

電磁波工学特論

Advanced Lectures in Electromagnetic-Wave Theory

出口 博之

(Hiroyuki Deguchi)

同志社大学

2025年7月14日

目次

第1章 はじめに	1
1.1 電磁波超入門	1
1.1.1 磁気的ベクトルポテンシャル	1
1.1.2 双対性	2
1.1.3 平面波	3
1.2 TE 波と TM 波	4
1.2.1 z 軸方向に関する TE 波	5
1.2.2 z 軸方向に関する TM 波	6
1.2.3 平面波と TE 波・TM 波との関係	7
1.3 ポアソンの方程式とグリーン関数	7
1.3.1 静電場のスカラポテンシャル	7
1.3.2 ディラックのデルタ関数	8
1.3.3 グリーン関数	9
1.4 自由空間のスカラー・グリーン関数	10
1.4.1 単位電流源	10
1.4.2 球波動関数	11
1.4.3 単位電流源によるベクトルポテンシャル	12
1.4.4 任意電流分布によるベクトルポテンシャル	14
1.5 体積等価定理	14
1.5.1 等価電磁流源	14
1.5.2 良導体	15
1.6 ポクリントンの積分方程式	16
1.7 ハレンの積分方程式	19
1.7.1 ハレンの積分方程式の導出	19
1.8 無限空間における相反定理	22
1.8.1 ローレンツの相反定理	22

1.8.2 リアクション	23
1.9 相反定理の応用	24
1.9.1 等価定理	24
1.9.2 電磁流源がある場合の相反定理	25
1.9.3 磁流がない場合	26
1.10 グリーンの第二定理に基づく積分表示	27
1.10.1 グリーンの定理	27
1.10.2 電流源による電磁界の積分表示式	28
1.11 電磁界の積分表示式について	30
1.11.1 ベクトルポテンシャルを基にした電磁界の積分表示式の導出	30
1.11.2 積分表示式の変形	31
1.12 モード関数の直交性	33
1.12.1 ローレンツの相反定理	33
1.12.2 モードの直交性の導出	34
1.13 モード電圧・電流によるインピーダンス行列	37
1.13.1 無損失な場合	37
1.13.2 相反回路	39
1.14 電磁界の境界条件	42
1.14.1 磁界の境界条件（面電流がある場合）	42
1.14.2 電界の境界条件（面磁流がある場合）	43
1.15 影像法	43
1.15.1 完全電気導体	43
1.15.2 完全磁気導体	46
1.16 平面波の反射・透過	49
1.16.1 平面波の表示	49
1.16.2 境界面での反射・透過	52
1.16.3 相対屈折率	53
1.16.4 入射角を考慮した実効比誘電率	54
1.16.5 単層誘電体板における反射・透過	54
1.16.6 多層誘電体板における反射・透過	56
第2章 電磁波の積分表示	59
2.1 ストラットンの定理	59
2.2 波源があるときのベクトル・ヘルムホルツ方程式	60
2.2.1 磁流源の導入	60

2.2.2	電磁流源がある場合の双対性	61
2.3	電磁界の一般的な積分表示式	61
2.3.1	ストラットンの定理を基にした積分	61
2.3.2	波源による電磁界の積分表示式	67
2.3.3	等価波源	68
2.3.4	等価波源がある場合の双対性	68
2.4	無限空間での電磁界の積分表示式	69
2.4.1	閉曲面 S 内部の領域 V	69
2.4.2	放射条件	70
2.4.3	無限空間における電磁界	71
2.5	波源の 3 次元分布による放射電磁界	73
2.5.1	$(\mathbf{J} \cdot \nabla) \nabla \psi$	73
2.5.2	類似のベクトル演算	76
2.5.3	一般的な電磁界の積分表示式	76
2.5.4	放射界近似	76
2.6	閉曲面上の 2 次波源による放射電磁界	77
2.6.1	面電磁流源による放射電磁界	77
2.6.2	面電磁流源による遠方界領域の放射電磁界	78
2.7	境界線上の連続条件	80
2.7.1	電荷の保存則（連続の式）	80
2.7.2	面電流分布の不連続	80
2.7.3	線電荷, 線磁荷の周回積分による電磁界	81
2.8	開口面法	81
2.8.1	有限の開口面分布による電磁界の積分表示式	82
2.8.2	ベクトルの勾配	83
2.8.3	開口面法（任意の曲面）	84
2.9	平面開口面分布と放射界の関係	86
2.9.1	平面開口面分布	86
2.9.2	平面開口面分布に対する開口面法	87
2.9.3	主偏波成分, 交差偏波成分	88
2.10	フラウンホーファ領域とフレネル領域	90
2.10.1	フラウンホーファ領域放射電界	90
2.10.2	フレネル領域放射電界	91
第 3 章	スカラー・グリーン関数	93

3.1	Sturm-Liouville 方程式	93
3.1.1	固有値, 固有関数	93
3.1.2	直交性	95
3.2	グリーン関数の求め方	96
3.2.1	グリーン関数を求める方法 I (固有関数による展開)	96
3.2.2	グリーン関数を求める方法 II (区間の分割)	97
3.3	境界値問題の解	99
3.4	グリーン関数の導出例	101
3.4.1	固有関数	101
3.4.2	固有関数展開によるグリーン関数 (方法 I)	103
3.4.3	方法 II によるグリーン関数の導出	104
3.5	グリーン関数の複素積分	106
3.5.1	固有関数展開したグリーン関数 (方法 I) の複素積分	106
3.5.2	グリーン関数 (方法 II) の複素積分	106
3.6	1 次元グリーン関数の複素積分による 3 次元グリーン関数	108
第 4 章	ダイアディック・グリーン関数	113
4.1	ダイアディック関数	113
4.1.1	ダイアディックとは	113
4.1.2	ダイアディックの転置など	114
4.2	ダイアディック解析	115
4.2.1	ダイアディック解析におけるスカラ積	115
4.2.2	ダイアディック解析におけるベクトル積	117
4.2.3	ダイアディック解析における 3 重積	117
4.2.4	ダイアディックの発散	118
4.2.5	ダイアディックの回転	118
4.2.6	ベクトルの勾配	119
4.3	グリーンの定理の導出	119
4.3.1	ベクトル形式のグリーンの定理	119
4.3.2	ベクトル・ダイアディック形式のグリーンの定理	120
4.3.3	ダイアディック形式のグリーンの定理	121
4.4	ダイアディック・グリーン関数の定義	122
4.4.1	ダイアディック形式の Maxwell の方程式	122
4.4.2	ダイアディック・グリーン関数の定義	123
4.4.3	ダイアディック・グリーン関数の境界条件	124

4.5	ダイアディック・グリーン関数を用いた電磁界の積分表示式	125
4.6	自由空間中のダイアディック・グリーン関数の導出	127
4.6.1	自由空間のスカラー・グリーン関数	128
4.6.2	自由空間の電界に対するダイアディック・グリーン関数	128
4.6.3	自由空間の磁界に対するダイアディック・グリーン関数	129
4.7	自由空間中のダイアディック・グリーン関数の対称性	129
4.8	自由空間中のダイアディック・グリーン関数による電磁界	131
4.9	第1種および第2種ダイアディック・グリーン関数	132
4.9.1	第1種電界型ダイアディック・グリーン関数（完全導体）	132
4.9.2	第1種電界型ダイアディック・グリーン関数（開口面）	133
4.9.3	第2種電界型ダイアディック・グリーン関数	134
4.9.4	第1種および第2種磁界型ダイアディック・グリーン関数	135
4.10	第3種ダイアディック・グリーン関数	135
4.10.1	異なる媒質の一方に電流源がある場合のダイアディック・グリーン 関数	135
4.10.2	電流源のある領域 #1 について	137
4.10.3	電流源のない領域 #2 について	138
4.10.4	領域 #2 に電流源がある場合	140
4.10.5	第3種ダイアディック・グリーン関数の対称性	140
第5章	モーメント法	141
5.1	モーメント法とは	141
5.1.1	線形空間と演算子	141
5.1.2	重み付き残差法	143
5.1.3	マトリクス方程式	144
5.2	ガラーキン法	146
5.3	グリーン関数	148
5.3.1	逆作用素	148
5.3.2	グリーン関数の導出例	149
5.4	線状導体の散乱問題（点整合法）	150
5.4.1	差分近似	150
5.5	放射および散乱特性	156
5.5.1	遠方放射電界	156
5.5.2	アンテナ利得	156
5.5.3	アンテナの入力アドミタンス	157

5.5.4	散乱断面積	157
5.6	線状導体の散乱問題（ガラーキン法）	158
5.6.1	マトリクス方程式	158
5.6.2	マトリクス要素の計算	160
5.6.3	基底関数	161
5.7	Rao-Wilton-Glisson (RWG) 基底関数	162
5.7.1	RWG 基底関数の定義	162
5.7.2	ガラーキン法	164
5.7.3	ポテンシャル積分	166
5.7.4	マトリクス方程式	167
5.8	RWG 基底関数を用いたポテンシャル積分について	169
5.8.1	3 角形領域の積分について	171
5.8.2	特異点を含む積分について	172
5.8.3	周回積分への変換	173
5.9	3 角形領域の別の積分について	177
5.9.1	3 角形頂点が特異点となる場合	178
5.9.2	3 角形領域内部に特異点がある場合の積分	179
5.9.3	3 角形領域の辺上に特異点がある場合の積分	180
5.10	Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai (PMCHWT) 積分方程式	180
5.10.1	観測点が境界面にない場合	181
5.10.2	観測点が境界面にある場合	181
5.10.3	入射波がある場合	183
5.10.4	完全導体による散乱問題（面積分方程式）	184
5.10.5	誘電体による散乱問題（面積分方程式）	185
5.11	2 次元問題に対する PMCHWT 面積分方程式	188
5.11.1	2 次元問題（TE あるいは TM）	188
5.11.2	2 次元問題に対する定式化	190
付録 A	付録	193
A.1	ベクトルの演算	193
A.1.1	ベクトルの演算公式	193
A.1.2	ベクトルの垂直・平行な成分	193
A.1.3	2 点間の距離	194
A.1.4	点を頂点とする 3 角形の面積	194
A.1.5	ベクトルの演算例	195

A.2	ベクトルの微分	196
	A.2.1 ベクトルの微分公式	196
	A.2.2 ストークスの定理の応用	196
A.3	直交曲線座標系	199
	A.3.1 直交曲線座標の定義	200
	A.3.2 勾配 (gradient)	203
	A.3.3 発散 (divergence)	204
	A.3.4 ラプラシアン (Laplacian operator)	205
	A.3.5 回転 (rotation)	206
	A.3.6 球座標系	209
	A.3.7 円筒座標系	210
	A.3.8 直角座標系	211
A.4	ガウスの発散定理の応用	212
	A.4.1 ガウスの発散定理	212
	A.4.2 ガウスの回転定理	212
	A.4.3 ガウスの勾配定理	213
	A.4.4 2次元発散定理	213
	A.4.5 2次元勾配定理	214
A.5	ダイアディック公式	215
A.6	グリーンの定理のまとめ	215
	A.6.1 グリーンの第一定理	215
	A.6.2 グリーンの第二定理	216
A.7	関連する不定積分	217
	A.7.1 置換積分 $t = x + \sqrt{x^2 + a^2}$	217
A.8	Cauchy の積分表示式	218
	A.8.1 Cauchy の定理	218
	A.8.2 Cauchy の積分表示式	221
	Bibliography	223

CHAPTER 1

はじめに

電磁波理論の基礎として、まず磁気的ベクトルポテンシャルおよび電気的ベクトルポテンシャルの導入から始め、双対性の概念や平面波の性質といった基本的事項を解説する。続いて、TE波およびTM波の特徴、ポアソン方程式とスカラー・グリーン関数、さらに自由空間におけるスカラー・グリーン関数の構成法について詳述する。また、体積等価定理、ポクリントン方程式およびハレン方程式といったよく知られている積分方程式について言及し、あわせて相反定理、モード関数の直交性、境界条件の取り扱い、影像法、および平面波の反射・透過に関する基礎的事項を体系的に説明する。

1.1 電磁波超入門

1.1.1 磁気的ベクトルポテンシャル

ポテンシャル (potentials) と呼ばれる補助的な関数を導入すると電磁界解析が容易になることが多い。いま、電流 \mathbf{J} によって生じる磁束密度 \mathbf{B} から**磁気的ベクトルポテンシャル** (magnetic vector potential) \mathbf{A} を、

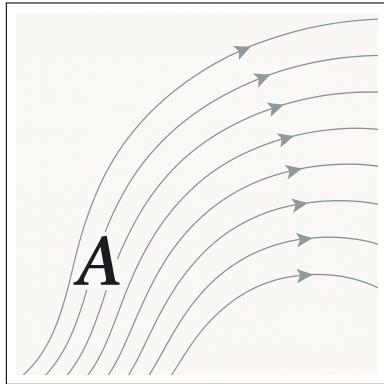


図 1.1. 磁気的ベクトルポテンシャルのイメージ図 (ChatGPT)

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.1)$$

によって定義すると、次式が成り立つ^{*1}.

