f}_j^*(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{f}_i(\boldsymbol{\rho}) dS \quad (4.76)$$

4.4 反射係数

入射波側の自由空間と誘電体の境界面 ($z = 0$) での入射平面波の横断面内電界 $\mathbf{E}_{i,\tan}^{(1)}$ を,

$$\mathbf{E}_{i,\tan}^{(1)} \Big|_{z=0} = \left\{ V_{1\text{TE}}^- (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + V_{1\text{TM}}^- \mathbf{u}_t \right\} e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} = E_{i,x} \mathbf{u}_x + E_{i,y} \mathbf{u}_y \quad (4.77)$$

とする. 入射角を (θ_i, ϕ_i) とすると, 入射波の波数ベクトル $\mathbf{k}^{inc}$ は,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{inc} &= k_x^{inc} \mathbf{u}_x + k_y^{inc} \mathbf{u}_y + k_z \mathbf{u}_z = \mathbf{k}_t + k_z \mathbf{u}_z = k_t \mathbf{u}_t + k_z \mathbf{u}_z \\ &= k(\sin \theta_i \cos \phi_i \mathbf{u}_x + \sin \theta_i \sin \phi_i \mathbf{u}_y + \cos \theta_i \mathbf{u}_z) \end{aligned} \quad (4.78)$$

このとき, 導体素子による散乱波の接線電界 $\mathbf{E}_{s,\tan}$ は,

$$\mathbf{E}_{s,\tan} \Big|_{z=0} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\mathbf{G}}_T^{(d_i)EJ}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_{tmn}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.79)$$

ここで,

$$\mathbf{k}_{tmn} = k_{tmn} \mathbf{u}_{tmn} = k_{xm} \mathbf{u}_x + k_{yn} \mathbf{u}_y \quad (4.80)$$

$$k_{xm} = \frac{2\pi m}{d_x} + k_x^{inc} \quad (4.81)$$

$$k_{yn} = \frac{2\pi n}{d_y} + k_y^{inc} \quad (4.82)$$

$$k_{zmn} = \sqrt{k^2 - k_{xm}^2 - k_{yn}^2} \quad (4.83)$$

また, 導体素子がない場合の反射波の接線電界 $\mathbf{E}_{r,\tan}$ は,

$$\mathbf{E}_{r,\tan} \Big|_{z=0} = \left\{ R_{te}^{E-} V_{1\text{TE}}^- (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + R_{tm}^{E-} V_{1\text{TM}}^- \mathbf{u}_t \right\} e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.84)$$

境界面での全反射波 $\mathbf{E}_{r,\tan}^{(\text{FSS})}$ は上の両電界からなり, これをフロケモードで展開すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{r,\tan}^{(\text{FSS})} &= \mathbf{E}_{r,\tan} \Big|_{z=0} + \mathbf{E}_{s,\tan} \Big|_{z=0} \\ &= \sum_{m,n} \left\{ V_{[mn]}^+ (\mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z) + V_{(mn)}^+ \mathbf{u}_{tmn} \right\} e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \end{aligned} \quad (4.85)$$

反射係数を求めるため, 両者を等しくおき, 両辺に $\psi_{00}^*(\boldsymbol{\rho}) = e^{-j\mathbf{k}_{t00} \cdot \boldsymbol{\rho}}$ を乗じて, 単位セル (面 S) にわたって次のように積分する.

$$\begin{aligned} &\int_S \left[\sum_{m,n} \left\{ V_{[mn]}^+ (\mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z) + V_{(mn)}^+ \mathbf{u}_{tmn} \right\} e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right] e^{-j\mathbf{k}_{t00} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \\ &= \int_S \left[\left\{ R_{te}^{E-} V_{1\text{TE}}^- (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + R_{tm}^{E-} V_{1\text{TM}}^- \mathbf{u}_t \right\} e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \right] e^{-j\mathbf{k}_{t00} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \\ &\quad + \int_S \left[\frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\mathbf{G}}_T^{(d_i)EJ}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_{tmn}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right] e^{-j\mathbf{k}_{t00} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \end{aligned} \quad (4.86)$$

ここで, $k_{t00} = k_t \oslash \Phi$ え,

$$\int_S e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-j\mathbf{k}_{t00} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS = \int_S e^{j\left(\frac{2\pi m}{d_x}x + \frac{2\pi n}{d_y}y\right)} dS = d_x d_y \delta_{m0} \delta_{n0} \quad (4.87)$$

より, $\mathbf{u}_t^{(00)} = \mathbf{u}_t$, $k_{z00} = k_z$ を考慮して,

$$\begin{aligned} & \left\{ V_{[00]}^+ (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + V_{(00)}^+ \mathbf{u}_t \right\} \\ &= \left\{ R_{te}^{E-} V_{1\text{TE}}^- (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + R_{tm}^{E-} V_{1\text{TM}}^- \mathbf{u}_t \right\} + \frac{1}{d_x d_y} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_i)EJ}(\mathbf{k}_t) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_t) \end{aligned} \quad (4.88)$$

これより, $(\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z)$ 成分, $\mathbf{u}_t$ 成分は,

$$V_{[00]}^+ = R_{te}^{E-} V_{1\text{TE}}^- + \frac{1}{d_x d_y} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_i)EJ}(\mathbf{k}_t) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_t) \quad (4.89)$$

$$V_{(00)}^+ = R_{tm}^{E-} V_{1\text{TM}}^- + \frac{1}{d_x d_y} \mathbf{u}_t \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_i)EJ}(\mathbf{k}_t) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_t) \quad (4.90)$$

したがって, 主偏波成分の反射係数 $R_{[00]}^{\text{TE} \rightarrow \text{TE}}$ (TE 波), $R_{(00)}^{\text{TM} \rightarrow \text{TM}}$ (TM 波) は,

$$R_{[00]}^{\text{TE} \rightarrow \text{TE}} = \frac{V_{[00]}^+}{V_{1\text{TE}}^-} = R_{te}^{E-} + \frac{1}{d_x d_y} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_i)EJ} \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s \Big|_{V_{1\text{TE}}^-=1, V_{1\text{TM}}^-=0} \quad (4.91)$$

$$R_{(00)}^{\text{TM} \rightarrow \text{TM}} = \frac{V_{(00)}^+}{V_{1\text{TM}}^-} = R_{tm}^{E-} + \frac{1}{d_x d_y} \mathbf{u}_t \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_i)EJ} \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s \Big|_{V_{1\text{TE}}^-=0, V_{1\text{TM}}^-=1} \quad (4.92)$$

また, 交差偏波成分の反射係数 $R_{(00)}^{\text{TE} \rightarrow \text{TM}}$, $R_{[00]}^{\text{TM} \rightarrow \text{TE}}$ は,

$$R_{(00)}^{\text{TE} \rightarrow \text{TM}} = \frac{V_{(00)}^+}{V_{1\text{TE}}^-} = \frac{1}{d_x d_y} \mathbf{u}_t \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_i)EJ} \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s \Big|_{V_{1\text{TE}}^-=1, V_{1\text{TM}}^-=0} \quad (4.93)$$

$$R_{[00]}^{\text{TM} \rightarrow \text{TE}} = \frac{V_{[00]}^+}{V_{1\text{TM}}^-} = \frac{1}{d_x d_y} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_i)EJ} \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s \Big|_{V_{1\text{TE}}^-=0, V_{1\text{TM}}^-=1} \quad (4.94)$$

4.5 透過係数

透過波側の自由空間と誘電体の境界面を $z = 0$ にとると, 導体素子がない場合の透過波の接線電界 $\mathbf{E}_{t,\text{tan}}$ は,

$$\mathbf{E}_{t,\text{tan}} \Big|_{z=0} = \left\{ T_{te}^{E-} V_{1\text{TE}}^- (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + T_{tm}^{E-} V_{1\text{TM}}^- \mathbf{u}_t \right\} e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.95)$$

また, 導体素子による散乱波の接線電界 $\mathbf{E}_{s,\text{tan}}$ は,

$$\mathbf{E}_{s,\text{tan}} \Big|_{z=0} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_o)EJ}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_{tmn}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.96)$$

この境界面での全透過波 $\mathbf{E}_{t,\text{tan}}^{(\text{FSS})}$ を、反射波と同様に次のようにフロケモードで展開する.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{t,\text{tan}}^{(\text{FSS})} &= \mathbf{E}_{t,\text{tan}} \Big|_{z=0} + \mathbf{E}_{s,\text{tan}} \Big|_{z=0} \\ &= \sum_{m,n} \left\{ V_{[mn]}^- (\mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z) + V_{(mn)}^- \mathbf{u}_{tmn} \right\} e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}}\end{aligned}\quad (4.97)$$

透過係数を求めるため、両者を等しくおき、両辺に $\psi_{00}^*(\boldsymbol{\rho}) = e^{-j\mathbf{k}_{t00} \cdot \boldsymbol{\rho}}$ を乗じ、単位セル S にわたり積分して、

$$\begin{aligned}& \int_S \left[\sum_{m,n} \left\{ V_{[mn]}^- (\mathbf{u}_{tmn} \times \mathbf{u}_z) + V_{(mn)}^- \mathbf{u}_{tmn} \right\} e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right] e^{-j\mathbf{k}_{t00} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \\ &= \int_S \left[\left\{ T_{te}^{E-} V_{1\text{TE}}^- (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + T_{tm}^{E-} V_{1\text{TM}}^- \mathbf{u}_t \right\} e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} \right] e^{-j\mathbf{k}_{t00} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \\ &\quad + \int_S \left[\frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_o)EJ}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_{tmn}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right] e^{-j\mathbf{k}_{t00} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS\end{aligned}\quad (4.98)$$

直交性より、

$$\begin{aligned}& \left\{ V_{[00]}^- (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + V_{(00)}^- \mathbf{u}_t \right\} \\ &= \left\{ T_{te}^{E-} V_{1\text{TE}}^- (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + T_{tm}^{E-} V_{1\text{TM}}^- \mathbf{u}_t \right\} + \frac{1}{d_x d_y} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_o)EJ}(\mathbf{k}_t) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_t)\end{aligned}\quad (4.99)$$

これより、 $(\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z)$ 成分、 $\mathbf{u}_t$ 成分は、

$$V_{[00]}^- = T_{te}^{E-} V_{1\text{TE}}^- + \frac{1}{d_x d_y} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_o)EJ}(\mathbf{k}_t) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_t) \quad (4.100)$$

$$V_{(00)}^- = T_{tm}^{E-} V_{1\text{TM}}^- + \frac{1}{d_x d_y} \mathbf{u}_t \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_o)EJ}(\mathbf{k}_t) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_t) \quad (4.101)$$

したがって、主偏波成分の透過係数 $T_{[00]}^{\text{TE} \rightarrow \text{TE}}$ (TE 波)、 $T_{(00)}^{\text{TM} \rightarrow \text{TM}}$ (TM 波) は、

$$T_{[00]}^{\text{TE} \rightarrow \text{TE}} = \frac{V_{[00]}^-}{V_{1\text{TE}}^-} = T_{te}^{E-} + \frac{1}{d_x d_y} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_t) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_o)EJ} \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s \Big|_{V_{1\text{TE}}^- = 1, V_{1\text{TM}}^- = 0} \quad (4.102)$$

$$T_{(00)}^{\text{TM} \rightarrow \text{TM}} = \frac{V_{(00)}^-}{V_{1\text{TM}}^-} = T_{tm}^{E-} + \frac{1}{d_x d_y} \mathbf{u}_t \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_o)EJ} \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s \Big|_{V_{1\text{TE}}^- = 0, V_{1\text{TM}}^- = 1} \quad (4.103)$$

また、交差偏波成分の透過係数 $T_{(00)}^{\text{TE} \rightarrow \text{TM}}$ 、 $T_{[00]}^{\text{TM} \rightarrow \text{TE}}$ は、

$$T_{(00)}^{\text{TE} \rightarrow \text{TM}} = \frac{V_{(00)}^-}{V_{1\text{TE}}^-} = \frac{1}{d_x d_y} \mathbf{u}_t \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_o)EJ} \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s \Big|_{V_{1\text{TE}}^- = 1, V_{1\text{TM}}^- = 0} \quad (4.104)$$

$$T_{[00]}^{\text{TM} \rightarrow \text{TE}} = \frac{V_{[00]}^-}{V_{1\text{TM}}^-} = \frac{1}{d_x d_y} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_t) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{(d_o)EJ} \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s \Big|_{V_{1\text{TE}}^- = 0, V_{1\text{TM}}^- = 1} \quad (4.105)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ}(\mathbf{k}_t) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_t) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{G}_{xx} & \widetilde{G}_{xy} \\ \widetilde{G}_{yx} & \widetilde{G}_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{J}_x \\ \widetilde{J}_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z & \mathbf{u}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \phi_i & -\cos \phi_i \\ \cos \phi_i & \sin \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{G}_{xx} & \widetilde{G}_{xy} \\ \widetilde{G}_{yx} & \widetilde{G}_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{J}_x \\ \widetilde{J}_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z & \mathbf{u}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{Z}_{\text{TE}} & 0 \\ 0 & \widetilde{Z}_{\text{TM}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \phi_i & -\cos \phi_i \\ \cos \phi_i & \sin \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{J}_x \\ \widetilde{J}_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z & \mathbf{u}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{Z}_{\text{TE}} \sin \phi_i & -\widetilde{Z}_{\text{TE}} \sin \phi_i \cos \phi_i \\ \widetilde{Z}_{\text{TM}} \cos \phi_i & \widetilde{Z}_{\text{TM}} \sin \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{p,q} \widetilde{B}_{xpq} I_{xpq} \\ \sum_{p,q} \widetilde{B}_{ypq} I_{ypq} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z & \mathbf{u}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{Z}_{\text{TE}} \left\{ \sin \phi_i \sum_{p,q} \widetilde{B}_{xpq} I_{xpq} - \cos \phi_i \sum_{p,q} \widetilde{B}_{ypq} I_{ypq} \right\} \\ \widetilde{Z}_{\text{TM}} \left\{ \cos \phi_i \sum_{p,q} \widetilde{B}_{xpq} I_{xpq} + \sin \phi_i \sum_{p,q} \widetilde{B}_{ypq} I_{ypq} \right\} \end{pmatrix} \quad (4.106)
\end{aligned}$$

これより,

$$(\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ}(\mathbf{k}_t) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_t) = \widetilde{Z}_{\text{TE}} \left\{ \sin \phi_i \sum_{p,q} \widetilde{B}_{xpq} I_{xpq} - \cos \phi_i \sum_{p,q} \widetilde{B}_{ypq} I_{ypq} \right\} \quad (4.107)$$

$$\mathbf{u}_t \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ}(\mathbf{k}_t) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_t) = \widetilde{Z}_{\text{TM}} \left\{ \cos \phi_i \sum_{p,q} \widetilde{B}_{xpq} I_{xpq} + \sin \phi_i \sum_{p,q} \widetilde{B}_{ypq} I_{ypq} \right\} \quad (4.108)$$

4.6 周期構造の多モード散乱行列

周期的導体素子にフロケモードで展開した電界が入射したときの散乱行列を求めていく。境界面 $z = 0$ においてフロケモードに対応する多端子対散乱行列（縦続接続に使用するため、モード数は少なくてもよい）を定義するため、入射波側の接線電界 $\mathbf{E}_{\text{tan}}^{(1)}$ はフロケモード m' , n' によって次のように展開される。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{tan}}^{(1)} \Big|_{z=0} &= \sum_{m',n'} \left(a_{1[m'n']} \mathbf{e}_{1[m'n']} + a_{1(m'n')} \mathbf{e}_{1(m'n')} \right) \\
&\quad + \sum_{m',n'} \left(b_{1[m'n']} \mathbf{e}_{1[m'n']} + b_{1(m'n')} \mathbf{e}_{1(m'n')} \right) \quad (4.109)
\end{aligned}$$

ただし, $a_{1[m'n']}$, $a_{1(m'n')}$ は各々 TE 波, TM 波に対する入射波のフロケモード m' , n' のルート電力, $b_{1[m'n']}$, $b_{1(m'n')}$ は各々 TE 波, TM 波に対する反射波のフロケモード m' , n' のルート電力を示す。また, $\mathbf{e}_{1[m'n']}$, $\mathbf{e}_{1(m'n')}$ は, TE 波, TM 波に対する電界のフロケモー

ド関数を示し、次式で与えられる.

$$\mathbf{e}_{1[m'n']} = \sqrt{Z_{1[m'n']}}(\mathbf{u}_{tm'n'} \times \mathbf{u}_z)e^{j\mathbf{k}_{tm'n'} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.110)$$

$$\mathbf{e}_{1(m'n')} = \sqrt{Z_{1(m'n')}}\mathbf{u}_{tm'n'}e^{j\mathbf{k}_{tm'n'} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.111)$$

行列形式では,

$$\mathbf{E}_{\tan}^{(1)}\Big|_{z=0} = \begin{pmatrix} [\mathbf{e}'_{1\text{TE}}]^t & [\mathbf{e}'_{1\text{TM}}]^t \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1\text{TE}} \\ \mathbf{a}_{1\text{TM}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{1\text{TE}} \\ \mathbf{b}_{1\text{TM}} \end{pmatrix} \right\} = [\mathbf{e}'_1]^t \left\{ \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \right\} \quad (4.112)$$

ここで,

$$[\mathbf{e}'_1]^t \equiv \begin{pmatrix} [\mathbf{e}'_{1\text{TE}}]^t & [\mathbf{e}'_{1\text{TM}}]^t \end{pmatrix} \quad (4.113)$$

また,

$$\mathbf{a}_1 \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1\text{TE}} \\ \mathbf{a}_{1\text{TM}} \end{pmatrix} \quad (4.114)$$

$$\mathbf{b}_1 \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{1\text{TE}} \\ \mathbf{b}_{1\text{TM}} \end{pmatrix} \quad (4.115)$$

ただし, $[\mathbf{e}'_{1\text{TE}}]^t$, $[\mathbf{e}'_{1\text{TM}}]^t$ は各々 $\mathbf{e}_{1[m'n']}^t$, $\mathbf{e}_{1(m'n')}^t$ を要素とする行ベクトルを示す. また, $\mathbf{a}_{1\text{TE}}$, $\mathbf{a}_{1\text{TM}}$ は各々 $a_{1[m'n']}$, $a_{1(m'n')}$ を要素とする列ベクトル, $\mathbf{b}_{1\text{TE}}$, $\mathbf{b}_{1\text{TM}}$ は各々 $b_{1[m'n']}$, $b_{1(m'n')}$ を要素とする列ベクトルを示す. モーメント法より求められる結果を基に, フロケモードで接線電界を展開すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\tan}^{(1)}\Big|_{z=0} &= \sum_{m',n'} \left(a_{1[m'n']} \mathbf{e}_{1[m'n']} + a_{1(m'n')} \mathbf{e}_{1(m'n')} \right) + \mathbf{E}_{s,\tan}^{(1)}\Big|_{z=0} \\ &\quad + \sum_{m',n'} \left(R_{[m'n']}^+ a_{1[m'n']} \mathbf{e}_{1[m'n']} + R_{(m'n')}^+ a_{1(m'n')} \mathbf{e}_{1(m'n')} \right) \\ &\equiv \begin{pmatrix} [\mathbf{e}'_{1\text{TE}}] & [\mathbf{e}'_{1\text{TM}}] \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1\text{TE}} \\ \mathbf{a}_{1\text{TM}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [R_{\text{TE}}^+]_d & 0 \\ 0 & [R_{\text{TM}}^+]_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1\text{TE}} \\ \mathbf{a}_{1\text{TM}} \end{pmatrix} \right\} \\ &\quad + \sum_{m',n'} \left(\mathbf{E}_{s[m'n']} + \mathbf{E}_{s(m'n')} \right) \end{aligned} \quad (4.116)$$

ただし, $[R_{\text{TE}}^+]_d$, $[R_{\text{TM}}^+]_d$ は, 各々 $R_{[m'n']}^+$ (TE 波), $R_{(m'n')}^+$ (TM 波) を対角要素とする対角行列を示し,

$$R_{[m'n']}^+ = \frac{Y_{1[m'n']} - Y_{2[m'n']}}{Y_{1[m'n']} + Y_{2[m'n']}} = \frac{k_{1zm'n'} - k_{2zm'n'}}{k_{1zm'n'} + k_{2zm'n'}} \quad (4.117)$$

$$R_{(m'n')}^+ = \frac{Z_{2(m'n')} - Z_{1(m'n')}}{Z_{2(m'n')} + Z_{1(m'n')}} = \frac{k_{2zm'n'} - n^2 k_{1zm'n'}}{k_{2zm'n'} + n^2 k_{1zm'n'}} \quad (4.118)$$

ここで,

$$n^2 \equiv \frac{k_2^2}{k_1^2} \quad (4.119)$$

いま, $\mu_1 = \mu_2$, $\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1}$, $\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2}$ のとき,

$$n^2 = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} = \frac{|\epsilon_{r2}|(1 - j \tan \delta_2)}{|\epsilon_{r1}|(1 - j \tan \delta_1)} \quad (4.120)$$

フロケモードの散乱波については,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{s[m'n']} + \mathbf{E}_{s(m'n')} \\ &= \frac{1}{d_x d_y} \overset{\cong (d_i)EJ}{\mathbf{G}_T}(\mathbf{k}_{tm'n'}) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}_{tm'n'}) e^{j\mathbf{k}_{tm'n'} \cdot \boldsymbol{\rho}} \\ &= \frac{1}{d_x d_y} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{xx}^{m'n'} & \tilde{G}_{xy}^{m'n'} \\ \tilde{G}_{yx}^{m'n'} & \tilde{G}_{yy}^{m'n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_x^{m'n'} \\ \tilde{J}_y^{m'n'} \end{pmatrix} e^{j\mathbf{k}_{tm'n'} \cdot \boldsymbol{\rho}} \\ &= \frac{1}{d_x d_y} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{tm'n'} \times \mathbf{u}_z & \mathbf{u}_{tm'n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{u}_{tm'n'} \times \mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{u}_x & (\mathbf{u}_{tm'n'} \times \mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_{tm'n'} \cdot \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_{tm'n'} \cdot \mathbf{u}_y \end{pmatrix} \\ & \cdot \begin{pmatrix} \tilde{G}_{xx}^{m'n'} & \tilde{G}_{xy}^{m'n'} \\ \tilde{G}_{yx}^{m'n'} & \tilde{G}_{yy}^{m'n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_x^{m'n'} \\ \tilde{J}_y^{m'n'} \end{pmatrix} e^{j\mathbf{k}_{tm'n'} \cdot \boldsymbol{\rho}} \\ &= \frac{1}{d_x d_y} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1[m'n']} & \mathbf{e}_{1(m'n')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{Y_{1[m'n']}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{1(m'n')}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{ux}^{m'n'} & \tilde{G}_{uy}^{m'n'} \\ \tilde{G}_{tx}^{m'n'} & \tilde{G}_{ty}^{m'n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_x^{m'n'} \\ \tilde{J}_y^{m'n'} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.121)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \overset{\cong (d_i)EJ}{\mathbf{G}_T} &= \tilde{G}_{xx}^{m'n'} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{xy}^{m'n'} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \tilde{G}_{yx}^{m'n'} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{yy}^{m'n'} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y \\ &\equiv \tilde{G}_{ux}^{m'n'} \mathbf{u}_{um'n'} \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{uy}^{m'n'} \mathbf{u}_{um'n'} \mathbf{u}_y \\ &+ \tilde{G}_{tx}^{m'n'} \mathbf{u}_{tm'n'} \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{ty}^{m'n'} \mathbf{u}_{tm'n'} \mathbf{u}_y \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$\mathbf{u}_{um'n'} \equiv \mathbf{u}_{tm'n'} \times \mathbf{u}_z \quad (4.123)$$