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \quad (1.2)$$

ただし、 k は波数、 μ は透磁率を示す。 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ より、磁界 \mathbf{H} および電界 \mathbf{E} は（導出省略）,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{E} = -j\omega \left(\mathbf{A} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} \right) \quad (1.4)$$

ただし、 ω は角周波数を示し、電磁界が $e^{j\omega t}$ の因子を持つことを前提としている。

1.1.2 双対性

2 つの異なる現象を記述する方程式が同じ数学的形式をとる場合、それらの解もまた同じ数学的形式をとり、これを**双対性** (concept of duality) という。Maxwell の方程式に仮想的な磁流 \mathbf{M} を導入すると、双対方程式 (dual equation) となる。

^{*1} \mathbf{A} の選択は一意ではない。 \mathbf{B} を変えずにスカラー場の勾配を \mathbf{A} に加えることができ、この性質をゲージ自由度 (Gauge Freedom) という。 \mathbf{A} の様々な定式化が可能で、中でもローレンツ・ゲージ (Lorentz Gauge) がよく用いられる。

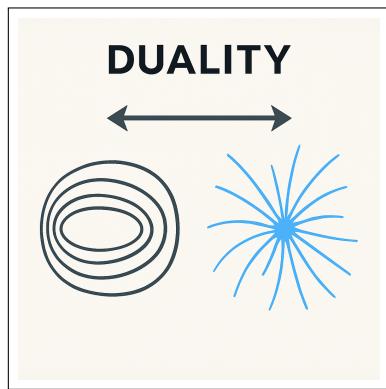


図 1.2. 双対性のイメージ図 (ChatGPT)

この磁流 \mathbf{M}^{*2} より, 電気的ベクトルポテンシャル(electric vector potential) $\mathbf{F} (= -\nabla \times \mathbf{F})$ が定義でき, 次の双対性

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{F}, \\ \mathbf{J} &\rightarrow \mathbf{M}, \\ \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{H}, \\ \mathbf{H} &\rightarrow -\mathbf{E}, \\ \epsilon &\rightarrow \mu, \\ \mu &\rightarrow \epsilon.\end{aligned}$$

を適用すれば, 次式が得られる.

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{F} = -\epsilon\mathbf{M} \quad (1.5)$$

また,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon}\nabla \times \mathbf{F}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{H} = -j\omega \left(\mathbf{F} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} \right) \quad (1.7)$$

1.1.3 平面波

電磁流源がない場合, ベクトルポテンシャルを $\psi(\mathbf{r}) \mathbf{u}_z$ とおくと, Helmholtz 方程式は,

$$\left(\nabla^2 + k^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.8)$$

^{*2} 電気磁気学 II で示したように, 微小電流ループが磁気双極子と等価であり, 磁気双極子は電気双極子と双対的である. 電気双極子を電気ダイポールに拡張して考えると, 微小電流ループは電気ダイポールと双対的であるといえる.

直角座標系 (x, y, z) を考え、変数分離形

$$\psi(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (1.9)$$

とすると、

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0, \quad \frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 Z(z) = 0. \quad (1.10)$$

ただし、

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (1.11)$$

よって、 $X(x)$ の解としては $e^{\pm jk_x x}$, $Y(y)$ は $e^{\pm jk_y y}$, $Z(z)$ は $e^{\pm jk_z z}$ を考えればよい。したがって、 $\pm \mathbf{u}_r$ 方向に伝搬する**平面波** (plane wave) は、

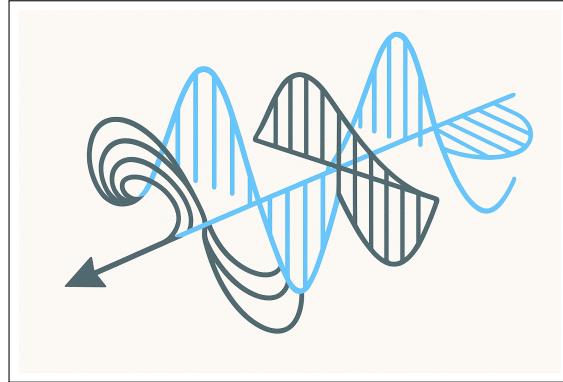


図 1.3. 平面波のイメージ図 (ChatGPT)

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{\mp jk_x x} e^{\mp jk_y y} e^{\mp jk_z z} = e^{\mp j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{\mp jk_z z} = e^{\mp j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{\mp jk\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}}. \quad (1.12)$$

ここで、 \mathbf{k} は波数ベクトル、 \mathbf{r} は位置ベクトルを示し、

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= k\mathbf{u}_r = k_t\mathbf{u}_t + k_z\mathbf{u}_z = k_x\mathbf{u}_x + k_y\mathbf{u}_y + k_z\mathbf{u}_z, \\ \mathbf{r} &= \boldsymbol{\rho} + z\mathbf{u}_z = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z. \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.2 TE 波と TM 波

- **TE 波** (Transverse Electric wave) は、電場が基準方向に垂直な電磁波で、電界はその基準方向に垂直な成分のみからなる。
- **TM 波** (Transverse Magnetic wave) は、磁場が基準方向に垂直な電磁波で、磁界はその基準方向に垂直な成分のみからなる。

ここでは、 z 軸方向を基準方向にとり、説明していく。

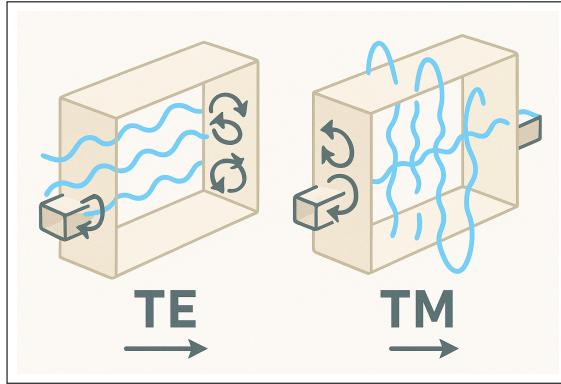


図 1.4. TE 波と TM 波のイメージ図 (ChatGPT)

1.2.1 z 軸方向に関する TE 波

いま、 $\mathbf{F} = \psi(\mathbf{r})\mathbf{u}_z = e^{\mp jk \cdot \mathbf{r}}\mathbf{u}_z$ とおくと、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^f &= -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{F} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times (\psi(\mathbf{r})\mathbf{u}_z) = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{u}_z = -\frac{1}{\epsilon} (\mp j\mathbf{k}) \psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{u}_z \\ &= \pm \frac{j}{\epsilon} (k_t \mathbf{u}_t + k_z \mathbf{u}_z) \psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{u}_z = \pm \frac{jk_t}{\epsilon} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \psi(\mathbf{r}) \\ &\equiv \mathbf{E}_t^f + E_z^f \mathbf{u}_z\end{aligned}\quad (1.14)$$

これより、電界の z 成分 E_z^f 、およびこれに直交する \mathbf{E}_t^f は、

$$E_z^f = \mathbf{E}^f \cdot \mathbf{u}_z = 0 \quad (1.15)$$

$$\mathbf{E}_t^f = \mathbf{E}^f \quad (1.16)$$

となり、TE 波を表していることがわかる。また、磁界 \mathbf{H}^f は、

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^f &= -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}^f = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \left(\pm \frac{jk_t}{\epsilon} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \psi(\mathbf{r}) \right) \\ &= \mp \frac{k_t}{\omega\epsilon\mu} \nabla \psi(\mathbf{r}) \times (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) = \mp \frac{k_t}{\omega\epsilon\mu} (\mp j\mathbf{k}) \psi(\mathbf{r}) \times (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \\ &= \frac{jk_t}{\omega\epsilon\mu} (k_t \mathbf{u}_t + k_z \mathbf{u}_z) \times (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \psi(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (1.17)$$

ここで、 $\mathbf{u}_t \perp \mathbf{u}_z$ がえ、

$$\mathbf{u}_t \times (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) = -\mathbf{u}_z \quad (1.18)$$

$$\mathbf{u}_z \times (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) = \mathbf{u}_t \quad (1.19)$$

これより,

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^f &= \frac{jk_t}{\omega\epsilon\mu} (-k_t\mathbf{u}_z + k_z\mathbf{u}_t) \psi(\mathbf{r}) \\ &\equiv \mathbf{H}_t^f + H_z^f \mathbf{u}_z\end{aligned}\quad (1.20)$$

したがって, z 軸に直交する磁界のベクトル \mathbf{H}_t^f は,

$$\mathbf{H}_t^f = \frac{jk_t}{\epsilon} \frac{k_z}{\omega\mu} \mathbf{u}_t \psi(\mathbf{r}) = \frac{jk_t}{\epsilon} Y_{\text{TE}} \mathbf{u}_t \psi(\mathbf{r}) \quad (1.21)$$

ただし,

$$Y_{\text{TE}} = \frac{1}{Z_{\text{TE}}} \equiv \frac{k_z}{\omega\mu} = \frac{k}{\omega\epsilon} \cdot \frac{k_z}{k} = Y_w \frac{k_z}{k} \quad (1.22)$$

ここで,

$$Y_w = \frac{1}{Z_w} = \frac{k}{\omega\mu} = \frac{\omega\epsilon}{k} \quad (1.23)$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu \quad (1.24)$$

このとき, \mathbf{H}^f は,

$$\mathbf{H}^f = \frac{jk_t}{\epsilon} Y_{\text{TE}} \frac{k}{k_z} \mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \psi(\mathbf{r}) = \frac{jk_t}{\epsilon} Y_{\text{TE}} \frac{k}{k_z} \left(\frac{k_z}{k} \mathbf{u}_t - \frac{k_t}{k} \mathbf{u}_z \right) \psi(\mathbf{r}) \quad (1.25)$$

1.2.2 z 軸方向に関する TM 波

一方, $\mathbf{A} = \psi(\mathbf{r}) \mathbf{u}_z = e^{\mp jk \cdot \mathbf{r}} \mathbf{u}_z$ とおき, 同様にして求めると (導出省略),

$$\mathbf{H}^a = \mathbf{H}_t^a = \mp \frac{jk_t}{\mu} (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \psi(\mathbf{r}) \quad (1.26)$$

$$H_z^a = 0 \quad (1.27)$$

また,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^a &= \frac{jk_t}{\mu} Z_{\text{TM}} \frac{k}{k_z} \mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) \psi(\mathbf{r}) = \frac{jk_t}{\mu} Z_{\text{TM}} \frac{k}{k_z} \left(\frac{k_z}{k} \mathbf{u}_t - \frac{k_t}{k} \mathbf{u}_z \right) \psi(\mathbf{r}) \\ &\equiv \mathbf{E}_t^a + E_z^a \mathbf{u}_z\end{aligned}\quad (1.28)$$

$$\mathbf{E}_t^a = \frac{jk_t}{\mu} Z_{\text{TM}} \mathbf{u}_t \psi(\mathbf{r}) \quad (1.29)$$

これは TM 波を表していることがわかる。ただし,

$$Z_{\text{TM}} = \frac{1}{Y_{\text{TM}}} = \frac{k_z}{\omega\epsilon} = \frac{k}{\omega\epsilon} \cdot \frac{k_z}{k} = Z_w \frac{k_z}{k} \quad (1.30)$$

1.2.3 平面波と TE 波・TM 波との関係

平面波について、 z 軸に直交する成分に着目すると、

- $(\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z)$ に沿う電界成分は TE 波,
- \mathbf{u}_t に沿う電界成分は TM 波

を表すことがわかる。

いま、方向 \mathbf{u}_r (単位ベクトル) に沿って伝搬する平面波 (波数 k) の電界 \mathbf{E} の偏波方向を \mathbf{u}_p (単位ベクトル) とすると、大きさ 1 の場合、

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_p e^{-jk \cdot r} \quad (1.31)$$

$$\mathbf{k} = k \mathbf{u}_r = k_t \mathbf{u}_t + k_z \mathbf{u}_z = k_x \mathbf{u}_x + k_y \mathbf{u}_y + k_z \mathbf{u}_z \quad (1.32)$$

$$\mathbf{H} = Y_w(\mathbf{u}_r \times \mathbf{E}) \quad (1.33)$$

また、

$$\mathbf{E} = -Z_w(\mathbf{u}_r \times \mathbf{H}) \quad (1.34)$$

これを、 z 軸に対する TE 波、TM 波に分解して表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left\{ \mathbf{u}_p \cdot (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z)(\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + (\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_t)\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_z)\mathbf{u}_z \right\} e^{-jk \cdot r} \\ &\equiv \mathbf{E}_t + E_z \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (1.35)$$

ここで、

$$\mathbf{E}_t = \left\{ \mathbf{u}_p \cdot (\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z)(\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_z) + (\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_t)\mathbf{u}_t \right\} e^{-jk \cdot r} \quad (1.36)$$

ただし、

$$\mathbf{u}_r = (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_t)\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z)\mathbf{u}_z \quad (1.37)$$