これより, 散乱波は,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{s,\tan}^{(1)} \Big|_{z=0} &= \sum_{m',n'} \left(\mathbf{E}_{s[m'n']} + \mathbf{E}_{s(m'n')} \right) \\ &= \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m',n'} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1[m'n']} & \mathbf{e}_{1(m'n')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{Y_{1[m'n']}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{1(m'n')}} \end{pmatrix} \\ & \cdot \begin{pmatrix} \tilde{G}_{ux}^{m'n'} & \tilde{G}_{uy}^{m'n'} \\ \tilde{G}_{tx}^{m'n'} & \tilde{G}_{ty}^{m'n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_x^{m'n'} \\ \tilde{J}_y^{m'n'} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.124)$$

さらに, m', n' に対して行列として扱うと,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{s,\tan}^{(1)} \Big|_{z=0} &= \frac{1}{d_x d_y} \begin{pmatrix} [\mathbf{e}'_{1\text{TE}}]^t & [\mathbf{e}'_{1\text{TM}}]^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\sqrt{Y_{1\text{TE}}}]_d & 0 \\ 0 & [\sqrt{Y_{1\text{TM}}}]_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\tilde{G}_{ux}] & [\tilde{G}_{uy}] \\ [\tilde{G}_{tx}] & [\tilde{G}_{ty}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}}_x \\ \tilde{\mathbf{J}}_y \end{pmatrix} \\ &\equiv \frac{1}{d_x d_y} [\mathbf{e}'_1]^t [\sqrt{Y_1}]_d [\tilde{G}_{ut,xy}] \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}}_x \\ \tilde{\mathbf{J}}_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.125)$$

ここで,

$$[\sqrt{Y_1}]_d \equiv \begin{pmatrix} [\sqrt{Y_{1\text{TE}}}]_d & 0 \\ 0 & [\sqrt{Y_{1\text{TM}}}]_d \end{pmatrix} \quad (4.126)$$

$$[\tilde{G}_{ut,xy}] \equiv \begin{pmatrix} [\tilde{G}_{ux}] & [\tilde{G}_{uy}] \\ [\tilde{G}_{tx}] & [\tilde{G}_{ty}] \end{pmatrix} \quad (4.127)$$

ただし, $[\sqrt{Y_{1\text{TE}}}]_d, [\sqrt{Y_{1\text{TM}}}]_d$ は各々 $\sqrt{Y_{1[m'n']}}, \sqrt{Y_{1(m'n')}}$ を対角要素とする対角行列, $[\tilde{G}_{ux}], [\tilde{G}_{uy}], [\tilde{G}_{tx}], [\tilde{G}_{ty}]$ は各々 $\tilde{G}_{ux}^{m'n'}, \tilde{G}_{uy}^{m'n'}, \tilde{G}_{tx}^{m'n'}, \tilde{G}_{ty}^{m'n'}$ を要素とする行列を示す. また, $\tilde{\mathbf{J}}_x, \tilde{\mathbf{J}}_y$ は各々 $\tilde{j}_x^{m'n'}, \tilde{j}_y^{m'n'}$ を要素とする列ベクトルを示し, 次のように基底関数で展開される.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}}_x \\ \tilde{\mathbf{J}}_y \end{pmatrix} = [\tilde{B}] \begin{pmatrix} \mathbf{I}_x \\ \mathbf{I}_y \end{pmatrix} \quad (4.128)$$

ここで,

$$[\tilde{B}] = \begin{pmatrix} [\tilde{B}_x] & 0 \\ 0 & [\tilde{B}_y] \end{pmatrix} \quad (4.129)$$

ただし, $[\tilde{B}_x], [\tilde{B}_y]$ は各々基底関数 $\tilde{B}_{xpq}^{m'n'}, \tilde{B}_{ypq}^{m'n'}$ を要素とする行列を示す. また, $\mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y$ は I_{xpq}, I_{ypq} を要素とする列ベクトルを示し,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_x \\ \mathbf{I}_y \end{pmatrix} = [Z]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \end{pmatrix} \quad (4.130)$$

ここで,

$$[Z] = \begin{pmatrix} [Z_{xx}] & [Z_{xy}] \\ [Z_{yx}] & [Z_{yy}] \end{pmatrix} \quad (4.131)$$

そして, $\mathbf{V}_x$, $\mathbf{V}_y$ は次式で求められる.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} [\tilde{T}_{xu}^*]^t & [\tilde{T}_{xt}^*]^t \\ [\tilde{T}_{yu}^*]^t & [\tilde{T}_{yt}^*]^t \end{pmatrix} \{ [U] + [R^+]_d \} \begin{pmatrix} V_{1\text{TE}}^+ \\ V_{1\text{TM}}^+ \end{pmatrix} \\ &= - [\tilde{T}_{xy,ut}^*]^t \{ [U] + [R^+]_d \} [\sqrt{Z_1}]_d \mathbf{a}_1 \end{aligned} \quad (4.132)$$

ここで,

$$[\tilde{T}_{xy,ut}^*]^t \equiv \begin{pmatrix} [\tilde{T}_{xu}^*]^t & [\tilde{T}_{xt}^*]^t \\ [\tilde{T}_{yu}^*]^t & [\tilde{T}_{yt}^*]^t \end{pmatrix} \quad (4.133)$$

$$[\sqrt{Z_1}]_d \equiv \begin{pmatrix} [\sqrt{Z_{1\text{TE}}}]_d & 0 \\ 0 & [\sqrt{Z_{1\text{TM}}}]_d \end{pmatrix} \quad (4.134)$$

ただし, $[U]$ は単位行列を示す. また, $[\sqrt{Z_{1\text{TE}}}]_d$, $[\sqrt{Z_{1\text{TM}}}]_d$ は各々 $\sqrt{Z_{1[m'n']}}$, $\sqrt{Z_{1(m'n')}}$ を対角要素とする対角行列を示す. いま,

$$[Z'] = \begin{pmatrix} [Z'_{xx}] & [Z'_{xy}] \\ [Z'_{yx}] & [Z'_{yy}] \end{pmatrix} \equiv d_x d_y [Z] \quad (4.135)$$

とおくと, 行列 $[Z'_{xx}]$, $[Z'_{xy}]$, $[Z'_{yx}]$, $[Z'_{yy}]$ の各々の要素 $z_{kl,pq}^{xx'}$, $z_{kl,pq}^{xy'}$, $z_{kl,pq}^{yx'}$, $z_{kl,pq}^{yy'}$ は次のようになる.

$$z_{kl,pq}^{xx'} = \sum_{m,n} \tilde{T}_{xkl}^{mn*} \tilde{G}_{xx}^{mn} \tilde{B}_{xpq}^{mn} - d_x d_y Z_s \int_S T_{xkl}^* B_{xpq} dS \quad (4.136)$$

$$z_{kl,pq}^{xy'} = \sum_{m,n} \tilde{T}_{xkl}^{mn*} \tilde{G}_{xy}^{mn} \tilde{B}_{ypq}^{mn} \quad (4.137)$$

$$z_{kl,pq}^{yx'} = \sum_{m,n} \tilde{T}_{ykl}^{mn*} \tilde{G}_{yx}^{mn} \tilde{B}_{xpq}^{mn} \quad (4.138)$$

$$z_{kl,pq}^{yy'} = \sum_{m,n} \tilde{T}_{ykl}^{mn*} \tilde{G}_{yy}^{mn} \tilde{B}_{ypq}^{mn} - d_x d_y Z_s \int_S T_{ykl}^* B_{ypq} dS \quad (4.139)$$

また,

$$[\tilde{T}^{Z*}]^t \equiv [\tilde{T}_{xy,ut}^*]^t [\sqrt{Z_1}]_d \equiv \begin{pmatrix} [\tilde{T}_{xu}^{Z*}]^t & [\tilde{T}_{xt}^{Z*}]^t \\ [\tilde{T}_{yu}^{Z*}]^t & [\tilde{T}_{yt}^{Z*}]^t \end{pmatrix} \quad (4.140)$$

とおいたときの行列 $\left[\tilde{T}_{xu}^{Z*}\right]^t$, $\left[\tilde{T}_{xt}^{Z*}\right]^t$, $\left[\tilde{T}_{yu}^{Z*}\right]^t$, $\left[\tilde{T}_{yt}^{Z*}\right]^t$ の要素 $\tilde{t}_{kl,m'n'}^{xu*}$, $\tilde{t}_{kl,m'n'}^{xt*}$, $\tilde{t}_{kl,m'n'}^{yu*}$, $\tilde{t}_{kl,m'n'}^{yt*}$ は各々次のようになる。

$$\tilde{t}_{kl,m'n'}^{xu*} = \tilde{T}_{xkl}^{m'n'*} \sqrt{Z_{1[m'n']}} \sin \phi_{m'n'} \quad (4.141)$$

$$\tilde{t}_{kl,m'n'}^{xt*} = \tilde{T}_{xkl}^{m'n'*} \sqrt{Z_{1(m'n')}} \sin \phi_{m'n'} \quad (4.142)$$

$$\tilde{t}_{kl,m'n'}^{yu*} = -\tilde{T}_{ykl}^{m'n'*} \sqrt{Z_{1[m'n']}} \cos \phi_{m'n'} \quad (4.143)$$

$$\tilde{t}_{kl,m'n'}^{yt*} = \tilde{T}_{ykl}^{m'n'*} \sqrt{Z_{1(m'n')}} \cos \phi_{m'n'} \quad (4.144)$$

また,

$$\left[\tilde{G}^{YB}\right] \equiv \left[\sqrt{Y_1}\right]_d \left[\tilde{G}_{ut,xy}\right]_d \left[\tilde{B}\right] \equiv \begin{pmatrix} \left[\tilde{G}_{ux}^{YB}\right] & \left[\tilde{G}_{uy}^{YB}\right] \\ \left[\tilde{G}_{tx}^{YB}\right] & \left[\tilde{G}_{ty}^{YB}\right] \end{pmatrix} \quad (4.145)$$

とおいたときの行列 $\left[\tilde{G}_{ux}^{YB}\right]$, $\left[\tilde{G}_{uy}^{YB}\right]$, $\left[\tilde{G}_{tx}^{YB}\right]$, $\left[\tilde{G}_{ty}^{YB}\right]$ の要素 $\tilde{g}_{m'n',kl}^{ux}$, $\tilde{g}_{m'n',kl}^{uy}$, $\tilde{g}_{m'n',kl}^{tx}$, $\tilde{g}_{m'n',kl}^{ty}$ は各々次のようになる。

$$\tilde{g}_{m'n',kl}^{ux} = \sqrt{Y_{1[m'n']}} \left(\tilde{G}_{xx}^{m'n'} \sin \phi_{m'n'} + \tilde{G}_{yx}^{m'n'} \cos \phi_{m'n'} \right) \tilde{B}_{xkl}^{m'n'} \quad (4.146)$$

$$\tilde{g}_{m'n',kl}^{uy} = \sqrt{Y_{1[m'n']}} \left(\tilde{G}_{xy}^{m'n'} \sin \phi_{m'n'} + \tilde{G}_{yy}^{m'n'} \cos \phi_{m'n'} \right) \tilde{B}_{ykl}^{m'n'} \quad (4.147)$$

$$\tilde{g}_{m'n',kl}^{tx} = \sqrt{Y_{1(m'n')}} \left(-\tilde{G}_{xx}^{m'n'} \cos \phi_{m'n'} + \tilde{G}_{yx}^{m'n'} \sin \phi_{m'n'} \right) \tilde{B}_{xkl}^{m'n'} \quad (4.148)$$

$$\tilde{g}_{m'n',kl}^{ty} = \sqrt{Y_{1(m'n')}} \left(-\tilde{G}_{xy}^{m'n'} \cos \phi_{m'n'} + \tilde{G}_{yy}^{m'n'} \sin \phi_{m'n'} \right) \tilde{B}_{ykl}^{m'n'} \quad (4.149)$$

さらに,

$$\left[S_0\right] \equiv -\left[\sqrt{Y_1}\right]_d \left[\tilde{G}_{ut,xy}\right]_d \left[\tilde{B}\right] \left[Z'\right]^{-1} \left[\tilde{T}_{xy,ut}^*\right]^t \left[\sqrt{Z_1}\right]_d = \left[\tilde{G}^{YB}\right] \left[Z'\right]^{-1} \left[\tilde{T}^{Z*}\right]^t \quad (4.150)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \left.\mathbf{E}_{s,\tan}^{(1)}\right|_{z=0} &= -\left[\mathbf{e}'_1\right]^t \left[\sqrt{Y_1}\right]_d \left[\tilde{G}_{ut,xy}\right]_d \left[\tilde{B}\right] \left[Z'\right]^{-1} \left[\tilde{T}_{xy,ut}^*\right]^t \left\{ [U] + [R^+]_d \right\} \left[\sqrt{Z_1}\right]_d \mathbf{a}_1 \\ &= \left[\mathbf{e}'_1\right] \left[S_0\right] \left\{ [U] + [R^+]_d \right\} \mathbf{a}_1 \end{aligned} \quad (4.151)$$

よって,

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{e}'_1\right] \left\{ \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \right\} &= \left[\mathbf{e}'_1\right] \left\{ \mathbf{a}_1 + [R^+]_d \mathbf{a}_1 \right\} + \left[\mathbf{e}'_1\right] \left[S_0\right] \left\{ [U] + [R^+]_d \right\} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 &= \left\{ \mathbf{a}_1 + [R^+]_d \mathbf{a}_1 \right\} + \left[S_0\right] \left\{ [U] + [R^+]_d \right\} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 &= \left([R^+]_d + \left[S_0\right] \left\{ [U] + [R^+]_d \right\} \right) \mathbf{a}_1 \equiv [S_{11}] \mathbf{a}_1 \end{aligned} \quad (4.152)$$

したがって、 $[S_{11}]$ は次のようになる。

$$[S_{11}] = [R^+]_d + [S_0]([U] + [R^+]_d) \quad (4.153)$$

同様にして、 $[S_{22}]$ は（導出省略）,

$$[S_{22}] = [R^-]_d + [S_0]([U] + [R^-]_d) \quad (4.154)$$

ここで,

$$[R^-]_d = \begin{pmatrix} [R_{\text{TE}}^-]_d & 0 \\ 0 & [R_{\text{TM}}^-]_d \end{pmatrix} \quad (4.155)$$

ただし、 $[R_{\text{TE}}^-]_d$, $[R_{\text{TM}}^-]_d$ は、各々 $R_{[m'n']}^-$ (TE 波), $R_{(m'n')}^-$ (TM 波) を対角要素とする対角行列を示し,

$$R_{[m'n']}^- = \frac{Y_{2[m'n']} - Y_{1[m'n']}}{Y_{2[m'n']} + Y_{1[m'n']}} = -R_{[m'n']}^+ \quad (4.156)$$

$$R_{(m'n')}^- = \frac{Z_{2(m'n')} - Z_{1(m'n')}}{Z_{2(m'n')} + Z_{1(m'n')}} = -R_{(m'n')}^+ \quad (4.157)$$

よって,

$$[R^-]_d = -[R^+]_d \quad (4.158)$$

したがって、 $[S_{22}]$ は,

$$[S_{22}] = -[R^+]_d + [S_0]([U] - [R^+]_d) \quad (4.159)$$

また、 $[S_{21}]$ は（導出省略）,

$$[S_{21}] = [T^+]_d + [S_0][T^+]_d \quad (4.160)$$

ここで,

$$[T^+]_d = \begin{pmatrix} [T_{\text{TE}}^+]_d & 0 \\ 0 & [T_{\text{TM}}^+]_d \end{pmatrix} \quad (4.161)$$

ただし、 $[T_{\text{TE}}^+]_d$, $[T_{\text{TM}}^+]_d$ は、各々 $T_{[m'n']}^+$ (TE 波), $T_{(m'n')}^+$ (TM 波) を対角要素とする対角行列を示し,

$$T_{[m'n']}^+ = \frac{Y_{1[m'n']}}{Y_{2[m'n']} + Y_{1[m'n']}} = 1 + R_{[m'n']}^+ \quad (4.162)$$

$$T_{(m'n')}^+ = \frac{Y_{1(m'n')}}{Y_{2(m'n')} + Y_{1(m'n')}} = 1 + R_{(m'n')}^+ \quad (4.163)$$

よって,

$$[T^+]_d = [U] + [R^+]_d \quad (4.164)$$

したがって, $[S_{21}]$ は,

$$\begin{aligned} [S_{21}] &= \left([U] + [R^+]_d \right) + [S_0] \left([U] + [R^+]_d \right) \\ &= \left([U] + [S_0] \right) \left([U] + [R^+]_d \right) \end{aligned} \quad (4.165)$$

同様にして, $[S_{12}]$ は,

$$[S_{12}] = \left([U] + [S_0] \right) \left([U] - [R^+]_d \right) \quad (4.166)$$

これより, 散乱行列 $[S]$ は,

$$\begin{aligned} [S] &= \begin{pmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[[R^+]_d + [S_0] \left([U] + [R^+]_d \right) \right] & \left[\left([U] + [S_0] \right) \left([U] - [R^+]_d \right) \right] \\ \left[\left([U] + [S_0] \right) \left([U] + [R^+]_d \right) \right] & \left[-[R^+]_d + [S_0] \left([U] - [R^+]_d \right) \right] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.167)$$

4.7 Roof-top 型部分領域基底関数による高速化

四角配列された FSS を対象とし, 電流分布を roof-top 型部分領域基底関数で展開する.

$$B_{xpq}(x, y) = \Lambda_{p+\frac{1}{2}}(x) \Xi_q(y) \quad (4.168)$$

$$B_{ypq}(x, y) = \Xi_p(x) \Lambda_{q+\frac{1}{2}}(y) \quad (4.169)$$

ここで, $\Lambda_p(x)$ は三角形を表す関数によって定義され,

$$\Lambda_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} \{x - (p-1)\Delta x\} & ((p-1)\Delta x \leq x \leq p\Delta x) \\ -\frac{1}{\Delta x} \{x - (p+1)\Delta x\} & (p\Delta x \leq x \leq (p+1)\Delta x) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4.170)$$

あるいは,

$$\Lambda_p(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - p\Delta x|}{\Delta x} & (|x - p\Delta x| \leq \Delta x) \\ 0 & (|x - p\Delta x| > \Delta x) \end{cases} \quad (4.171)$$

$\Lambda_q(y)$ も同様である． また， $\Xi_p(x)$ は方形を表す関数で，

$$\Xi_p(x) = \begin{cases} 1 & \left(|x - p\Delta x| \leq \frac{\Delta x}{2} \right) \\ 0 & \left(|x - p\Delta x| > \frac{\Delta x}{2} \right) \end{cases} \quad (4.172)$$

$\Xi_q(y)$ も同様である． これより， $\tilde{B}_{xpq}^{mn}$, $\tilde{B}_{ypq}^{mn}$ は，

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{xpq}^{mn} &= \int_S B_{xpq}(x, y) e^{-j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \\ &= \int_{(p-1/2)\Delta x}^{(p+3/2)\Delta x} \Lambda_{p+\frac{1}{2}}(x) e^{-jk_{xm}x} dx \int_{(q-1/2)\Delta y}^{(q+1/2)\Delta y} \Xi_q(y) e^{-jk_{ym}y} dy \end{aligned} \quad (4.173)$$

ここで， $x' \equiv x - (p + 1/2)\Delta x$, $y' \equiv y - q\Delta y$ とおくと，

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{xpq}^{mn} &= \left\{ \int_{-\Delta x}^0 \left(1 + \frac{x'}{\Delta x} \right) e^{-jk_{xm}x'} dx' + \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x'}{\Delta x} \right) e^{-jk_{xm}x'} dx' \right\} \\ &\quad \cdot \left(\int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} e^{-jk_{ym}y'} dy' \right) e^{-j(k_{xm}p\Delta x + k_{ym}q\Delta y)} e^{-jk_{xm}\frac{\Delta x}{2}} \\ &= \Delta x \left(\frac{\sin(k_{xm}\Delta x/2)}{k_{xm}\Delta x/2} \right)^2 \cdot \Delta y \frac{\sin(k_{ym}\Delta y/2)}{k_{ym}\Delta y/2} \cdot e^{-j(k_{xm}p\Delta x + k_{ym}q\Delta y)} e^{-jk_{xm}\frac{\Delta x}{2}} \\ &= \Delta x \Delta y \operatorname{sinc}^2 \left(k_{xm} \frac{\Delta x}{2} \right) \operatorname{sinc} \left(k_{ym} \frac{\Delta y}{2} \right) \cdot e^{-j(k_{xm}p\Delta x + k_{ym}q\Delta y)} e^{-jk_{xm}\frac{\Delta x}{2}} \\ &\equiv \tilde{B}_x^{mn} e^{-j(k_{xm}p\Delta x + k_{ym}q\Delta y)} e^{-jk_{xm}\frac{\Delta x}{2}} \end{aligned} \quad (4.174)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{ypq}^{mn} &= \Delta x \Delta y \operatorname{sinc} \left(k_{xm} \frac{\Delta x}{2} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(k_{ym} \frac{\Delta y}{2} \right) \cdot e^{-j(k_{xm}p\Delta x + k_{ym}q\Delta y)} e^{-jk_{ym}\frac{\Delta y}{2}} \\ &\equiv \tilde{B}_y^{mn} e^{-j(k_{xm}p\Delta x + k_{ym}q\Delta y)} e^{-jk_{ym}\frac{\Delta y}{2}} \end{aligned} \quad (4.175)$$