1.3 ポアソンの方程式とグリーン関数

1.3.1 静電場のスカラポテンシャル

スカラポテンシャルを Φ 、電荷密度を ρ 、誘電率を ϵ とすると、**ポアソン** (Poisson) の方程式は、

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.38)$$

で与えられ、観測点 (x, y, z) における Φ は次のようになる。

$$\Phi(x, y, z) = \iiint_V \frac{\rho(x_0, y_0, z_0)}{4\pi\epsilon R} dV_0 \quad (1.39)$$

ただし、

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (1.40)$$

ここで、 \mathbf{r}_0 および (x_0, y_0, z_0) は電荷のある点の位置ベクトルおよび座標、 \mathbf{r} および (x, y, z) は観測点の位置ベクトルおよび座標を示し、領域 V に電荷が分布しているものとする。電気磁気学の静電界では、式 (1.38) の Φ のかわりに電位 V を用いていた。そして、無限遠での電位はゼロである。

1.3.2 ディラックのデルタ関数

電荷密度 ρ のかわりに、点 (x'_0, y'_0, z'_0) にだけ点電荷をおいた場合を考えてみる。この場合、ポアソンの式の右辺は、 ρ/ϵ のかわりに **ディラック** (Dirac) の **デルタ関数** (delta function) で表すことができる。まず、1次元のデルタ関数について、変数を x としたとき次のような関係式がある。

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 0 & (x \neq x') \\ \infty & (x = x') \end{cases} = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin a(x - x')}{x - x'} \quad (1.41)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx = 1 \quad (1.42)$$

このとき、次式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x') dx = f(x') \quad (1.43)$$

これを直角座標系において3次元に拡張すると、

$$\delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$$

となる。式 (1.39) において、

$$\frac{\rho(x_0, y_0, z_0)}{\epsilon} = \delta(x_0 - x'_0) \delta(y_0 - y'_0) \delta(z_0 - z'_0) \quad (1.44)$$

とすると、

$$\Phi = \iiint_V \frac{\delta(x_0 - x'_0) \delta(y_0 - y'_0) \delta(z_0 - z'_0)}{4\pi R} dV_0 \quad (1.45)$$

ただし、領域 V は点電荷のある範囲である。

1.3.3 グリーン関数

直角座標成分の3重積分より,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_{l_z} \int_{l_y} \int_{l_x} \frac{\delta(x_0 - x'_0) \delta(y_0 - y'_0) \delta(z_0 - z'_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} dx_0 dy_0 dz_0 \quad (1.46)$$

ただし, l_x, l_y, l_z は直角座標系 (x_0, y_0, z_0) の積分路を各々, 示す. デルタ関数の性質より,

$$\int_{l_x} f(x_0) \delta(x_0 - x'_0) dx_0 = f(x'_0) \quad (1.47)$$

が成り立つので, Φ は次のようになる.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_{l_z} \int_{l_y} \frac{\delta(y_0 - y'_0) \delta(z_0 - z'_0)}{\sqrt{(x - x'_0)^2 + (y - y'_0)^2 + (z - z'_0)^2}} dy_0 dz_0 \quad (1.48)$$

同様にして, y_0 に関する積分も, デルタ関数の性質

$$\int_{l_y} f(y_0) \delta(y_0 - y'_0) dy_0 = f(y'_0) \quad (1.49)$$

より,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_{l_z} \frac{\delta(z_0 - z'_0)}{\sqrt{(x - x'_0)^2 + (y - y'_0)^2 + (z - z'_0)^2}} dz_0 \quad (1.50)$$

さらに, z_0 に関する積分も, デルタ関数の性質

$$\int_{l_z} f(z_0) \delta(z_0 - z'_0) dz_0 = f(z'_0) \quad (1.51)$$

より,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x - x'_0)^2 + (y - y'_0)^2 + (z - z'_0)^2}} = \frac{1}{4\pi R'} \quad (1.52)$$

ここで,

$$R' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0| = \sqrt{(x - x'_0)^2 + (y - y'_0)^2 + (z - z'_0)^2} \quad (1.53)$$

この解がポアソンの方程式に対する**グリーン関数** (Green's function) G である. いま, x'_0, y'_0, z'_0 を, x_0, y_0, z_0 に置き換え,

$$\nabla^2 G(x, y, z | x_0, y_0, z_0) = -\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (1.54)$$

を満たすグリーン関数 G は次のような.

$$G(x, y, z | x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R} \quad (1.55)$$

このようにグリーン関数がわかれば、任意の電荷 $\rho(x_0, y_0, z_0)$ による Φ を次式によって求めることができる。

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V G(x, y, z | x_0, y_0, z_0) \rho(x_0, y_0, z_0) dV_0 \quad (1.56)$$

位置ベクトル

$$\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z \quad (1.57)$$

$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{u}_x + y_0\mathbf{u}_y + z_0\mathbf{u}_z \quad (1.58)$$

を用いると、

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rho(\mathbf{r}_0) dV_0 \quad (1.59)$$

1.4 自由空間のスカラー・グリーン関数

1.4.1 単位電流源

最も基本的な波源の一つである微少単位電流源を取り上げ、それによる放射を考える。いま、電流の向きに沿う単位ベクトルを \mathbf{u} とすると、この単位電流源 \mathbf{J} は次式で表現できる。

$$\mathbf{J} = \mathbf{u}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.60)$$

ただし、 \mathbf{r}' は電流源のある点の位置ベクトル、 \mathbf{r} は観測点の位置ベクトル、 δ はディラック (Dirac) のデルタ関数 (delta function) を示す。これより、非同次ベクトルヘルムホルツ方程式は、

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A} = -\mu\mathbf{u}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.61)$$

簡単のため、電流源を原点におくと $\mathbf{r}' = 0$ 、電流の向きを z 軸方向にとると $\mathbf{u} = \mathbf{u}_z$ (\mathbf{u}_z は z 軸方向の単位ベクトル) となり、電流源は $\mathbf{u}_z\delta(\mathbf{r})$ で表される。ベクトルポテンシャル \mathbf{A} の z 成分を A_z とおくと、

$$(\nabla^2 + k^2)A_z = -\mu\delta(\mathbf{r}) \quad (1.62)$$

上式のスカラーの方程式においては、対称性を考慮すると A_z は r のみの関数と考えてよい。そこで、球座標系 (r, θ, ϕ) を考え、

$$\nabla^2 A_z = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \text{ より},$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + k^2 A_z = -\mu \delta(\mathbf{r}) \quad (1.64)$$

1.4.2 球波動関数

この方程式の右辺を 0 とおいた同次方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + k^2 A_z = 0 \quad (1.65)$$

は 0 次の球ベッセル関数を解にもつ微分方程式である。

$$j_0(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} J_{\frac{1}{2}}(k_0 r) \quad (0 \text{ 次の第 1 種球ベッセル関数}) \quad (1.66)$$

$$n_0(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} N_{\frac{1}{2}}(k_0 r) \quad (0 \text{ 次の第 2 種球ベッセル関数}) \quad (1.67)$$

あるいは,

$$k_0^{(1)}(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 r) \quad (0 \text{ 次の第 1 種球ハンケル関数}) \quad (1.68)$$

$$k_0^{(2)}(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(k_0 r) \quad (0 \text{ 次の第 2 種球ハンケル関数}) \quad (1.69)$$

ここで,

$$k_0^{(1)}(k_0 r) = j_0(k_0 r) + j n_0(k_0 r) \quad (1.70)$$

$$k_0^{(2)}(k_0 r) = j_0(k_0 r) - j n_0(k_0 r) \quad (1.71)$$

より、いずれか一方の組を解としてとればよい。これは球波動関数ともいう。ただし、

- $J_{\frac{1}{2}}(k_0 r)$: $\frac{1}{2}$ 次の第 1 種ベッセル関数
- $N_{\frac{1}{2}}(k_0 r)$: $\frac{1}{2}$ 次の第 2 種ベッセル関数またはノイマン関数
- $H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 r)$: $\frac{1}{2}$ 次の第 1 種ハンケル関数
- $H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(k_0 r)$: $\frac{1}{2}$ 次の第 2 種ハンケル関数

これらの関数には次のような関係がある。

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 r) = J_{\frac{1}{2}}(k_0 r) + j N_{\frac{1}{2}}(k_0 r) \quad (1.72)$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(k_0 r) = J_{\frac{1}{2}}(k_0 r) - j N_{\frac{1}{2}}(k_0 r) \quad (1.73)$$

さらに、ベッセル関数の公式^{*3}より、

$$J_{\frac{1}{2}}(k_0 r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \sin k_0 r \quad (1.74)$$

$$N_{\frac{1}{2}}(k_0 r) = -\sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \cos k_0 r \quad (1.75)$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 r) = -j \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{jk_0 r} \quad (1.76)$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(k_0 r) = j \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{-jk_0 r} \quad (1.77)$$

よって、

$$j_0(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} J_{\frac{1}{2}}(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \sin k_0 r = \frac{\sin k_0 r}{k_0 r} \quad (1.78)$$

$$n_0(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} N_{\frac{1}{2}}(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \cos k_0 r \right) = -\frac{\cos k_0 r}{k_0 r} \quad (1.79)$$

$$k_0^{(1)}(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} \left(-j \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{jk_0 r} \right) = -j \frac{e^{jk_0 r}}{k_0 r} \quad (1.80)$$

$$k_0^{(2)}(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} j \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{-jk_0 r} = j \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} \quad (1.81)$$

いま、 $+r$ 方向に伝搬する波を考えると、この同次方程式の解としては 0 次の第 2 種球ハンケル関数 $k_0^{(2)}(kr) = j \frac{e^{-jkr}}{kr}$ をとればよい。

1.4.3 単位電流源によるベクトルポテンシャル

非同次スカラーヘルムホルツ方程式の両辺を体積積分すると、

$$\iiint_V (\nabla \cdot \nabla A_z + k^2 A_z) dv = \iiint_V \{-\mu \delta(\mathbf{r})\} dv \quad (1.82)$$

ここで、式 (1.82) の左辺第 1 項を、ガウスの発散定理

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} dv = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.83)$$

より面積分で表し、式 (1.82) の右辺はデルタ関数の性質

$$\iiint_V \delta(\mathbf{r}) dv = 1 \quad (1.84)$$

^{*3} 森口繁一, 宇田川かね久, 一松信, ”岩波 数学公式 II,” 岩波書店 (1960), ISBN: 9784000055086.

より,

$$\oint\int_S \nabla A_z \cdot d\mathbf{S} + k^2 \iiint_V A_z dv = -\mu \quad (1.85)$$

$V \rightarrow 0$ を考えると,

$$\lim_{V \rightarrow 0} \oint\int_S \nabla A_z \cdot d\mathbf{S} + \lim_{V \rightarrow 0} k^2 \iiint_V A_z dv = -\mu \quad (1.86)$$

いま, $A_z \sim 1/r$ より上式の第2項はゼロになる。また, 面積分を球面にとると, 面積要素 $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS = \mathbf{u}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ より,

$$\lim_{V \rightarrow 0} \oint\int_S (\nabla A_z \cdot \mathbf{u}_r) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = -\mu \quad (1.87)$$

上式を計算するために, 未定係数を C とおくと A_z は次のようになる。

$$A_z = C k_0^{(2)}(kr) = C j \frac{e^{-jkr}}{kr} \quad (1.88)$$

これより, $\nabla A_z \cdot \mathbf{u}_r$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla A_z \cdot \mathbf{u}_r &= \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{jC}{k} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) = \frac{jC}{k} \left(-jk \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{e^{-jkr}}{r^2} \right) \\ &= C \frac{e^{-jkr}}{r^2} \left(r - \frac{j}{k} \right) \end{aligned} \quad (1.89)$$

そして, 積分を実行して, 未定係数 C を求めると, 次のようになる。

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow 0} \oint\int_S (\nabla A_z \cdot \mathbf{u}_r) r^2 \sin \theta d\theta d\phi &= \lim_{V \rightarrow 0} \oint\int_S C \frac{e^{-jkr}}{r^2} \left(r - \frac{j}{k} \right) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \lim_{V \rightarrow 0} C e^{-jkr} \left(r - \frac{j}{k} \right) \oint\int_S \sin \theta d\theta d\phi = \lim_{V \rightarrow 0} C e^{-jkr} \left(r - \frac{j}{k} \right) 4\pi \\ &= C \left(-\frac{j}{k} \right) 4\pi = -\mu \end{aligned} \quad (1.90)$$

よって, 未定係数 C は次のようになる。

$$C = -j \frac{k\mu}{4\pi} \quad (1.91)$$

したがって, A_z は,

$$A_z = C j \frac{e^{-jkr}}{kr} = \left(-j \frac{k\mu}{4\pi} \right) j \frac{e^{-jkr}}{kr} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (1.92)$$

ベクトルポテンシャル \mathbf{A} は,

$$\mathbf{A} = A_z \mathbf{u}_z = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \mathbf{u}_z \quad (1.93)$$

よって、電流の向きに沿う単位ベクトル \mathbf{u} 、電流源のある点の位置ベクトルを \mathbf{r}' 、観測点の位置ベクトルを \mathbf{r} とおき、一般的な形で \mathbf{A} を表すと、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu \mathbf{u}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.94)$$

これより、3次元自由空間のスカラー・グリーン関数 G_0 は、波源の位置ベクトルを \mathbf{r}' 、観測点を \mathbf{r} とすると、次のようになる。

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.95)$$

ここで、

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (1.96)$$

1.4.4 任意電流分布によるベクトルポテンシャル

任意の電流 \mathbf{J} によるベクトルポテンシャル \mathbf{A} は、

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \quad (1.97)$$

によって与えられ、グリーン関数 G_0 を用いれば、次のようにしてベクトルポテンシャル \mathbf{A} を求めることができる。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \iiint \mathbf{J}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (1.98)$$

なお、

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{4\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (1.99)$$

が成り立ち、これはグリーン関数の対称性の一例である。

1.5 体積等価定理

1.5.1 等価電磁流源

線形、等方性の媒質（誘電率 ϵ 、透磁率 μ ）において、Maxwell の方程式は、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1.100)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (1.101)$$

同じ電流源 \mathbf{J} を、自由空間（誘電率 ϵ_0 、透磁率 μ_0 ）においていたとき、Maxwell の方程式は、

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_0 \quad (1.102)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = \mathbf{J} + j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_0 \quad (1.103)$$

いま、両者の電磁界の差（散乱波）を、

$$\mathbf{E}^s \equiv \mathbf{E} - \mathbf{E}_0 \quad (1.104)$$

$$\mathbf{H}^s \equiv \mathbf{H} - \mathbf{H}_0 \quad (1.105)$$

とおいて、式 (1.100)–式 (1.102) より、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{E}_0 &= -j\omega\mu\mathbf{H} + j\omega\mu_0 \mathbf{H}_0 \\ \nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) &= -j\omega\mu_0(\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) + j\omega\mu_0 \mathbf{H} - j\omega\mu \mathbf{H} \\ \therefore \nabla \times \mathbf{E}^s &= -j\omega\mu_0 \mathbf{H}^s - j\omega(\mu - \mu_0) \mathbf{H} \end{aligned} \quad (1.106)$$

同様にして、式 (1.101)–式 (1.103) より、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{H}_0 &= j\omega\epsilon\mathbf{E} - j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_0 \\ \nabla \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) &= j\omega\epsilon_0(\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) - j\omega\epsilon_0 \mathbf{E} + j\omega\epsilon \mathbf{E} \\ \therefore \nabla \times \mathbf{H}^s &= j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}^s + j\omega(\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.107)$$

得られた式を、

$$\nabla \times \mathbf{E}^s = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}^s - \mathbf{K}_{eq} \quad (1.108)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^s = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}^s + \mathbf{J}_{eq} \quad (1.109)$$

とおくと、媒質の違いによって生じている散乱波（自由空間中の**体積等価波源**（polarization currents）ともいう）として表すことができ、 \mathbf{K}_{eq} は等価磁流源（equivalent magnetic current）、 \mathbf{J}_{eq} は等価電流源（equivalent electric current）を示し、

$$\mathbf{K}_{eq} = j\omega(\mu - \mu_0) \mathbf{H} \quad (1.110)$$

$$\mathbf{J}_{eq} = j\omega(\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} \quad (1.111)$$

これを**体積等価定理**（volume equivalent theorem）^{*4} という。

1.5.2 良導体

誘電率が

$$\epsilon = \epsilon' - j\frac{\sigma}{\omega} \quad (1.112)$$

^{*4} G. A. Thiele, “Wire antennas,” in *Computer Techniques for Electromagnetics*, Chapter 2, R. Mittra, Ed., Permagon (1973), ISSN: 0074-803X.

のとき、等価電流源 \mathbf{J}_{eq} は、

$$\mathbf{J}_{eq} = j\omega(\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E} = j\omega\left(\epsilon' - j\frac{\sigma}{\omega} - \epsilon_0\right)\mathbf{E} = \{\sigma + j\omega(\epsilon' - \epsilon_0)\}\mathbf{E} \quad (1.113)$$

複素誘電率の虚部が十分小さい場合、

$$\mathbf{J}_{eq} \simeq \sigma\mathbf{E} \quad (1.114)$$

強磁性体でなければ、 $\mu \simeq \mu_0$ ゆえ、

$$\mathbf{K}_{eq} \simeq 0 \quad (1.115)$$

良導体 (good conductor) はたいていこのような特性となる。

1.6 ポクリントンの積分方程式

電磁流源がある場合の Maxwell の方程式は、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{K} \quad (1.116)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (1.117)$$

磁気的ベクトルポテンシャル \mathbf{A} とそのスカラーポテンシャル V , 電気的ベクトルポテンシャル \mathbf{F} とそのスカラーポテンシャル U を用いて、電界 \mathbf{E} および磁界 \mathbf{H} は、

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla V - \frac{1}{\epsilon}\nabla \times \mathbf{F} \quad (1.118)$$

$$\mathbf{H} = -j\omega\mathbf{F} - \nabla U + \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A} \quad (1.119)$$

ここで、**ローレンツ・ゲージ** (Lorenz gauge) (ローレンツの条件) は、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\epsilon V \quad (1.120)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -j\omega\mu\epsilon U \quad (1.121)$$

いま、 $\mu = \mu_0$, 磁荷 m , 磁流 \mathbf{K} がない場合 ($m = 0$, $\mathbf{K} = 0$), $\mathbf{F} = 0$, $U = 0$. また、直線状の線状導体の散乱問題を考え、電流 \mathbf{J} は z 方向成分のみをもつとすると、 $\mathbf{J} = J\mathbf{a}_z$. これより、磁気的ベクトルポテンシャルも z 成分のみで、 $\mathbf{A} = A_z\mathbf{a}_z$ となる. よって、式 (1.118) より電界 \mathbf{E} は、

$$\mathbf{E} = -j\omega(A_z\mathbf{a}_z) - \nabla V \quad (1.122)$$

電界の z 成分 E_z は、

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_z = -j\omega(A_z\mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_z - (\nabla V) \cdot \mathbf{a}_z = -j\omega A_z - \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.123)$$

一方,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (A_z \mathbf{a}_z) = (\nabla A_z) \cdot \mathbf{a}_z = \frac{\partial A_z}{\partial z} = -j\omega\mu\epsilon V \quad (1.124)$$

上式を z で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} &= -j\omega\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial z} \\ \therefore \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.125)$$

これを, 式 (1.123) に代入すると,

$$E_z = -j\omega A_z + \frac{1}{j\omega\epsilon\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = \frac{1}{j\omega\epsilon\mu} \left(\omega^2\epsilon\mu A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \quad (1.126)$$

ここで, $k^2 = \omega^2\epsilon\mu$ とおき,

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon\mu} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right) \quad (1.127)$$

磁気的ベクトルポテンシャル \mathbf{A} の積分形より, $d\mathbf{A}$ は,

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \quad (1.128)$$

電流 \mathbf{J} は z 成分 J のみゆえ,

$$dA_z(\mathbf{r}) = \mu G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J(\mathbf{r}') dv' \quad (1.129)$$

式 (1.127) より,

$$\begin{aligned} dE_z &= \frac{1}{j\omega\epsilon\mu} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\mu G J dv') + k^2 (\mu G J dv') \right\} \\ &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2 G \right) J dv' \end{aligned} \quad (1.130)$$

体積積分して,

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon} \iiint \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2 G \right) J dv' \quad (1.131)$$

ここで, 観測点を z 軸上にとると位置ベクトル \mathbf{r} は,

$$\mathbf{r} = z \mathbf{a}_z \quad (1.132)$$

また, 半径 a の円筒側面に電流源があるとき, その位置ベクトル \mathbf{r}' は,

$$\mathbf{r}' = a \mathbf{a}_\rho + z' \mathbf{a}_z \quad (1.133)$$

この 2 点間の距離 R は,

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |-a\mathbf{a}_\rho + (z - z')\mathbf{a}_z| = \sqrt{a^2 + (z - z')^2} \quad (1.134)$$

円筒座標系 (ρ, ϕ, z) において $\rho = a$ の円筒側面（円筒の長さは L ）にのみ面電流が軸方向に流れているとき、面積分となって、

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \iint \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2 G \right) J dS' = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2 G \right) J a d\phi dz' \\ &= \frac{a}{j\omega\epsilon} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2 G \right) J dz' = \frac{2\pi a}{j\omega\epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2 G \right) J dz' \end{aligned} \quad (1.135)$$

ここで、

$$J = \frac{I}{2\pi a} \quad (1.136)$$

とおくと、

$$E_z(z) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right) I(z') dz' \quad (1.137)$$

円筒は完全導体とすると、電界の接線成分はゼロゆえ、円筒側面上の入射波 \mathbf{E}_{inc} と散乱波 $\mathbf{E}_{\text{scattering}}$ のベクトル和の接線成分が次のようにゼロになる。

$$(\mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_{\text{scattering}})_{\tan} = 0 \quad (1.138)$$

散乱波の z 成分が E_z ゆえ、入射波の z 成分を E_z^{inc} とすると、次式が成り立つ。

$$E_z^{\text{inc}}(z) = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right) I(z') dz' \quad (1.139)$$

これを**ポクリントンの積分方程式** (Pocklington's integral equation)^{*5} という。

問題

ポクリントンの積分方程式の被積分関数を、自由空間のグリーン関数の微分などを行って求めよ。

^{*5} G. A. Thiele, "Wire antennas," in *Computer Techniques for Electromagnetics*, Chapter 2, R. Mittra, Ed., Permagon (1973), ISSN: 0074-803X.

解答

$$\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') = \frac{e^{-jkR}}{R^5} \left\{ (1 + jkR)(2R^2 - 3a^2) + (kRa)^2 \right\} \quad (1.140)$$

ここで,

$$R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2} \quad (1.141)$$

1.7 ハレンの積分方程式

十分細い円柱状完全導体（長さ L , 半径 a ）を 1 点給電（デルタギャップ間の電位 V_0 ）したダイポールアンテナの電流分布 $I_z(z)$ を求める方法として、**ハレンの積分方程式** (Hallen's integral equation) があり、給電点を $z = 0$ として中央給電（デルタギャップ間の電位 V_0 ）した場合、次のようになる。

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_z(z') G_0(z', z) dz' = C \cos kz - \frac{jV_0}{2\eta} \sin k|z| \quad (1.142)$$

ただし、 μ_0 は自由空間の透磁率、 G_0 は自由空間の 3 次元グリーン関数、 k は波数、 η は自由空間の波動インピーダンスを示し、電流 I_z は z 軸方向に流れているものとする。

1.7.1 ハレンの積分方程式の導出

ハレンの積分方程式を導出しよう。まず、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} は、

$$\mathbf{A} = \mu_0 \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (1.143)$$

ここで、

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (1.144)$$

ただし、 \mathbf{J} は電流源、 G_0 は自由空間の 3 次元グリーン関数、 \mathbf{r}' は電流源の位置ベクトル、 \mathbf{r} は観測点 (ρ, ϕ, z) の位置ベクトルを示す。いま、円柱導体は十分細く、電流 I_z が z 軸方向のみに流れているものと考え、電流源 \mathbf{J} を次のようにおく。

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \frac{I_z(z')}{2\pi a} \mathbf{u}_z \quad (1.145)$$

ただし, a は円筒の半径, \mathbf{u}_z は z 軸方向の単位ベクトルを示す. これより, ベクトルポテンシャル \mathbf{A} の z 成分 A_z の式を考えればよいことになり,

$$\begin{aligned} A_z(\mathbf{r}) &= \mu_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{I_z(z')}{2\pi a} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} ad\phi' dz' = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_z G_0 dz' \\ &= \mu_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_z(z') G_0(R) dz' \end{aligned} \quad (1.146)$$

ここで, 位置ベクトルおよび座標成分のプライムは, 電流源の位置に関する変数を示すものである. このとき, 観測点の位置ベクトル \mathbf{r} は,

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho + z \mathbf{u}_z \quad (1.147)$$

一方, 電流は円筒面上ではなく, z 軸上を流れているものと近似すると, 位置ベクトル \mathbf{r}' は, 次のようになる.

$$\mathbf{r}' \simeq z' \mathbf{u}_z \quad (1.148)$$

これより,

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' \simeq \rho \mathbf{u}_\rho + (z - z') \mathbf{u}_z \quad (1.149)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} \equiv R \quad (1.150)$$

散乱電界 \mathbf{E}_s は, ベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = A_z(\rho, z) \mathbf{u}_z$ より次のようになる.

$$\mathbf{E}_s = -j\omega \left(A_z \mathbf{u}_z + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot (A_z \mathbf{u}_z) \right) = -j\omega \left(A_z \mathbf{u}_z + \frac{1}{k^2} \nabla \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \quad (1.151)$$

電界の z 成分は,

$$\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{u}_z = -j\omega \left(A_z + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \quad (1.152)$$

いま, ギャップ間隔 Δz に電圧 V_0 が印加されているとすると, 電界 E_i (z 成分) は,

$$E_i = \begin{cases} \frac{V_0}{\Delta z} & (\text{給電ギャップ間}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (1.153)$$