試行関数 T_{xkl} , T_{ykl} を，基底関数と同じ関数にとると， $\tilde{T}_{xkl}^{mn}$, $\tilde{T}_{ykl}^{mn}$ は，

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{xkl}^{mn} &= \Delta x \Delta y \operatorname{sinc}^2 \left(k_{xm} \frac{\Delta x}{2} \right) \operatorname{sinc} \left(k_{ym} \frac{\Delta y}{2} \right) \cdot e^{-j(k_{xm}k\Delta x + k_{ym}l\Delta y)} e^{-jk_{xm}\frac{\Delta x}{2}} \\ &\equiv \tilde{T}_x^{mn} e^{-j(k_{xm}k\Delta x + k_{ym}l\Delta y)} e^{-jk_{xm}\frac{\Delta x}{2}} \end{aligned} \quad (4.176)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ykl}^{mn} &= \Delta x \Delta y \operatorname{sinc} \left(k_{xm} \frac{\Delta x}{2} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(k_{ym} \frac{\Delta y}{2} \right) \cdot e^{-j(k_{xm}k\Delta x + k_{ym}l\Delta y)} e^{-jk_{ym}\frac{\Delta y}{2}} \\ &\equiv \tilde{T}_y^{mn} e^{-j(k_{xm}k\Delta x + k_{ym}l\Delta y)} e^{-jk_{ym}\frac{\Delta y}{2}} \end{aligned} \quad (4.177)$$

ただし,

$$\tilde{B}_x^{mn} = \tilde{T}_x^{mn} = \Delta x \Delta y \operatorname{sinc}^2 \left(k_{xm} \frac{\Delta x}{2} \right) \operatorname{sinc} \left(k_{yn} \frac{\Delta y}{2} \right) \quad (4.178)$$

$$\tilde{B}_y^{mn} = \tilde{T}_y^{mn} = \Delta x \Delta y \operatorname{sinc} \left(k_{xm} \frac{\Delta x}{2} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(k_{yn} \frac{\Delta y}{2} \right) \quad (4.179)$$

これより, $\tilde{T}_{xkl}^{mn*} \tilde{B}_{xpq}^{mn}$ は,

$$\tilde{T}_{xkl}^{mn*} \tilde{B}_{xpq}^{mn} = \tilde{T}_x^{mn*} \tilde{B}_x^{mn} \cdot e^{j(k_{xm}(k-p)\Delta x + k_{yn}(l-q)\Delta y)} \quad (4.180)$$

ここで, 単位セル内の x 方向および y 方向のメッシュの数を M_p , N_q とすると,

$$d_x = M_p \Delta x \quad (4.181)$$

$$d_y = N_q \Delta y \quad (4.182)$$

また,

$$\bar{p} \equiv k - p \quad (4.183)$$

$$\bar{q} \equiv l - q \quad (4.184)$$

とくと

$$k_{xm}(k-p)\Delta x = \left(\frac{2\pi m}{d_x} + k_x^{inc} \right) \bar{p} \Delta x = \left(\frac{2\pi m}{M_p} + k_x^{inc} \Delta x \right) \bar{p} \quad (4.185)$$

$$k_{yn}(l-q)\Delta y = \left(\frac{2\pi n}{d_y} + k_y^{inc} \right) \bar{q} \Delta y = \left(\frac{2\pi n}{N_q} + k_y^{inc} \Delta y \right) \bar{q} \quad (4.186)$$

より,

$$\tilde{T}_{xkl}^{mn*} \tilde{B}_{xpq}^{mn} = \tilde{T}_x^{mn*} \tilde{B}_x^{mn} e^{j2\pi \left(\frac{m\bar{p}}{M_p} + \frac{n\bar{q}}{N_q} \right)} W_{\bar{p}\bar{q}}^* \quad (4.187)$$

ただし,

$$W_{\bar{p}\bar{q}} \equiv e^{-j(k_x^{inc} \bar{p} \Delta x + k_y^{inc} \bar{q} \Delta y)} \quad (4.188)$$

同様にして, $\tilde{T}_{xkl}^{mn*} \tilde{B}_{ypq}^{mn}$, $\tilde{T}_{ykl}^{mn*} \tilde{B}_{xpq}^{mn}$, $\tilde{T}_{ykl}^{mn*} \tilde{B}_{ypq}^{mn}$ は,

$$\tilde{T}_{xkl}^{mn*} \tilde{B}_{ypq}^{mn} = \tilde{T}_x^{mn*} \tilde{B}_y^{mn} e^{jk_{xm} \frac{\Delta x}{2}} e^{-jk_{yn} \frac{\Delta y}{2}} e^{j2\pi \left(\frac{m\bar{p}}{M_p} + \frac{n\bar{q}}{N_q} \right)} W_{\bar{p}\bar{q}}^* \quad (4.189)$$

$$\tilde{T}_{ykl}^{mn*} \tilde{B}_{xpq}^{mn} = \tilde{T}_y^{mn*} \tilde{B}_x^{mn} e^{-jk_{xm} \frac{\Delta x}{2}} e^{jk_{yn} \frac{\Delta y}{2}} e^{j2\pi \left(\frac{m\bar{p}}{M_p} + \frac{n\bar{q}}{N_q} \right)} W_{\bar{p}\bar{q}}^* \quad (4.190)$$

また,

$$\tilde{T}_{ykl}^{mn*} \tilde{B}_{ypq}^{mn} = \tilde{T}_y^{mn*} \tilde{B}_y^{mn} e^{j2\pi \left(\frac{m\bar{p}}{M_p} + \frac{n\bar{q}}{N_q} \right)} W_{\bar{p}\bar{q}}^* \quad (4.191)$$

いま、簡単のため、導体損がない場合を考えると、行列要素 $z_{kl,pq}^{xx}$ は、

$$z_{kl,pq}^{xx} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{T}_{xkl}^{mn*} \tilde{G}_{xx}^{mn} \tilde{B}_{xpq}^{mn} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{T}_x^{mn*} \tilde{G}_{xx}^{mn} \tilde{B}_x^{mn} e^{j2\pi \left(\frac{m\bar{p}}{M_p} + \frac{n\bar{q}}{N_q} \right)} W_{\bar{p}\bar{q}}^* \quad (4.192)$$

ここで、整数 m' , n' を

$$m' = -\frac{M_p}{2}, -\frac{M_p}{2} + 1, \dots, \frac{M_p}{2} - 1 \quad (4.193)$$

$$n' = -\frac{N_q}{2}, -\frac{N_q}{2} + 1, \dots, \frac{N_q}{2} - 1 \quad (4.194)$$

で新たに定義し、

$$m \equiv m' + rM_p \quad (4.195)$$

$$n \equiv n' + sN_q \quad (4.196)$$

とおくと (r, s は整数),

$$\begin{aligned} e^{j2\pi \left(\frac{m\bar{p}}{M_p} + \frac{n\bar{q}}{N_q} \right)} &= e^{j2\pi \left(\frac{(m'+rM_p)\bar{p}}{M_p} + \frac{(n'+sN_q)\bar{q}}{N_q} \right)} = e^{j2\pi \left(\frac{m'\bar{p}}{M_p} + \frac{n'\bar{q}}{N_q} \right)} e^{j2\pi(r\bar{p}+s\bar{q})} \\ &= e^{j2\pi \left(\frac{m'\bar{p}}{M_p} + \frac{n'\bar{q}}{N_q} \right)} \end{aligned} \quad (4.197)$$

これより、行列要素 $z_{kl,pq}^{xx}$ は、

$$\begin{aligned} z_{kl,pq}^{xx} &= \frac{W_{\bar{p}\bar{q}}^*}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{T}_x^{mn*} \tilde{G}_{xx}^{mn} \tilde{B}_x^{mn} e^{j2\pi \left(\frac{m'\bar{p}}{M_p} + \frac{n'\bar{q}}{N_q} \right)} \\ &= \frac{W_{\bar{p}\bar{q}}^*}{d_x d_y} \sum_{m',n'} \left(\sum_{r,s} \tilde{T}_x^{mn*} \tilde{G}_{xx}^{mn} \tilde{B}_x^{mn} \right) e^{j2\pi \left(\frac{m'\bar{p}}{M_p} + \frac{n'\bar{q}}{N_q} \right)} \end{aligned} \quad (4.198)$$

ここで、

$$\tilde{g}_{m'n'}^{xx} \equiv \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_r \sum_s \tilde{T}_x^{mn*} \tilde{G}_{xx}^{mn} \tilde{B}_x^{mn} \quad (4.199)$$

とおくと、

$$z_{kl,pq}^{xx} = W_{\bar{p}\bar{q}}^* \frac{1}{M_p N_q} \sum_{m'=-\frac{M_p}{2}}^{\frac{M_p}{2}-1} \sum_{n'=-\frac{N_q}{2}}^{\frac{N_q}{2}-1} \tilde{g}_{m'n'}^{xx} e^{j2\pi \left(\frac{m'\bar{p}}{M_p} + \frac{n'\bar{q}}{N_q} \right)} = W_{\bar{p}\bar{q}}^* \text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{xx} \right] \quad (4.200)$$

同様にして、 $z_{kl,pq}^{xy}$ は、

$$z_{kl,pq}^{xy} = \frac{W_{\bar{p}\bar{q}}^*}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{T}_x^{mn*} \tilde{G}_{xy}^{mn} \tilde{B}_y^{mn} e^{j2\pi \left(\frac{m'\bar{p}}{M_p} + \frac{n'\bar{q}}{N_q} \right)} e^{j \left(k_{xm} \frac{\Delta x}{2} - k_{yn} \frac{\Delta y}{2} \right)} \quad (4.201)$$

ここで,

$$\tilde{g}_{m'n'}^{xy} \equiv \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_r \sum_s \tilde{T}_x^{mn*} \tilde{G}_{xy}^{mn} \tilde{B}_y^{mn} e^{j(k_{xm} \frac{\Delta x}{2} - k_{yn} \frac{\Delta y}{2})} \quad (4.202)$$

とおくと,

$$z_{kl,pq}^{xy} = W_{\bar{p}\bar{q}}^* \frac{1}{M_p N_q} \sum_{m'=-\frac{M_p}{2}}^{\frac{M_p}{2}-1} \sum_{n'=-\frac{N_q}{2}}^{\frac{N_q}{2}-1} \tilde{g}_{m'n'}^{xy} e^{j2\pi \left(\frac{m'\bar{p}}{M_p} + \frac{n'\bar{q}}{N_q} \right)} = W_{\bar{p}\bar{q}}^* \text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{xy} \right] \quad (4.203)$$

また, $z_{kl,pq}^{yx}$ は,

$$z_{kl,pq}^{yx} = \frac{W_{\bar{p}\bar{q}}^*}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{T}_y^{mn*} \tilde{G}_{yx}^{mn} \tilde{B}_x^{mn} e^{j2\pi \left(\frac{m'\bar{p}}{M_p} + \frac{n'\bar{q}}{N_q} \right)} e^{j(-k_{xm} \frac{\Delta x}{2} + k_{yn} \frac{\Delta y}{2})} \quad (4.204)$$

ここで,

$$\tilde{g}_{m'n'}^{yx} \equiv \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_r \sum_s \tilde{T}_y^{mn*} \tilde{G}_{yx}^{mn} \tilde{B}_x^{mn} e^{j(-k_{xm} \frac{\Delta x}{2} + k_{yn} \frac{\Delta y}{2})} \quad (4.205)$$

とおくと,

$$z_{kl,pq}^{yx} = W_{\bar{p}\bar{q}}^* \frac{1}{M_p N_q} \sum_{m'=-\frac{M_p}{2}}^{\frac{M_p}{2}-1} \sum_{n'=-\frac{N_q}{2}}^{\frac{N_q}{2}-1} \tilde{g}_{m'n'}^{yx} e^{j2\pi \left(\frac{m'\bar{p}}{M_p} + \frac{n'\bar{q}}{N_q} \right)} = W_{\bar{p}\bar{q}}^* \text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{yx} \right] \quad (4.206)$$

そして, $z_{kl,pq}^{yy}$ は,

$$z_{kl,pq}^{yy} = \frac{W_{\bar{p}\bar{q}}^*}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{T}_y^{mn*} \tilde{G}_{yy}^{mn} \tilde{B}_y^{mn} e^{j2\pi \left(\frac{m'\bar{p}}{M_p} + \frac{n'\bar{q}}{N_q} \right)} \quad (4.207)$$

ここで,

$$\tilde{g}_{m'n'}^{yy} \equiv \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_r \sum_s \tilde{T}_y^{mn*} \tilde{G}_{yy}^{mn} \tilde{B}_y^{mn} \quad (4.208)$$

とおくと,

$$z_{kl,pq}^{yy} = W_{\bar{p}\bar{q}}^* \frac{1}{M_p N_q} \sum_{m'=-\frac{M_p}{2}}^{\frac{M_p}{2}-1} \sum_{n'=-\frac{N_q}{2}}^{\frac{N_q}{2}-1} \tilde{g}_{m'n'}^{yy} e^{j2\pi \left(\frac{m'\bar{p}}{M_p} + \frac{n'\bar{q}}{N_q} \right)} = W_{\bar{p}\bar{q}}^* \text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{yy} \right] \quad (4.209)$$

よって,

$$\begin{aligned}
v_{xkl} &= \sum_{p=-\frac{M_p}{2}}^{\frac{M_p}{2}-1} \sum_{q=-\frac{N_q}{2}}^{\frac{N_q}{2}-1} \left(z_{kl,pq}^{xx} I_{xpq} + z_{kl,pq}^{xy} I_{ypq} \right) \\
&= \sum_{p=-\frac{M_p}{2}}^{\frac{M_p}{2}-1} \sum_{q=-\frac{N_q}{2}}^{\frac{N_q}{2}-1} W_{\bar{p}\bar{q}}^* \left(\text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{xx} \right] I_{xpq} + \text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{xy} \right] I_{ypq} \right)
\end{aligned} \tag{4.210}$$

$$\begin{aligned}
v_{ykl} &= \sum_{p=-\frac{M_p}{2}}^{\frac{M_p}{2}-1} \sum_{q=-\frac{N_q}{2}}^{\frac{N_q}{2}-1} \left(z_{kl,pq}^{yx} I_{xpq} + z_{kl,pq}^{yy} I_{ypq} \right) \\
&= \sum_{p=-\frac{M_p}{2}}^{\frac{M_p}{2}-1} \sum_{q=-\frac{N_q}{2}}^{\frac{N_q}{2}-1} W_{\bar{p}\bar{q}}^* \left(\text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{yx} \right] I_{xpq} + \text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{yy} \right] I_{ypq} \right)
\end{aligned} \tag{4.211}$$

成分を行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} v_{xkl} \\ v_{ykl} \end{pmatrix} = \sum_{p=-\frac{M_p}{2}}^{\frac{M_p}{2}-1} \sum_{q=-\frac{N_q}{2}}^{\frac{N_q}{2}-1} W_{\bar{p}\bar{q}}^* \left\{ \text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{g}_{m'n'}^{xx} & \tilde{g}_{m'n'}^{xy} \\ \tilde{g}_{m'n'}^{yx} & \tilde{g}_{m'n'}^{yy} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} I_{xpq} \\ I_{ypq} \end{pmatrix} \tag{4.212}$$

ここで, k, l は,

$$k = -\frac{M_p}{2}, -\frac{M_p}{2} + 1, \dots, \frac{M_p}{2} - 1 \tag{4.213}$$

$$l = -\frac{N_q}{2}, -\frac{N_q}{2} + 1, \dots, \frac{N_q}{2} - 1 \tag{4.214}$$

これより, 電流分布の未知係数 I_{xpq}, I_{ypq} は次式より求めることができる.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_x \\ \mathbf{I}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} Z_{xx} \\ Z_{yx} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{xy} \\ Z_{yy} \end{bmatrix} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \end{pmatrix} \tag{4.215}$$

また, $\bar{p} = k - p, \bar{q} = l - q$ より,

$$\begin{aligned}
W_{\bar{p}\bar{q}}^* &= e^{j(k_x^{inc} \bar{p} \Delta x + k_y^{inc} \bar{q} \Delta y)} = e^{j(k_x^{inc} k \Delta x + k_y^{inc} l \Delta y)} e^{-j(k_x^{inc} p \Delta x + k_y^{inc} q \Delta y)} \\
&= W_{kl}^* W_{pq}
\end{aligned} \tag{4.216}$$

そして,

$$\frac{m' \bar{p}}{M_p} + \frac{n' \bar{q}}{N_q} = \left(\frac{m' k}{M_p} + \frac{n' l}{N_q} \right) - \left(\frac{m' p}{M_p} + \frac{n' q}{N_q} \right) \tag{4.217}$$

これより,

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q} z_{kl,pq} I_{xpq} &= \sum_{p,q} W_{\bar{p}\bar{q}}^* \frac{1}{M_p N_q} \sum_{m',n'} \tilde{g}_{m'n'}^{xx} e^{j2\pi\left(\frac{m'\bar{p}}{M_p} + \frac{n'\bar{q}}{N_q}\right)} I_{xpq} \\
&= \sum_{p,q} W_{kl}^* W_{pq} \frac{1}{M_p N_q} \sum_{m',n'} \tilde{g}_{m'n'}^{xx} e^{j2\pi\left(\frac{m'k}{M_p} + \frac{n'l}{N_q}\right)} e^{-j2\pi\left(\frac{m'p}{M_p} + \frac{n'q}{N_q}\right)} I_{xpq} \\
&= \frac{W_{kl}^*}{M_p N_q} \sum_{m',n'} \tilde{g}_{m'n'}^{xx} \left(\sum_{p,q} W_{pq} I_{xpq} e^{-j2\pi\left(\frac{m'p}{M_p} + \frac{n'q}{N_q}\right)} \right) e^{j2\pi\left(\frac{m'k}{M_p} + \frac{n'l}{N_q}\right)} \quad (4.218)
\end{aligned}$$

上式の () は, FFT で計算でき, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q} z_{kl,pq} I_{xpq} &= \frac{W_{kl}^*}{M_p N_q} \sum_{m',n'} \tilde{g}_{m'n'}^{xx} \left(\text{FFT}_{m'n'} \left[W_{pq} I_{xpq} \right] \right) e^{j2\pi\left(\frac{m'k}{M_p} + \frac{n'l}{N_q}\right)} \\
&= W_{kl}^* \text{FFT}_{k,l}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{xx} \left(\text{FFT}_{m'n'} \left[W_{pq} I_{xpq} \right] \right) \right] \quad (4.219)
\end{aligned}$$

したがって,

$$v_{xkl} = W_{kl}^* \text{FFT}_{k,l}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{xx} \left(\text{FFT}_{m'n'} \left[W_{pq} I_{xpq} \right] \right) + \tilde{g}_{m'n'}^{xy} \left(\text{FFT}_{m'n'} \left[W_{pq} I_{ypq} \right] \right) \right] \quad (4.220)$$

$$v_{ykl} = W_{kl}^* \text{FFT}_{k,l}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{yx} \left(\text{FFT}_{m'n'} \left[W_{pq} I_{xpq} \right] \right) + \tilde{g}_{m'n'}^{yy} \left(\text{FFT}_{m'n'} \left[W_{pq} I_{ypq} \right] \right) \right] \quad (4.221)$$

成分を行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} v_{xkl} \\ v_{ykl} \end{pmatrix} = W_{k,l}^* \text{FFT}_{k,l}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \tilde{g}_{m'n'}^{xx} & \tilde{g}_{m'n'}^{xy} \\ \tilde{g}_{m'n'}^{yx} & \tilde{g}_{m'n'}^{yy} \end{pmatrix} \text{FFT}_{m'n'} \left\{ W_{pq} \begin{pmatrix} I_{xpq} \\ I_{ypq} \end{pmatrix} \right\} \right] \quad (4.222)$$

ここで, k, l は,

$$k = -\frac{M_p}{2}, -\frac{M_p}{2} + 1, \dots, \frac{M_p}{2} - 1 \quad (4.223)$$

$$l = -\frac{N_q}{2}, -\frac{N_q}{2} + 1, \dots, \frac{N_q}{2} - 1 \quad (4.224)$$

また, 導体損を考慮すると,

$$F_{x\bar{p}\bar{q}} \equiv \int_S T_{xkl}^* B_{xpq} dS = \delta_{lq} \begin{cases} \frac{2}{3} \Delta x \Delta y & (\bar{p} = 0) \\ \frac{1}{6} \Delta x \Delta y & (|\bar{p}| = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4.225)$$

$$F_{y\bar{p}\bar{q}} \equiv \int_S T_{ykl}^* B_{ypq} dS = \delta_{kp} \begin{cases} \frac{2}{3} \Delta x \Delta y & (\bar{q} = 0) \\ \frac{1}{6} \Delta x \Delta y & (|\bar{q}| = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4.226)$$

これより,

$$v_{xkl} = \sum_{p,q} \left\{ \left(W_{\bar{p}\bar{q}}^* \text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{xx} \right] - Z_s F_{x\bar{p}\bar{q}} \right) I_{xpq} + W_{\bar{p}\bar{q}}^* \text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{xy} \right] I_{ypq} \right\} \quad (4.227)$$

$$v_{ykl} = \sum_{p,q} \left\{ W_{\bar{p}\bar{q}}^* \text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{yx} \right] I_{xpq} + \left(W_{\bar{p}\bar{q}}^* \text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \left[\tilde{g}_{m'n'}^{yy} \right] - Z_s F_{y\bar{p}\bar{q}} \right) I_{ypq} \right\} \quad (4.228)$$

成分を行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} v_{xkl} \\ v_{ykl} \end{pmatrix} = \sum_{p=-\frac{M_p}{2}}^{\frac{M_p}{2}-1} \sum_{q=-\frac{N_q}{2}}^{\frac{N_q}{2}-1} \left\{ W_{\bar{p}\bar{q}}^* \text{FFT}_{\bar{p}\bar{q}}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{g}_{m'n'}^{xx} & \tilde{g}_{m'n'}^{xy} \\ \tilde{g}_{m'n'}^{yx} & \tilde{g}_{m'n'}^{yy} \end{pmatrix} - Z_s \begin{pmatrix} F_{x\bar{p}\bar{q}} & 0 \\ 0 & F_{y\bar{p}\bar{q}} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} I_{xpq} \\ I_{ypq} \end{pmatrix} \quad (4.229)$$