境界条件より, 円柱導体表面で全電界がゼロとなるので,

$$\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{u}_z + E_i = 0 \quad (\text{at } \rho = a) \quad (1.154)$$

を解けばよい. そこで, $z = 0$ の給電点以外について考えると,

$$j\omega \left(A_z + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (\text{給電ギャップ以外}) \quad (1.155)$$

これより,

- $z > 0$ のとき, $A_z = C_1 \cos kz + D_1 \sin kz$
- $z < 0$ のとき, $A_z = C_2 \cos kz + D_2 \sin kz$

ただし, C_1, C_2, D_1, D_2 は未知係数である. まず, A_z が $z = 0$ で連続となるためには $C_1 = C_2$. また, A_z が z に関して対称であるためには $D_1 = -D_2$. よって,

- $z > 0$ のとき, $A_z = C_1 \cos kz + D_1 \sin kz$
- $z < 0$ のとき, $A_z = C_1 \cos kz - D_1 \sin kz$

これを

$$j\omega \left(A_z + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) = \frac{V_0}{\Delta z} \quad (\text{給電ギャップ間}) \quad (1.156)$$

に代入して, $z_0 = 0$ 近傍で積分すると ($1 \gg 2\delta \simeq \Delta z$),

$$\begin{aligned} \int_{0-\delta}^{0+\delta} j\omega \left(A_z + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) dz &= \int_{0-\delta}^{0+\delta} \frac{V_0}{\Delta z} dz \\ j\omega \int_{0-\delta}^{0+\delta} A_z dz + \frac{j\omega}{k^2} \left[\frac{\partial A_z}{\partial z} \right]_{0-\delta}^{0+\delta} &= V_0 \end{aligned} \quad (1.157)$$

上式の左辺の第1項はゼロゆえ,

$$\frac{j\omega}{k^2} \left(\left. \frac{\partial A_z}{\partial z} \right|_{z=0+\delta} - \left. \frac{\partial A_z}{\partial z} \right|_{z=0-\delta} \right) = V_0 \quad (1.158)$$

つまり, A_z の導関数の不連続性が給電点の電位差に対応していることになる.

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{j\omega} V_0 &= \left[-C_1 k \sin kz + D_1 k \cos kz \right]_{z=0+\delta} - \left[-C_1 k \sin kz - D_1 k \cos kz \right]_{z=0-\delta} \\ &\simeq D_1 k + D_1 k = 2D_1 k \end{aligned} \quad (1.159)$$

よって,

$$D_1 = \frac{V_0 k}{j2\omega} = -j \frac{V_0}{2} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = -j V_0 \frac{\mu_0}{2\eta} \quad (1.160)$$

ただし,

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (1.161)$$

したがって, ベクトルポテンシャル A_z は,

$$\begin{aligned} A_z &= \mu_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_z(z') G_0(R) dz' = C_1 \cos kz + D_1 \sin k|z| \\ &= C_1 \cos kz - j V_0 \frac{\mu_0}{2\eta} \sin k|z| \end{aligned} \quad (1.162)$$

両辺を μ_0 で割って、 $C \equiv C_1/\mu_0$ とおくと、次の**ハレンの積分方程式** (Hallen's integral equation) が得られる。

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_z(z') G_0(z', z) dz' = C \cos kz - \frac{jV_0}{2\eta} \sin k|z| \quad (1.163)$$

これは、給電点を有する直線状のアンテナに対して定式化した初期の積分方程式の例である。導体線路の先端で電流がゼロになる条件を用いれば未知係数 C を決定でき、未知電流 I_z を解く問題となり、後述するモーメント法を用いて数値的に求めることができる。

1.8 無限空間における相反定理

1.8.1 ローレンツの相反定理

ローレンツの相反定理 (Lorentz reciprocity theorem) の積分形より、

$$\begin{aligned} & \iint_S (\mathbf{H}_a \times \mathbf{E}_b - \mathbf{H}_b \times \mathbf{E}_a) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iiint_V (\mathbf{E}_b \cdot \mathbf{J}_a + \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{M}_b - \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{J}_b - \mathbf{H}_b \cdot \mathbf{M}_a) dV \end{aligned} \quad (1.164)$$

領域 V の表面 S を電磁流源に対して遠方領域にとると、電界と磁界の関係は、

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\mathbf{s} \times \mathbf{E}) \quad (1.165)$$

で表されるから、面積分の被積分関数は、面 S 上では次のようになる。

$$\mathbf{H}_a \times \mathbf{E}_b - \mathbf{H}_b \times \mathbf{E}_a = \mathbf{E}_a \times \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\mathbf{s} \times \mathbf{E}_b) - \mathbf{E}_b \times \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\mathbf{s} \times \mathbf{E}_a) \quad (1.166)$$

ここで、ベクトル公式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (1.167)$$

より、

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_a \times (\mathbf{s} \times \mathbf{E}_b) - \mathbf{E}_b \times (\mathbf{s} \times \mathbf{E}_a) \\ &= \mathbf{s}(\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b) - \mathbf{E}_b(\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{s}) - \mathbf{s}(\mathbf{E}_b \cdot \mathbf{E}_a) + \mathbf{E}_a(\mathbf{E}_b \cdot \mathbf{s}) \\ &= -\mathbf{E}_b(\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{s}) + \mathbf{E}_a(\mathbf{E}_b \cdot \mathbf{s}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.168)$$

上式の最後の項では、 \mathbf{E}_a および \mathbf{E}_b が \mathbf{s} に直交していることを用いている。よって、

$$\mathbf{H}_a \times \mathbf{E}_b - \mathbf{H}_b \times \mathbf{E}_a = 0 \quad (\text{on } S) \quad (1.169)$$

面積分して,

$$\iint_S (\mathbf{H}_a \times \mathbf{E}_b - \mathbf{H}_b \times \mathbf{E}_a) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.170)$$

これより,

$$\iiint_V (\mathbf{E}_b \cdot \mathbf{J}_a + \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{M}_b - \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{J}_b - \mathbf{H}_b \cdot \mathbf{M}_a) dV = 0 \quad (1.171)$$

したがって、次式が得られる.

$$\iiint_V (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{J}_b - \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{M}_b) dV = \iiint_V (\mathbf{E}_b \cdot \mathbf{J}_a - \mathbf{H}_b \cdot \mathbf{M}_a) dV \quad (1.172)$$

1.8.2 リアクション

上式左辺は、電磁界 a の電磁流源に関する電磁界 b の**リアクション** (reaction) と呼ばれ、次のように $[a, b]$ によって表される。

$$[a, b] = \iiint_V (\mathbf{E}_b \cdot \mathbf{J}_a - \mathbf{H}_b \cdot \mathbf{M}_a) dV \quad (1.173)$$

ただし、積分範囲 V は a の電磁流源を含む任意の領域を示し、この電磁流源の分布する領域 V_a のみとしてもよい。同様にして、系 b の電磁流源に関する電磁界 a のリアクション $[b, a]$ は、

$$[b, a] = \iiint_V (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{J}_b - \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{M}_b) dV \quad (1.174)$$

先に得られた結果より、両リアクションは等しい。

$$[b, a] = [a, b] \quad (1.175)$$

このとき、積分範囲は電磁流源を含んでいればよいので、 V のかわりに $V_a + V_b$ としてもよい。

1.9 相反定理の応用

1.9.1 等価定理

まず、自由空間中に電磁流源 $\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i$ だけがある場合を考え、これによって生じる電磁界を $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$ とする。

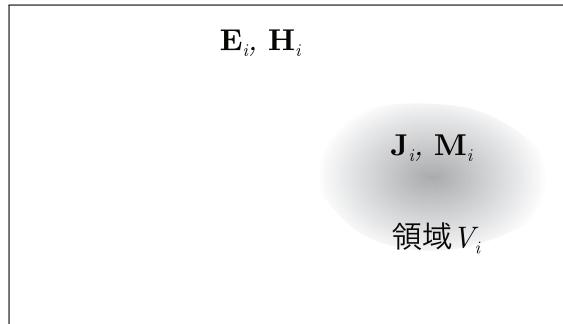


図 1.5. 自由空間中に電磁流源 $\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i$ がある場合

次に、散乱体（領域 V 、面 S ）をおくと、散乱電磁界 $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ が生じる。その結果得られる全電磁界を \mathbf{E}, \mathbf{H} とおくと、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s \quad (1.176)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s \quad (1.177)$$

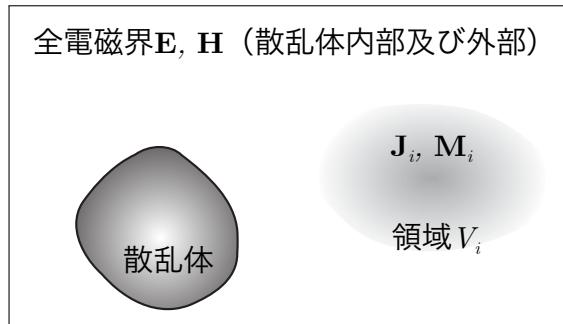


図 1.6. 自由空間中に電磁流源 $\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i$ 、散乱体がある場合

いま、散乱体の表面における電磁界 \mathbf{E}, \mathbf{H} (on S) より等価面電磁流源 $\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s$ を、

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (1.178)$$

$$\mathbf{M}_s = -\mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (1.179)$$

で定義し、散乱体のかわりに等価面電磁流 $\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s$ をおく（等価定理）。

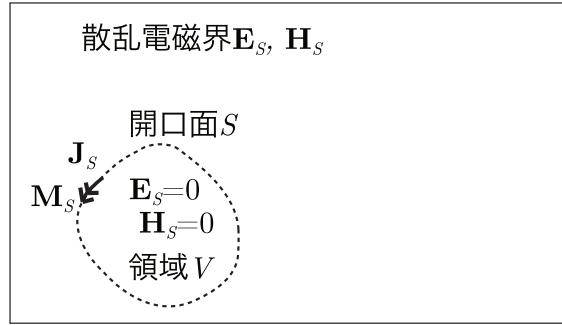


図 1.7. 散乱体のかわりに等価面電磁流 \mathbf{J}_s , \mathbf{M}_s (等価定理) をおいた場合

そして、電磁流源 \mathbf{J}_i , \mathbf{M}_i はそのままで、取り除いた散乱体の領域 (V 内部) の電磁界をゼロ、面 S 上には等価面電磁流源 \mathbf{J}_s , \mathbf{M}_s をおくと、領域 V の外側領域の電磁界は \mathbf{E} , \mathbf{H} となる。これは、散乱体がある場合の問題を、電磁流源の問題に置き換えて扱おうというものである。

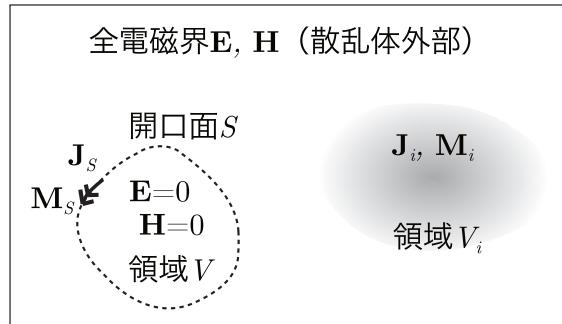


図 1.8. 自由空間中に電磁流源 \mathbf{J}_i , \mathbf{M}_i , 散乱体のかわりにおいた等価面電磁流 \mathbf{J}_s , \mathbf{M}_s がある場合

1.9.2 電磁流源がある場合の相反定理

さて、 \mathbf{J}_i , \mathbf{M}_i , \mathbf{J}_s , \mathbf{M}_s によって生じる電磁界 \mathbf{E} , \mathbf{H} とは独立に、電磁流源 \mathbf{J}_m , \mathbf{M}_m によって生じる電磁界を \mathbf{E}_m , \mathbf{H}_m とする。ただし、 \mathbf{J}_m , \mathbf{M}_m は領域 V の内部にあたる領域にのみ分布しているものとする。これに相反定理を適用すると、

$$\iiint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_m - \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}_m) dV = \iiint \{ \mathbf{E}_m \cdot (\mathbf{J}_i + \mathbf{J}_s) - \mathbf{H}_m \cdot (\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_s) \} dV \quad (1.180)$$

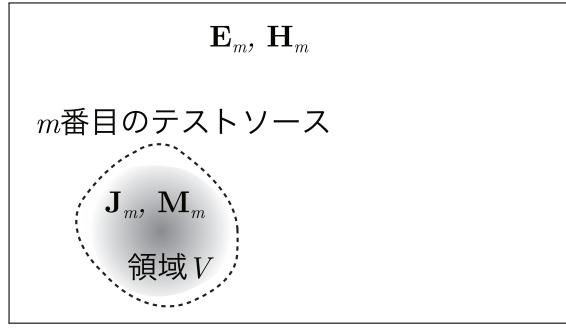


図 1.9. 自由空間中の領域 V (散乱体の領域) に \mathbf{J}_m , \mathbf{M}_m (テストソース) をおいた場合

積分範囲は最初, 全空間と考えてもよい. 領域 V では電磁界 \mathbf{E} , \mathbf{H} がゼロ, 一方外側には電磁流源 \mathbf{J}_m , \mathbf{M}_m をおいていないため, 上式の左辺はゼロである. よって,

$$\iiint \{\mathbf{E}_m \cdot (\mathbf{J}_i + \mathbf{J}_s) - \mathbf{H}_m \cdot (\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_s)\} dV = 0 \quad (1.181)$$

電磁流源の分布している領域に積分範囲をとり, リアクションの形に変形すると,

$$\iiint_{V_i} (\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J}_i - \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{M}_i) dV + \oint_S (\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J}_s - \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{M}_s) dS = 0 \quad (1.182)$$

あるいは,

$$[i, m] + [s, m] = 0 \quad (1.183)$$

一部, 左辺に移項して,

$$-\iiint_{V_i} (\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J}_i - \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{M}_i) dV = \oint_S (\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J}_s - \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{M}_s) dS \quad (1.184)$$

上式左辺は, 与えられる電磁流源 \mathbf{J}_i , \mathbf{M}_i (既知の励振条件) を含む積分, 右辺は, 散乱体表面の電磁流 \mathbf{J}_s , \mathbf{M}_s (未知数) を含む積分である. モーメント法では, 左辺が励振項, 右辺がインピーダンスマトリクスを含む計算に各々対応し, \mathbf{E}_m , \mathbf{H}_m は試行関数に対応する.

1.9.3 磁流がない場合

磁流がない場合 ($\mathbf{M}_i = 0$), $\mathbf{M}_m = 0$ とおいて,

$$\iiint_{V_i} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J}_i dV + \oint_S \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J}_s dS = 0 \quad (1.185)$$

ここで, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_s$ とおくと,

$$\iiint \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J} dV = 0 \quad (1.186)$$

これに相反定理を適用すると、次式が得られる。

$$\iiint \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J} dV = \iiint \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_m dV = 0 \quad (1.187)$$

1.10 グリーンの第二定理に基づく積分表示

1.10.1 グリーンの定理

スカラー Φ 、ベクトル \mathbf{a} について、次のようなベクトルの発散に関する関係式がある。

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{a}) = (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{a} + \Phi \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (1.188)$$

いま、ベクトル \mathbf{a} の代わりに $\nabla \Psi$ を考えると、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) &= (\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Psi) + \Phi \nabla \cdot (\nabla \Psi) \\ &= (\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Psi) + \Phi \nabla^2 \Psi \end{aligned} \quad (1.189)$$

上式の両辺を体積積分すると次のようになる。

$$\iiint_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) dV = \iiint_V (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) dV \quad (1.190)$$

ガウスの発散定理を用いて上式の左辺を面積分で表すと、

$$\iint_S (\Phi \nabla \Psi) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) dV \quad (1.191)$$

上式の左辺の被積分関数は (∇_t は 2 次元の ∇)、

$$(\Phi \nabla \Psi) \cdot \mathbf{n} = \Phi (\nabla \Psi) \cdot \mathbf{n} = \Phi \left(\nabla_t \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial n} \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} = \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \quad (1.192)$$

と変形できるので、次式が得られる（右辺と左辺は交換している）。

$$\iiint_V (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) dV = \iint_S \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS \quad (1.193)$$

これを**グリーンの第一定理** (Green's first theorem) という。この式の Φ と Ψ を交換すると、

$$\iiint_V (\Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi) dV = \iint_S \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (1.194)$$

となり、両者を辺々引くと、次式が得られる。

$$\iiint_V (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) dV = \iint_S \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS \quad (1.195)$$

これは**グリーンの第二定理** (Green's second theorem) である。

1.10.2 電流源による電磁界の積分表示式

電流源 \mathbf{J} および電荷 ρ に対する Maxwell の方程式は,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1.196)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (1.197)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.198)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.199)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho \quad (1.200)$$

式 (1.196) において回転を求め, 式 (1.197) を代入すると,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{H} = -j\omega\mu(\mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E}) \quad (1.201)$$

ここで, ベクトル公式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \quad (1.202)$$

を用いると,

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} + k^2\mathbf{E} \quad (1.203)$$

式 (1.199) のガウスの定理より,

$$\nabla \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) - \nabla^2 \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} + k^2\mathbf{E} \quad (1.204)$$

さらに, 連続の式 (1.200) より,

$$\nabla \left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{-j\omega\epsilon} \right) - \nabla^2 \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} + k^2\mathbf{E} \quad (1.205)$$

よって,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= j\omega\mu\mathbf{J} - \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}) \\ &= j\omega\mu \left(\mathbf{J} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{J} \right) \end{aligned} \quad (1.206)$$

いま,

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y + E_z \mathbf{u}_z \quad (1.207)$$

$$\mathbf{J} = J_x \mathbf{u}_x + J_y \mathbf{u}_y + J_z \mathbf{u}_z \quad (1.208)$$

とおき, x 成分について表すと,

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = j\omega\mu \left(J_x + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{J}) \right) \quad (1.209)$$

一方、 次式で定義されるグリーン関数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を考える.

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.210)$$

グリーンの第二定理より,

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 E_x(\mathbf{r}) - E_x(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) dV \\ &= \iint_S \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial E_x(\mathbf{r})}{\partial n} - E_x(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right) dS \end{aligned} \quad (1.211)$$

上式左辺に式 (1.209) および式 (1.210) を代入する. そして、積分領域を十分大きくとると、右辺の面 S での被積分関数はゼロになるので,

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left\{ j\omega\mu \left(J_x(\mathbf{r}) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})) \right) - k^2 E_x(\mathbf{r}) \right\} \right. \\ & \quad \left. - E_x(\mathbf{r}) \left(-\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \right] dV = 0 \end{aligned} \quad (1.212)$$

よって、デルタ関数の性質より,

$$E_x(\mathbf{r}') = -j\omega\mu \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(J_x(\mathbf{r}) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})) \right) dV \quad (1.213)$$

さらに、グリーン関数の対称性

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (1.214)$$

を用い、また、 \mathbf{r} , \mathbf{r}' を入れ換えると、次式を得る.

$$E_x(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(J_x(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x'} (\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \right) dV' \quad (1.215)$$

同様にして、 y 成分、 z 成分の式が得られ,

$$E_y(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(J_y(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y'} (\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \right) dV' \quad (1.216)$$

$$E_z(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(J_z(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial z'} (\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \right) dV' \quad (1.217)$$

したがって、ベクトル表示は次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -j\omega\mu \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right) dV' \\ &= -j\omega\mu \left(\iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{k^2} \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \right) \end{aligned} \quad (1.218)$$

1.11 電磁界の積分表示式について

1.11.1 ベクトルポテンシャルを基にした電磁界の積分表示式の導出

ベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いると電界 \mathbf{E} , および磁界 \mathbf{H} は次のようになる.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \left(\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \quad (1.219)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.220)$$

ただし,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (1.221)$$

これより, \mathbf{A} を消去すると,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mu \left(\iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \right) \quad (1.222)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (1.223)$$

問題

観測点 \mathbf{r} に電流源 \mathbf{J} がない場合, 電界は次のように変形することができる. 導出せよ.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \nabla \times \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (1.224)$$

ただし,

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (1.225)$$

解答

ベクトル恒等式

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (1.226)$$

および

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (1.227)$$

より,

$$\frac{1}{k^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{1}{k^2} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} + \frac{\mu}{k^2} \mathbf{J} \quad (1.228)$$

観測点 \mathbf{r} に電流源 \mathbf{J} がない場合、電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -j\omega \left(\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{1}{k^2} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \\ &= \frac{-j\omega}{\omega^2 \mu \epsilon} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega \mu \epsilon} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{j\omega \epsilon} \nabla \times \nabla \times \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'\end{aligned}\quad (1.229)$$

1.11.2 積分表示式の変形

上式の第 2 項の積分を $\mathbf{I}_2(\mathbf{r})$ とおき、若干の変形を行う。

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{r}) \equiv \nabla \nabla \cdot \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' = \nabla \iiint_V \nabla \cdot (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}')) dV' \quad (1.230)$$

ベクトル公式より、

$$\nabla \cdot (G \mathbf{J}) = \mathbf{J} \cdot \nabla G + G (\nabla \cdot \mathbf{J}) \quad (1.231)$$

上式の ∇ は \mathbf{r} に関する微分であるため、第 2 項はゼロである。よって、

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{r}) = \nabla \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (1.232)$$

グリーン関数の**対称性** (symmetry) を考慮すると、

$$\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (1.233)$$

これより、

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{r}) = -\nabla \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (1.234)$$

また、ベクトル公式より、

$$\nabla' \cdot (G \mathbf{J}) = \mathbf{J} \cdot \nabla' G + G (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \quad (1.235)$$

よって、

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_2(\mathbf{r}) &= -\nabla \iiint_V \left\{ \nabla' \cdot (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}')) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right\} dV' \\ &= -\nabla \iint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}' + \nabla \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'\end{aligned}\quad (1.236)$$

電流源 \mathbf{J} は領域 V 内部にあり面 S 上には存在しないため, 上式の第 1 項はゼロ. さらに,

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_2(\mathbf{r}) &= \nabla \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' = \iiint_V (\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) (\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) dV' \\ &= - \iiint_V (\nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) (\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) dV'\end{aligned}\quad (1.237)$$

ここで,

$$\nabla' (G \nabla' \cdot \mathbf{J}) = (\nabla' G) (\nabla' \cdot \mathbf{J}) + G \nabla' (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \quad (1.238)$$

より,

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' (\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) dV' - \iiint_V \nabla' (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) dV' \quad (1.239)$$

いま, 任意の定ベクトルを \mathbf{a} とおくと, **発散定理** (divergence theorem) は,

$$\begin{aligned}\iiint_V \nabla \cdot (f \mathbf{a}) dV &= \oint_S f \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \\ \mathbf{a} \cdot \iiint_V \nabla f dV &= \mathbf{a} \cdot \oint_S f d\mathbf{S}\end{aligned}\quad (1.240)$$

よって,

$$\iiint_V \nabla f dV = \oint_S f d\mathbf{S} \quad (1.241)$$

が得られ, これを用いると,

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' (\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) dV' - \oint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{S}' \quad (1.242)$$

電流源 \mathbf{J} は領域 V 内部にあって, 面 S 上には存在しないため, 上式の第 2 項はゼロである. したがって,

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (1.243)$$

これより, 電界 \mathbf{E} は,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -j\omega\mu \left(\iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \right) \\ &= -j\omega\mu \left(\iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{k^2} \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \right)\end{aligned}\quad (1.244)$$

これは, グリーンの第二定理を基にした電磁界の積分表示式と一致する.

1.12 モード関数の直交性

1.12.1 ローレンツの相反定理

誘電率 $\bar{\epsilon}$, および透磁率 $\bar{\mu}$ が対称ダイアディクスで与えられる場合について, ローレンツの相反定理を導出する. いま, 閉じた面 S で囲まれた領域 V に電磁流源が存在するときの電磁界を考える. そこで, 領域 V に電流源 \mathbf{J}_a , および等価磁流源 \mathbf{M}_a があるとき, 電磁界を $\mathbf{E}_a, \mathbf{H}_a$ とすると, Maxwell の方程式より,

$$\nabla \times \mathbf{H}_a = j\omega \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_a + \mathbf{J}_a \quad (1.245)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E}_a = j\omega \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_a + \mathbf{M}_a \quad (1.246)$$

また, 領域 V に電流源 \mathbf{J}_b , 等価磁流源 \mathbf{M}_b があるときの電磁界を $\mathbf{E}_b, \mathbf{H}_b$ とすると, Maxwell の方程式より,

$$\nabla \times \mathbf{H}_b = j\omega \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_b + \mathbf{J}_b \quad (1.247)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E}_b = j\omega \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_b + \mathbf{M}_b \quad (1.248)$$

電界 \mathbf{E}_b と式 (1.245) のスカラ積, 磁界 \mathbf{H}_a と式 (1.248) のスカラ積は各々, 次のようになる. これより, \mathbf{E}_b と式 (1.245) のスカラ積, および \mathbf{H}_a と式 (1.248) のスカラ積を求める

$$\mathbf{E}_b \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_a) = j\omega \mathbf{E}_b \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{J}_a \quad (1.249)$$

$$\mathbf{H}_a \cdot (-\nabla \times \mathbf{E}_b) = j\omega \mathbf{H}_a \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_b + \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{M}_b \quad (1.250)$$

両者の和を求める

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_b \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_a) - \mathbf{H}_a \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_b) \\ &= j\omega \mathbf{E}_b \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{J}_a + j\omega \mathbf{H}_a \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_b + \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{M}_b \end{aligned} \quad (1.251)$$

ベクトル公式 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ を用いて変形すると,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_b \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_a) - \mathbf{H}_a \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_b) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{H}_a \times \mathbf{E}_b) = -\nabla \cdot (\mathbf{E}_b \times \mathbf{H}_a) \\ &= j\omega \mathbf{E}_b \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_a + j\omega \mathbf{H}_a \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_b + \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{J}_a + \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{M}_b \end{aligned} \quad (1.252)$$