また,

$$\begin{pmatrix} v_{xkl} \\ v_{ykl} \end{pmatrix} = W_{k,l}^* \text{FFT}_{k,l}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \tilde{g}_{m'n'}^{xx} & \tilde{g}_{m'n'}^{xy} \\ \tilde{g}_{m'n'}^{yx} & \tilde{g}_{m'n'}^{yy} \end{pmatrix} \text{FFT}_{m'n'} \left\{ W_{pq} \begin{pmatrix} I_{xpq} \\ I_{ypq} \end{pmatrix} \right\} \right] - Z_s \begin{pmatrix} F_{x\bar{p}\bar{q}} & 0 \\ 0 & F_{y\bar{p}\bar{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xpq} \\ I_{ypq} \end{pmatrix} \quad (4.230)$$

4.8 スロット結合パッチアレー FSS

$z = d$ および $z = -d$ の両面にパッチアレー (パッチ領域を面 S_1 , 面 S_2 とする), $z = 0$ にスロット (スロット領域を面 S_3 とする) を設けた地導体板からなる周波数選択板 (FSS) を考える. このとき, $0 < z < d$ に比誘電率 ϵ_1 , $-d < z < 0$ に比誘電率 ϵ_1 の誘電体基板で各々パッチを支持するものとする. いま, FSS に平面波 (電界 $\mathbf{E}_i$, 磁界 $\mathbf{H}_i$) を入射させると, パッチ上に電流, スロットに磁流が誘起される. 等価定理より, パッチのかわりに誘電体基板上に等価電流源, スロットのかわりに地導体板上に等価磁流源を考え, 生じる散乱電磁界を $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ とする. また, 入射波によって生じる誘電体基板および地導体板による反射波を $\mathbf{E}_r$, $\mathbf{H}_r$ とすると, 一般に, 全電界 $\mathbf{E}$ および全磁界 $\mathbf{H}$ は,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_s \quad (4.231)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_s \quad (4.232)$$

ただし、FSS の透過波 $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ については、入射波および反射波の寄与がないことから、散乱波 $\mathbf{E}'_s$, $\mathbf{H}'_s$ のみで次のようになる。

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_s \quad (4.233)$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}'_s \quad (4.234)$$

また、境界条件は、境界面の接線成分を添え字 tan で表すと、

$$\mathbf{E}_{\text{tan}} = 0 \quad (\text{on } S_1) \quad (4.235)$$

$$\mathbf{H}_{\text{tan}} = \mathbf{H}'_{\text{tan}} \quad (\text{on } S_3) \quad (4.236)$$

$$\mathbf{E}'_{\text{tan}} = 0 \quad (\text{on } S_2) \quad (4.237)$$

これより、

$$\mathbf{E}_{i,\text{tan}}|_{S_1} + \mathbf{E}_{r,\text{tan}}|_{S_1} + \mathbf{E}_{s,\text{tan}}|_{S_1} = 0 \quad (\text{on } S_1) \quad (4.238)$$

$$\mathbf{H}_{i,\text{tan}}|_{S_3} + \mathbf{H}_{r,\text{tan}}|_{S_3} + \mathbf{H}_{s,\text{tan}}|_{S_3} = \mathbf{H}'_{s,\text{tan}}|_{S_3} \quad (\text{on } S_3) \quad (4.239)$$

$$\mathbf{E}'_{s,\text{tan}}|_{S_2} = 0 \quad (\text{on } S_2) \quad (4.240)$$

散乱電界 $\mathbf{E}_{s,\text{tan}}|_{S_1}$ は、パッチ領域の面 S_1 の等価電流源 $\mathbf{J}_{s1}$ およびスロット領域の面 S_3 上の等価磁流源 $\mathbf{M}_s$ より、

$$\mathbf{E}_{s,\text{tan}}|_{S_1} = \mathbf{E}_{s,\text{tan}}(\mathbf{J}_{s1})|_{S_1} + \mathbf{E}_{s,\text{tan}}(\mathbf{M}_s)|_{S_1} \quad (4.241)$$

ここで、

$$\mathbf{E}_{s,\text{tan}}(\mathbf{J}_{s1})|_{S_1} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ(0)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_{s1}(\mathbf{k}_{tmn}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.242)$$

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ(0)}(\mathbf{k}_{tmn}) = \widetilde{G}_{xx}^{EJ} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{xy}^{EJ} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \widetilde{G}_{yx}^{EJ} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{yy}^{EJ} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y \quad (4.243)$$

グリーン関数は先に示したとおりであるので、ここでは省略する。また、

$$\mathbf{E}_{s,\text{tan}}(\mathbf{M}_s)|_{S_1} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EM(d)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_s(\mathbf{k}_{tmn}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.244)$$

グリーン関数は、

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EM(d)}(\mathbf{k}_{tmn}) = \widetilde{G}_{xx}^{EM} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{xy}^{EM} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \widetilde{G}_{yx}^{EM} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \widetilde{G}_{yy}^{EM} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y \quad (4.245)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{xx}^{EM} &= -\tilde{G}_{yy}^{EM} \\ &= -\frac{jk_{xmn}k_{ymn}(\epsilon_r - 1) \sin k_{zmn}d}{T_e^{(mn)}T_m^{(mn)}}\end{aligned}\quad (4.246)$$

$$\tilde{G}_{xy}^{EM} = \frac{k_{zmn}}{T_e^{(mn)}} - \frac{jk_{xmn}^2(\epsilon_r - 1) \sin k_{zmn}d}{T_e^{(mn)}T_m^{(mn)}}\quad (4.247)$$

$$\tilde{G}_{yx}^{EM} = -\frac{k_{zmn}}{T_e^{(mn)}} + \frac{jk_{ymn}^2(\epsilon_r - 1) \sin k_{zmn}d}{T_e^{(mn)}T_m^{(mn)}}\quad (4.248)$$

ただし,

$$T_e^{(mn)} = k_{zmn} \cos k_{zmn}d + jk_{zmn}^{(air)} \sin k_{zmn}d\quad (4.249)$$

$$T_m^{(mn)} = k_{zmn}^{(air)}\epsilon_r \cos k_{zmn}d + jk_{zmn} \sin k_{zmn}d\quad (4.250)$$

逆に, 散乱電界 $\mathbf{E}'_{s,\tan}|_{S_2}$ は, パッチ領域の面 S_2 の等価電流源 $\mathbf{J}_{s2}$ およびスロット領域の面 S_3 下の等価磁流源 $-\mathbf{M}_s$ より,

$$\mathbf{E}'_{s,\tan}|_{S_2} = \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{J}_{s2})|_{S_2} + \mathbf{E}_{s,\tan}(-\mathbf{M}_s)|_{S_2}\quad (4.251)$$

ここで,

$$\mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{J}_{s2})|_{S_2} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ(0)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{s2}(\mathbf{k}_{tmn}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}}\quad (4.252)$$

$$\mathbf{E}_{s,\tan}(-\mathbf{M}_s)|_{S_2} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EM(d)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot (-\tilde{\mathbf{M}}_s(\mathbf{k}_{tmn})) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}}\quad (4.253)$$

また, 散乱磁界 $\mathbf{H}_{s,\tan}|_{S_3}$ ($z = 0_+$) は, パッチ領域の面 S_1 の等価電流源 $\mathbf{J}_{s1}$ およびスロット領域の面 S_3 上の等価磁流源 $\mathbf{M}_s$ より,

$$\mathbf{H}_{s,\tan}|_{S_3} = \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{J}_{s1})|_{S_3} + \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{M}_s)|_{S_3}\quad (4.254)$$

ここで,

$$\mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{J}_{s1})|_{S_3} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{HJ(d)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{s1}(\mathbf{k}_{tmn}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}}\quad (4.255)$$

グリーン関数は,

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{HJ(d)}(\mathbf{k}_{tmn}) = \tilde{G}_{xx}^{HJ} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{xy}^{HJ} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \tilde{G}_{yx}^{HJ} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{yy}^{HJ} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y\quad (4.256)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{xx}^{HJ} &= -\tilde{G}_{yy}^{HJ} \\
&= \frac{jk_{xmn}k_{ymn}(\epsilon_r - 1) \sin k_{zmn}d}{T_e^{(mn)}T_m^{(mn)}} \\
&= -\tilde{G}_{xx}^{EM} \\
&= \tilde{G}_{yy}^{EM}
\end{aligned} \tag{4.257}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{xy}^{HJ} &= \frac{k_{zmn}}{T_e^{(mn)}} - \frac{jk_{ymn}^2(\epsilon_r - 1) \sin k_{zmn}d}{T_e^{(mn)}T_m^{(mn)}} \\
&= -\tilde{G}_{yx}^{EM}
\end{aligned} \tag{4.258}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{yx}^{HJ} &= -\frac{k_{zmn}}{T_e^{(mn)}} + \frac{jk_{xmn}^2(\epsilon_r - 1) \sin k_{zmn}d}{T_e^{(mn)}T_m^{(mn)}} \\
&= -\tilde{G}_{xy}^{EM}
\end{aligned} \tag{4.259}$$

また,

$$\mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{M}_s) \Big|_{S_3} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{HM(0)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_s(\mathbf{k}_{tmn}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \tag{4.260}$$

グリーン関数は,

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{HM(0)}(\mathbf{k}_{tmn}) = \tilde{G}_{xx}^{HM} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{xy}^{HM} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \tilde{G}_{yx}^{HM} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \tilde{G}_{yy}^{HM} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y \tag{4.261}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{xx}^{HM} &= -\frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_r k_{ymn}^2}{k_{tmn}^2 k_{zmn} T_m^{(mn)}} \left(k_{zmn}^{(air)} \epsilon_r \sin k_{zmn}d - jk_{zmn} \cos k_{zmn}d \right) \\
&\quad - \frac{jk_{zmn} k_{xmn}^2}{\omega\mu_0 k_{tmn}^2 T_e^{(mn)}} \left(k_{zmn} \sin k_{zmn}d - jk_{zmn}^{(air)} \cos k_{zmn}d \right)
\end{aligned} \tag{4.262}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{xy}^{HM} &= \frac{k_{xmn} k_{ymn}}{k_{tmn}^2} \left\{ \frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}{k_{zmn} T_m^{(mn)}} \left(k_{zmn}^{(air)} \epsilon_r \sin k_{zmn}d - jk_{zmn} \cos k_{zmn}d \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{jk_{zmn}}{\omega\mu_0 T_e^{(mn)}} \left(k_{zmn} \sin k_{zmn}d - jk_{zmn}^{(air)} \cos k_{zmn}d \right) \right\} \\
&= \tilde{G}_{yx}^{HM}
\end{aligned} \tag{4.263}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{yy}^{HM} &= -\frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_r k_{xmn}^2}{k_{tmn}^2 k_{zmn} T_m^{(mn)}} \left(k_{zmn}^{(air)} \epsilon_r \sin k_{zmn}d - jk_{zmn} \cos k_{zmn}d \right) \\
&\quad - \frac{jk_{zmn} k_{ymn}^2}{\omega\mu_0 k_{tmn}^2 T_e^{(mn)}} \left(k_{zmn} \sin k_{zmn}d - jk_{zmn}^{(air)} \cos k_{zmn}d \right)
\end{aligned} \tag{4.264}$$

散乱磁界 $\mathbf{H}'_{s,\tan}|_{S_3}$ ($z = 0_-$) は、パッチ領域の面 S_2 の等価電流源 $\mathbf{J}_{s2}$ およびスロット領域の面 S_3 下の等価磁流源 $-\mathbf{M}_s$ より、

$$\mathbf{H}'_{s,\tan}|_{S_3} = \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{J}_{s2})|_{S_3} + \mathbf{H}_{s,\tan}(-\mathbf{M}_s)|_{S_3} \quad (4.265)$$

ここで、

$$\mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{J}_{s2})|_{S_3} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{HJ(d)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_{s2}(\mathbf{k}_{tmn}) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.266)$$

$$\mathbf{H}_{s,\tan}(-\mathbf{M}_s)|_{S_3} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{HM(0)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot (-\widetilde{\mathbf{M}}_s(\mathbf{k}_{tmn})) e^{j\mathbf{k}_{tmn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (4.267)$$

4.8.1 ガラーキン法

電流 $\mathbf{J}_{s1}(x, y)$, $\mathbf{J}_{s2}(x, y)$, 磁流 $\mathbf{M}_s(x, y)$ を、基底関数 $\mathbf{f}_i^{J1}$, $\mathbf{f}_i^{J2}$, $\mathbf{f}_i^M$ を用いて次のように展開する。

$$\mathbf{J}_{s1}(x, y) = \sum_i I_{1,i} \mathbf{f}_i^{J1}(x, y) \quad (4.268)$$

$$\mathbf{J}_{s2}(x, y) = \sum_i I_{2,i} \mathbf{f}_i^{J2}(x, y) \quad (4.269)$$

$$\mathbf{M}_s(x, y) = \sum_i I_{3,i} \mathbf{f}_i^M(x, y) \quad (4.270)$$

パッチ S_1 上の境界条件の式の両辺に、そのパッチの電流に関わる基底関数 $\mathbf{f}_j^{J1*}$ を乗じて面 S_1 にわたって積分すると、

$$\int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \mathbf{E}_{i,\tan} dS_1 + \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \mathbf{E}_{r,\tan} dS_1 + \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \mathbf{E}_{s,\tan} dS_1 = 0 \quad (4.271)$$

上式の第 1 項は、

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \mathbf{E}_{i,\tan} dS_1 &= \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \mathbf{E}_{i,0}|_{S_1} e^{jk(k_x x + k_y y)} dS_1 \\ &= \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*}(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} dS_1 \cdot \mathbf{E}_{i,0}|_{S_1} \\ &= \widetilde{\mathbf{f}}_j^{J1*}(k_x, k_y) \cdot \mathbf{E}_{i,0}|_{S_1} \end{aligned} \quad (4.272)$$

また、第 2 項は、

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \mathbf{E}_{r,\tan} dS_1 &= \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \mathbf{E}_{r,0}|_{S_1} e^{jk(k_x x + k_y y)} dS_1 \\ &= \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*}(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} dS_1 \cdot \mathbf{E}_{r,0}|_{S_1} \\ &= \widetilde{\mathbf{f}}_j^{J1*}(k_x, k_y) \cdot \mathbf{E}_{r,0}|_{S_1} \end{aligned} \quad (4.273)$$

いま,

$$V_{1,j} \equiv -\tilde{\mathbf{f}}_j^{J1*}(k_x, k_y) \cdot \left(\mathbf{E}_{i,0}|_{S_1} + \mathbf{E}_{r,0}|_{S_1} \right) \quad (4.274)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} V_{1,j} &= \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \mathbf{E}_{s,\tan} dS_1 \\ &= \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \left(\mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{J}_{s1})|_{S_1} + \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{M}_s)|_{S_1} \right) dS_1 \\ &= \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \sum_i I_{1,i} \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^{J1}) dS_1 + \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \sum_i I_{3,i} \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^M) dS_1 \\ &= \sum_i I_{1,i} \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^{J1}) dS_1 + \sum_i I_{3,i} \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^M) dS_1 \\ &\equiv \sum_i I_{1,i} z_{ji}^{11} + \sum_i I_{3,i} z_{ji}^{13} \end{aligned} \quad (4.275)$$

ここで,

$$z_{ji}^{11} = \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1*} \cdot \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^{J1}) dS_1 \quad (4.276)$$

$$z_{ji}^{13} = \int_{S_1} \mathbf{f}_j^{J1} \cdot \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^M) dS_1 \quad (4.277)$$

次に, スロット S_3 上の境界条件の式の両辺に, そのスロットの磁流に関わる基底関数 $\mathbf{f}_j^M$ を乗じて面 S_3 にわたって積分すると,

$$\begin{aligned} &\int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{i,\tan} dS_3 + \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{r,\tan} dS_3 + \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{s,\tan} dS_3 \\ &= \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}'_{s,\tan} dS_3 \end{aligned} \quad (4.278)$$

上式の第 1 項は,

$$\begin{aligned} \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{i,\tan} dS_3 &= \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{i,0}|_{S_3} e^{jk(k_x x + k_y y)} dS_3 \\ &= \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*}(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} dS_3 \cdot \mathbf{H}_{i,0}|_{S_3} \\ &= \tilde{\mathbf{f}}_j^{M*}(k_x, k_y) \cdot \mathbf{H}_{i,0}|_{S_3} \end{aligned} \quad (4.279)$$

また, 第 2 項は, 同様にして,

$$\int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{r,\tan} dS_3 = \tilde{\mathbf{f}}_j^{M*}(k_x, k_y) \cdot \mathbf{H}_{r,0}|_{S_3} \quad (4.280)$$

いま,

$$V_{3,j} \equiv -\tilde{\mathbf{f}}_j^{M*}(k_x, k_y) \cdot \left(\mathbf{H}_{i,0} \Big|_{S_3} + \mathbf{H}_{r,0} \Big|_{S_3} \right) \quad (4.281)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} V_{3,j} &= \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{s,\tan} dS_3 - \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}'_{s,\tan} dS_3 \\ &= \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \left(\mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{J}_{s1}) \Big|_{S_3} + \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{M}_s) \Big|_{S_3} \right) dS_3 \\ &\quad - \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \left(\mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{J}_{s2}) \Big|_{S_3} + \mathbf{H}_{s,\tan}(-\mathbf{M}_s) \Big|_{S_3} \right) dS_3 \\ &= \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{J}_{s1}) dS_3 - \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{J}_{s2}) dS_3 + 2 \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{M}_s) dS_3 \\ &= \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \sum_i I_{1,i} \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^{J1}) dS_3 - \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \sum_i I_{2,i} \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^{J2}) dS_3 \\ &\quad + 2 \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \sum_i I_{3,i} \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^M) dS_3 \\ &= \sum_i I_{1,i} \left(\int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^{J1}) dS_3 \right) + \sum_i I_{2,i} \left(- \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^{J2}) dS_3 \right) \\ &\quad + \sum_i I_{3,i} \left(2 \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^M) dS_3 \right) \\ &\equiv \sum_i I_{1,i} z_{ji}^{31} + \sum_i I_{2,i} z_{ji}^{32} + \sum_i I_{3,i} z_{ji}^{33} \end{aligned} \quad (4.282)$$

ここで,

$$z_{ji}^{31} = \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^{J1}) dS_3 \quad (4.283)$$

$$z_{ji}^{32} = - \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^{J2}) dS_3 \quad (4.284)$$

$$z_{ji}^{33} = 2 \int_{S_3} \mathbf{f}_j^{M*} \cdot \mathbf{H}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^M) dS_3 \quad (4.285)$$

パッチ S_2 上の境界条件の式の両辺に, そのパッチの電流に関わる基底関数 $\mathbf{f}_{2,j}$ を乗じて面 S_2 にわたって積分すると,

$$\int_{S_2} \mathbf{E}'_{s,\tan} \cdot \mathbf{f}_{2,j} dS_2 = 0 \quad (4.286)$$

同様に $V_{2,j} \equiv 0$ を定義し,

$$\begin{aligned}
V_{2,j} &= - \int_{S_2} \mathbf{f}_j^{J2*} \cdot \left(\mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{J}_{s2}) \Big|_{S_2} + \mathbf{E}_{s,\tan}(-\mathbf{M}_s) \Big|_{S_2} \right) dS_2 \\
&= - \int_{S_2} \mathbf{f}_j^{J2*} \cdot \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{J}_{s2}) dS_2 + \int_{S_2} \mathbf{f}_j^{J2*} \cdot \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{M}_s) dS_2 \\
&= - \int_{S_2} \mathbf{f}_j^{J2*} \cdot \sum_i I_{2,i} \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^{J2}) dS_2 + \int_{S_2} \mathbf{f}_j^{J2*} \cdot \sum_i I_{3,i} \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^M) dS_2 \\
&= \sum_i I_{2,i} \left(- \int_{S_2} \mathbf{f}_j^{J2*} \cdot \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^{J2}) dS_2 \right) + \sum_i I_{3,i} \left(\int_{S_2} \mathbf{f}_j^{J2*} \cdot \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^M) dS_2 \right) \\
&\equiv \sum_i I_{2,i} z_{ji}^{22} + \sum_i I_{3,i} z_{ji}^{23} \tag{4.287}
\end{aligned}$$

ここで,

$$z_{ji}^{22} = - \int_{S_2} \mathbf{f}_j^{J2*} \cdot \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^{J2}) dS_2 \tag{4.288}$$

$$z_{ji}^{23} = \int_{S_2} \mathbf{f}_j^{J2*} \cdot \mathbf{E}_{s,\tan}(\mathbf{f}_i^M) dS_2 \tag{4.289}$$

積分を実行して, グリーン関数を用いて表すと,

$$z_{ji}^{11} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{\mathbf{f}}_j^{J1*}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ(0)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_i^{J1}(\mathbf{k}_{tmn}) \tag{4.290}$$

$$z_{ji}^{12} = 0 \tag{4.291}$$

$$z_{ji}^{21} = 0 \tag{4.292}$$

$$z_{ji}^{13} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{\mathbf{f}}_j^{J1*}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EM(d)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_i^M(\mathbf{k}_{tmn}) \tag{4.293}$$

$$z_{ji}^{22} = - \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{\mathbf{f}}_j^{J2*}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EJ(0)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_i^{J2}(\mathbf{k}_{tmn}) \tag{4.294}$$

$$z_{ji}^{23} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{\mathbf{f}}_j^{J2*}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{EM(d)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_i^M(\mathbf{k}_{tmn}) \tag{4.295}$$

$$z_{ji}^{31} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{\mathbf{f}}_j^{M*}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{HJ(d)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_i^{J1}(\mathbf{k}_{tmn}) \tag{4.296}$$

$$z_{ji}^{32} = - \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{\mathbf{f}}_j^{M*}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{HJ(d)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_i^{J2}(\mathbf{k}_{tmn}) \tag{4.297}$$

$$z_{ji}^{33} = \frac{2}{d_x d_y} \sum_{m,n} \tilde{\mathbf{f}}_j^{M*}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \widetilde{\widetilde{\mathbf{G}}}_T^{HM(0)}(\mathbf{k}_{tmn}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_i^M(\mathbf{k}_{tmn}) \tag{4.298}$$

行列表示式は,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{12} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{13} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z_{21} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z_{31} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{33} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \quad (4.299)$$

ただし,

$$z_{ji}^{12} = z_{ji}^{21} = 0 \quad (4.300)$$

したがって, 次式を解けば電磁流分布を求めることができる.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{12} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{13} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z_{21} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z_{31} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{33} \end{bmatrix} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{pmatrix} \quad (4.301)$$