同様に電界 \mathbf{E}_a と式 (1.247) のスカラ積, 磁界 \mathbf{H}_b と式 (1.246) のスカラ積を求める

$$\mathbf{E}_a \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_b) = j\omega \mathbf{E}_a \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_b + \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{J}_b \quad (1.253)$$

$$\mathbf{H}_b \cdot (-\nabla \times \mathbf{E}_a) = j\omega \mathbf{H}_b \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b \cdot \mathbf{M}_a \quad (1.254)$$

両者の和を求め、ベクトル公式を用いると、

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_a \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_b) - \mathbf{H}_b \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_a) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{H}_b \times \mathbf{E}_a) = -\nabla \cdot (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b) \\ &= j\omega \mathbf{E}_a \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_b + j\omega \mathbf{H}_b \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_a + \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{J}_b + \mathbf{H}_b \cdot \mathbf{M}_a \end{aligned} \quad (1.255)$$

ここで、 $\bar{\epsilon}$, $\bar{\mu}$ は対称ダイアディクスであるから、次式が成り立つ⁶.

$$\mathbf{E}_a \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_b = \mathbf{E}_b \cdot \bar{\epsilon}^\top \cdot \mathbf{E}_a = \mathbf{E}_b \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_a \quad (1.257)$$

$$\mathbf{H}_a \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_b = \mathbf{H}_b \cdot \bar{\mu}^\top \cdot \mathbf{H}_a = \mathbf{H}_b \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_a \quad (1.258)$$

ただし、 $\bar{\epsilon}^\top$, $\bar{\mu}^\top$ は、 $\bar{\epsilon}$, $\bar{\mu}$ の転置を示す。式(1.252)–式(1.255)を求める、上式を用いると、

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b - \mathbf{E}_b \times \mathbf{H}_a) = \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{J}_a + \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{M}_b - \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{J}_b - \mathbf{H}_b \cdot \mathbf{M}_a \quad (1.259)$$

これが、対称ダイアディクス $\bar{\epsilon}$, $\bar{\mu}$ の媒質における**ローレンツの相反定理**(Lorentz reciprocity theorem) である。さらに、式(1.259)を全ての電磁流源を含む領域 V にわたって体積積分すると、

$$\begin{aligned} & \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b - \mathbf{E}_b \times \mathbf{H}_a) dV \\ &= \iiint_V (\mathbf{E}_b \cdot \mathbf{J}_a + \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{M}_b - \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{J}_b - \mathbf{H}_b \cdot \mathbf{M}_a) dV \end{aligned} \quad (1.260)$$

発散定理を用いて体積積分を面積分に変換し、積分形式のローレンツの相反定理は、

$$\begin{aligned} & \oint_S (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b - \mathbf{E}_b \times \mathbf{H}_a) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iiint_V (\mathbf{E}_b \cdot \mathbf{J}_a + \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{M}_b - \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{J}_b - \mathbf{H}_b \cdot \mathbf{M}_a) dV \end{aligned} \quad (1.261)$$

1.12.2 モードの直交性の導出

電磁流源のない ($\mathbf{J}_a = \mathbf{J}_b = \mathbf{M}_a = \mathbf{M}_b = 0$) 点では、ローレンツの相反定理の式(1.259)の右辺はゼロとなり、

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b - \mathbf{E}_b \times \mathbf{H}_a) = 0 \quad (1.262)$$

⁶ ベクトル \mathbf{A} とダイアディクス $\bar{\mathbf{a}}$ のスカラ積には次のような関係が成り立つ。

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}^\top \cdot \mathbf{A} \quad (1.256)$$

ただし、ただし、 $\bar{\mathbf{a}}^\top$ は、 $\bar{\mathbf{a}}$ の転置を示す。

いま、円柱座標系 (ρ, z) において z 軸方向の伝搬定数 γ_n の伝送波を考えると、電磁界は因子 $e^{\mp\gamma_n z}$ を含み ($\mathbf{r} = \rho + z\mathbf{a}_z$),

$$\mathbf{E}_a(\rho, z) \equiv \mathbf{E}_n \equiv \vec{\mathcal{E}}_n(\rho) e^{\mp\gamma_n z} \quad (1.263)$$

$$\mathbf{H}_a(\rho, z) \equiv \mathbf{H}_n \equiv \pm \vec{\mathcal{H}}_n(\rho) e^{\mp\gamma_n z} \quad (1.264)$$

とおいて n 次モード $\vec{\mathcal{E}}_n(\rho)$, $\vec{\mathcal{H}}_n(\rho)$ を考え、また、

$$\mathbf{E}_b(\rho, z) \equiv \mathbf{E}_m \equiv \vec{\mathcal{E}}_m(\rho) e^{\mp\gamma_m z} \quad (1.265)$$

$$\mathbf{H}_b(\rho, z) \equiv \mathbf{H}_m \equiv \pm \vec{\mathcal{H}}_m(\rho) e^{\mp\gamma_m z} \quad (1.266)$$

とおいて m 次モード $\vec{\mathcal{E}}_m(\rho)$, $\vec{\mathcal{H}}_m(\rho)$ を考える ($n \neq m$). ただし、 γ_n , γ_m は、 n 次, m 次モードの $\pm z$ 方向の伝搬定数を各々示す. これを用いて式 (1.262) を求めると、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m - \mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n) &= 0 \\ \left(\nabla_t + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left\{ \vec{\mathcal{E}}_n e^{\mp\gamma_n z} \times (\pm \vec{\mathcal{H}}_m e^{\mp\gamma_m z}) - \vec{\mathcal{E}}_m e^{\mp\gamma_m z} \times (\pm \vec{\mathcal{H}}_n e^{\mp\gamma_n z}) \right\} &= 0 \\ \nabla_t \cdot (\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m - \mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n) \mp (\gamma_n + \gamma_m) \mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m - \mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n) &= 0 \\ \left\{ \nabla_t \cdot (\vec{\mathcal{E}}_n \times \vec{\mathcal{H}}_m - \vec{\mathcal{E}}_m \times \vec{\mathcal{H}}_n) - (\gamma_n + \gamma_m) \mathbf{a}_z \cdot (\vec{\mathcal{E}}_n \times \vec{\mathcal{H}}_m - \vec{\mathcal{E}}_m \times \vec{\mathcal{H}}_n) \right\} e^{\mp(\gamma_n + \gamma_m)z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.267)$$

上式第 2 項では、 \mathbf{a}_z とのスカラ積を求めているので、電磁界の z 成分は不要で、次式が成り立つ。

$$\nabla_t \cdot (\vec{\mathcal{E}}_n \times \vec{\mathcal{H}}_m - \vec{\mathcal{E}}_m \times \vec{\mathcal{H}}_n) - (\gamma_n + \gamma_m) \mathbf{a}_z \cdot (\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m} - \vec{\mathcal{E}}_{t,m} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) = 0 \quad (1.268)$$

ここで、横断面内電磁界 $\vec{\mathcal{E}}_{t,n}$, $\vec{\mathcal{H}}_{t,n}$ は、

$$\vec{\mathcal{E}}_n(\rho) = \vec{\mathcal{E}}_{t,n} + E_{z,n} \mathbf{a}_z \quad (1.269)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_n(\rho) = \vec{\mathcal{H}}_{t,n} + H_{z,n} \mathbf{a}_z \quad (1.270)$$

および $\vec{\mathcal{H}}_{t,n}$, $\vec{\mathcal{H}}_{t,m}$ は、

$$\vec{\mathcal{E}}_m(\rho) = \vec{\mathcal{E}}_{t,m} + E_{z,m} \mathbf{a}_z \quad (1.271)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_m(\rho) = \vec{\mathcal{H}}_{t,m} + H_{z,m} \mathbf{a}_z \quad (1.272)$$

導波路断面 S で面積分すると、

$$\iint_S \nabla_t \cdot (\vec{\mathcal{E}}_n \times \vec{\mathcal{H}}_m - \vec{\mathcal{E}}_m \times \vec{\mathcal{H}}_n) dS = (\gamma_n + \gamma_m) \iint_S (\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m} - \vec{\mathcal{E}}_{t,m} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) \cdot \mathbf{a}_z dS \quad (1.273)$$

2次元の発散定理を用いると,

$$\oint_C (\vec{\mathcal{E}}_n \times \vec{\mathcal{H}}_m - \vec{\mathcal{E}}_m \times \vec{\mathcal{H}}_n) \cdot \mathbf{n} d\sigma = (\gamma_n + \gamma_m) \iint_S (\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m} - \vec{\mathcal{E}}_{t,m} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) \cdot \mathbf{a}_z dS \quad (1.274)$$

導波路の管壁が完全導体の場合, $\mathbf{n} \times \vec{\mathcal{E}}_n = 0$ および $\mathbf{n} \times \vec{\mathcal{E}}_m = 0$ ゆえ, 上式の周回積分はゼロである. また, 導波路の管壁が完全導体ではないとき, 管壁がインピーダンス境界として $\vec{\mathcal{E}}_t = Z_s(\mathbf{n} \times \vec{\mathcal{H}})$ で表される場合, これを考慮して計算すると, 同様に周回積分はゼロとなる. よって,

$$(\gamma_n + \gamma_m) \iint_S (\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m} - \vec{\mathcal{E}}_{t,m} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \quad (1.275)$$

また, 電磁界 \mathbf{E}_b , \mathbf{H}_b として,

$$\mathbf{E}_b(\rho, z) \equiv \mathbf{E}_m \equiv \vec{\mathcal{E}}_m(\rho) e^{\pm \gamma_m z} \quad (1.276)$$

$$\mathbf{H}_b(\rho, z) \equiv \mathbf{H}_m \equiv \mp \vec{\mathcal{H}}_m(\rho) e^{\pm \gamma_m z} \quad (1.277)$$

を考えると, 式 (1.262) は次のようになる.

$$\left(\nabla_t + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left\{ \vec{\mathcal{E}}_n e^{\mp \gamma_n z} \times (\mp \vec{\mathcal{H}}_m e^{\pm \gamma_m z}) - \vec{\mathcal{E}}_m e^{\pm \gamma_m z} \times (\pm \vec{\mathcal{H}}_n e^{\mp \gamma_n z}) \right\} = 0 \quad (1.278)$$

これより,

$$\begin{aligned} \nabla_t \cdot (\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m - \mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n) \mp (\gamma_n - \gamma_m) \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m - \mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n) &= 0 \\ \nabla_t \cdot (\vec{\mathcal{E}}_n \times \vec{\mathcal{H}}_m - \vec{\mathcal{E}}_m \times \vec{\mathcal{H}}_n) &= (\gamma_n - \gamma_m) \mathbf{a}_z \cdot (-\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m} - \vec{\mathcal{E}}_{t,m} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) \end{aligned} \quad (1.279)$$

同様にして, 導波路断面 S で面積分して, 2次元の発散定理を用いると,

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla_t \cdot (\vec{\mathcal{E}}_n \times \vec{\mathcal{H}}_m - \vec{\mathcal{E}}_m \times \vec{\mathcal{H}}_n) dS &= \oint_C (\vec{\mathcal{E}}_n \times \vec{\mathcal{H}}_m - \vec{\mathcal{E}}_m \times \vec{\mathcal{H}}_n) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= (\gamma_n - \gamma_m) \iint_S (-\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m} - \vec{\mathcal{E}}_{t,m} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) \cdot \mathbf{a}_z dS \end{aligned} \quad (1.280)$$

導波管断面の管壁に沿う周回積分はゼロゆえ,

$$(\gamma_n - \gamma_m) \iint_S (-\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m} - \vec{\mathcal{E}}_{t,m} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \quad (1.281)$$

式 (1.275) と式 (1.281) を連立させると, 次のような**モードの直交性** (mode orthogonality) を表す式が得られる.

$$\iint_S (\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m}) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \quad (1.282)$$

$$\iint_S (\vec{\mathcal{E}}_{t,m} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \quad (1.283)$$

なお、積分範囲を導波管断面の一部（面 s 、周回積分路 c ）とする場合は、周回積分はゼロにならないので、

$$\begin{aligned} & \oint_c (\vec{\mathcal{E}}_n \times \vec{\mathcal{H}}_m - \vec{\mathcal{E}}_m \times \vec{\mathcal{H}}_n) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= (\gamma_n + \gamma_m) \iint_s (\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m} - \vec{\mathcal{E}}_{t,m} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) \cdot \mathbf{a}_z dS \\ &= (\gamma_n - \gamma_m) \iint_s (-\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m} - \vec{\mathcal{E}}_{t,m} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) \cdot \mathbf{a}_z dS \neq 0 \end{aligned} \quad (1.284)$$

この場合は、次のような関係が得られる。

$$\gamma_n \iint_s (\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m}) \cdot \mathbf{a}_z dS = \gamma_m \iint_s (\vec{\mathcal{E}}_{t,m} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) \cdot \mathbf{a}_z dS \quad (1.285)$$

1.13 モード電圧・電流によるインピーダンス行列

1.13.1 無損失な場合

先と同様に $\bar{\epsilon}^\top = \bar{\epsilon}$, $\bar{\mu}^\top = \bar{\mu}$ で、さらに媒質が無損失な場合 ($\bar{\epsilon}^* = \bar{\epsilon}$, $\bar{\mu}^* = \bar{\mu}$) を考える。電磁流源がない場合 ($\mathbf{J}_a = \mathbf{J}_b = \mathbf{M}_a = \mathbf{M}_b = 0$), Maxwell の方程式の複素共役は、

$$(\nabla \times \mathbf{H}_b)^* = (j\omega \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_b)^* \quad (1.286)$$

$$(-\nabla \times \mathbf{E}_b)^* = (j\omega \bar{\mu}^* \cdot \mathbf{H}_b)^* \quad (1.287)$$

ただし、 $(\cdot)^*$ は共役複素数を示す。これを基にして次のような電磁界を考える。

$$\nabla \times \mathbf{H}_a = j\omega \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_a \quad (1.288)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E}_a = j\omega \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_a \quad (1.289)$$

また、

$$\nabla \times \mathbf{H}_b^* = -j\omega \bar{\epsilon}^* \cdot \mathbf{E}_b^* \quad (1.290)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E}_b^* = -j\omega \bar{\mu}^* \cdot \mathbf{H}_b^* \quad (1.291)$$

これより、 \mathbf{E}_b^* のスカラ積、および \mathbf{H}_a のスカラ積は各々次のようになる。

$$\mathbf{E}_b^* \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_a) = j\omega \mathbf{E}_b^* \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_a \quad (1.292)$$

$$\mathbf{H}_a \cdot (-\nabla \times \mathbf{E}_b^*) = -j\omega \mathbf{H}_a \cdot \bar{\mu}^* \cdot \mathbf{H}_b^* \quad (1.293)$$

両者の和をとると、

$$\mathbf{E}_b^* \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_a) - \mathbf{H}_a \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_b^*) = j\omega \mathbf{E}_b^* \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_a - j\omega \mathbf{H}_a \cdot \bar{\mu}^* \cdot \mathbf{H}_b^* \quad (1.294)$$

ベクトル公式より,

$$\nabla \cdot (\mathbf{H}_a \times \mathbf{E}_b^*) = -\nabla \cdot (\mathbf{E}_b^* \times \mathbf{H}_a) = j\omega \mathbf{E}_b^* \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_a - j\omega \mathbf{H}_a \cdot \bar{\mu}^* \cdot \mathbf{H}_b^* \quad (1.295)$$

同様にして, \mathbf{E}_a のスカラ積, および \mathbf{H}_b^* のスカラ積を求めるとき,

$$\mathbf{E}_a \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_b^*) = -j\omega \mathbf{E}_a \cdot \bar{\epsilon}^* \cdot \mathbf{E}_b^* \quad (1.296)$$

$$\mathbf{H}_b^* \cdot (-\nabla \times \mathbf{E}_a) = j\omega \mathbf{H}_b^* \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_a \quad (1.297)$$

両者の和をとり, ベクトル公式を用いると,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_b^*) - \mathbf{H}_b^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_a) &= \nabla \cdot (\mathbf{H}_b^* \times \mathbf{E}_a) = -\nabla \cdot (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b^*) \\ &= -j\omega \mathbf{E}_a \cdot \bar{\epsilon}^* \cdot \mathbf{E}_b^* + j\omega \mathbf{H}_b^* \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_a \end{aligned} \quad (1.298)$$

式 (1.295) および式 (1.298) より,

$$\begin{aligned} &- \nabla \cdot (\mathbf{E}_b^* \times \mathbf{H}_a) - \nabla \cdot (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b^*) \\ &= j\omega \mathbf{E}_b^* \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_a - j\omega \mathbf{H}_a \cdot \bar{\mu}^* \cdot \mathbf{H}_b^* - j\omega \mathbf{E}_a \cdot \bar{\epsilon}^* \cdot \mathbf{E}_b^* + j\omega \mathbf{H}_b^* \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_a \end{aligned} \quad (1.299)$$

ここで, $\bar{\epsilon}^{*\top} = \bar{\epsilon}$, $\bar{\mu}^{*\top} = \bar{\mu}$ である,

$$\mathbf{E}_a \cdot \bar{\epsilon}^* \cdot \mathbf{E}_b^* = \mathbf{E}_b^* \cdot \bar{\epsilon}^{*\top} \cdot \mathbf{E}_a = \mathbf{E}_b^* \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_a \quad (1.300)$$

$$\mathbf{H}_a \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_b^* = \mathbf{H}_b^* \cdot \bar{\mu}^{*\top} \cdot \mathbf{H}_a = \mathbf{H}_b^* \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_a \quad (1.301)$$

これより, 次式が得られる.

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b^* + \mathbf{E}_b^* \times \mathbf{H}_a) = 0 \quad (1.302)$$

また, 積分形式では,

$$\iint_S (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b^* + \mathbf{E}_b^* \times \mathbf{H}_a) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.303)$$

これらの式は, $\bar{\epsilon}^\top = \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^*$, $\bar{\mu}^\top = \bar{\mu} = \bar{\mu}^*$ の媒質において電磁流源がない場合にローレンツの相反定理を応用した例である.

同様にして, 円柱座標系 (ρ, z) において次のような電磁界の複素共役を考える.

$$\mathbf{E}_b^*(\rho, z) \equiv \mathbf{E}_m^* \equiv \vec{\mathcal{E}}_m^*(\rho) e^{\mp \gamma_m^* z} \quad (1.304)$$

$$\mathbf{H}_b^*(\rho, z) \equiv \mathbf{H}_m^* \equiv \pm \vec{\mathcal{H}}_m^*(\rho) e^{\mp \gamma_m^* z} \quad (1.305)$$

ここで,

$$\vec{\mathcal{E}}_m^*(\rho) = \vec{\mathcal{E}}_{t,m}^* + E_{z,m}^* \mathbf{a}_z \quad (1.306)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_m^*(\rho) = \vec{\mathcal{H}}_{T,m}^* + H_{z,m}^* \mathbf{a}_z \quad (1.307)$$

これより、式(1.302)は(導出省略),

$$(\gamma_n + \gamma_m^*) \iint_S (\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m}^* + \vec{\mathcal{E}}_{t,m}^* \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \quad (1.308)$$

あるいは、次のような電磁界の複素共役を考えると,

$$\mathbf{E}_b^*(\boldsymbol{\rho}, z) \equiv \mathbf{E}_m^* \equiv \vec{\mathcal{E}}_m^*(\boldsymbol{\rho}) e^{\pm \gamma_m^* z} \quad (1.309)$$

$$\mathbf{H}_b^*(\boldsymbol{\rho}, z) \equiv \mathbf{H}_m^* \equiv \mp \vec{\mathcal{H}}_m^*(\boldsymbol{\rho}) e^{\pm \gamma_m^* z} \quad (1.310)$$

式(1.302)は次のようになる(導出省略).

$$(\gamma_n - \gamma_m^*) \iint_S (-\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m}^* + \vec{\mathcal{E}}_{t,m}^* \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \quad (1.311)$$

これらを連立させると、 m 次モードを複素共役とする**直交性**(orthogonality)が得られる.

$$\iint_S (\vec{\mathcal{E}}_{t,n} \times \vec{\mathcal{H}}_{t,m}^*) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \quad (1.312)$$

$$\iint_S (\vec{\mathcal{E}}_{t,m}^* \times \vec{\mathcal{H}}_{t,n}) \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \quad (1.313)$$

1.13.2 相反回路

対称ダイアディクス $\bar{\epsilon}$, $\bar{\mu}$ の媒質において、面 S に囲まれた領域 V に電磁流源がない場合、積分形式の**ローレンツの相反定理**(Lorentz reciprocity theorem)は次のようになる。

$$\iint_S (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b - \mathbf{E}_b \times \mathbf{H}_a) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.314)$$

いま、单一モードの多端子対回路網を考え、異なる2つの励振条件において、端子面の横断面内電磁界を次のように定義する。

$$\mathbf{E}_a \Big|_{S_i} \equiv \check{V}_a^{(i)} \vec{\mathcal{E}}_t^{(i)} \quad (1.315)$$

$$\mathbf{H}_a \Big|_{S_i} \equiv \check{I}_a^{(i)} \vec{\mathcal{H}}_t^{(i)} \quad (1.316)$$

$$\mathbf{E}_b \Big|_{S_i} \equiv \check{V}_b^{(i)} \vec{\mathcal{E}}_t^{(i)} \quad (1.317)$$

$$\mathbf{H}_b \Big|_{S_i} \equiv \check{I}_b^{(i)} \vec{\mathcal{H}}_t^{(i)} \quad (1.318)$$

ただし、 S_i は端子 # i における断面を示す。これより、式(1.314)は、

$$\sum_i \iint_{S_i} (\check{V}_a^{(i)} \vec{\mathcal{E}}_t^{(i)} \times \check{I}_b^{(i)} \vec{\mathcal{H}}_t^{(i)} - \check{V}_b^{(i)} \vec{\mathcal{E}}_t^{(i)} \times \check{I}_a^{(i)} \vec{\mathcal{H}}_t^{(i)}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.319)$$

整理して,

$$\sum_i (\check{V}_a^{(i)} \check{I}_b^{(i)} - \check{V}_b^{(i)} \check{I}_a^{(i)}) \iint_{S_i} (\vec{\mathcal{E}}_t^{(i)} \times \vec{\mathcal{H}}_t^{(i)}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.320)$$

ここで, 次の列ベクトル

$$\check{\mathbf{V}}^a \equiv \begin{pmatrix} \check{V}_a^{(1)} \\ \check{V}_a^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{I}}^b \equiv \begin{pmatrix} \check{I}_b^{(1)} \\ \check{I}_b^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{V}}^b \equiv \begin{pmatrix} \check{V}_b^{(1)} \\ \check{V}_b^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{I}}^a \equiv \begin{pmatrix} \check{I}_a^{(1)} \\ \check{I}_a^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.321)$$

および対角行列

$$[Q] \equiv \begin{pmatrix} Q^{(1)} & 0 & \cdots \\ 0 & Q^{(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad Q^{(i)} \equiv \int_{S_i} (\vec{\mathcal{E}}_t^{(i)} \times \vec{\mathcal{H}}_t^{(i)}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.322)$$

を定義して, 式 (1.320) を表すと ($\check{\mathbf{V}}_T^a$, $\check{\mathbf{I}}_T^a$ は, $\check{\mathbf{V}}^a$, $\check{\mathbf{I}}^a$ の転置),

$$\check{\mathbf{V}}_T^a [Q] \check{\mathbf{I}}^b - \check{\mathbf{I}}_T^a [Q] \check{\mathbf{V}}^b = 0 \quad (1.323)$$

このとき, インピーダンス行列 $[\check{\mathbf{Z}}]$ (行列要素は \check{Z}_{ij}) が $\check{\mathbf{V}} = [\check{\mathbf{Z}}] \check{\mathbf{I}}$ で定義されているとき,

$$\check{\mathbf{V}}^a = [\check{\mathbf{Z}}] \check{\mathbf{I}}^a \quad (1.324)$$

$$\check{\mathbf{V}}_T^a = ([\check{\mathbf{Z}}] \check{\mathbf{I}}^a)_T = \check{\mathbf{I}}_T^a [\check{\mathbf{Z}}]_T \quad (1.325)$$

$$\check{\mathbf{V}}^b = [\check{\mathbf{Z}}] \check{\mathbf{I}}^b \quad (1.326)$$

ただし, $[\check{\mathbf{Z}}]_T$ は $[\check{\mathbf{Z}}]$ の転置を示す. これより, 式 (1.323) を変形して,

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{I}}_T^a [\check{\mathbf{Z}}]_T [Q] \check{\mathbf{I}}^b - \check{\mathbf{I}}_T^a [Q] [\check{\mathbf{Z}}] \check{\mathbf{I}}^b &= 0 \\ \check{\mathbf{I}}_T^a ([\check{\mathbf{Z}}]_T [Q] - [Q] [\check{\mathbf{Z}}]) \check{\mathbf{I}}^b &= 0 \end{aligned} \quad (1.327)$$

$\check{\mathbf{I}}_T^a \neq 0$, $\check{\mathbf{I}}^b \neq 0$ のとき,

$$[\check{\mathbf{Z}}]_T [Q] - [Q] [\check{\mathbf{Z}}] = 0 \quad (1.328)$$

ここで, 対角行列を次のようにおく.

$$[\sqrt{Q}] = \begin{pmatrix} \sqrt{Q^{(1)}} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{Q^{(2)}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.329)$$

また,

$$[\sqrt{Q}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{Q^{(1)}} & 0 & \cdots \\ 0 & 1/\sqrt{Q^{(2)}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.330)$$

これより,

$$\begin{aligned} [\sqrt{Q}]^{-1} \{ [\check{\mathbf{Z}}]_T [Q] - [Q] [\check{\mathbf{Z}}] \} [\sqrt{Q}]^{-1} &= 0 \\ [\sqrt{Q}]^{-1} [\check{\mathbf{Z}}]_T [\sqrt{Q}] - [\sqrt{Q}] [\check{\mathbf{Z}}] [\sqrt{Q}]^{-1} &= 0 \\ ([\sqrt{Q}] [\check{\mathbf{Z}}] [\sqrt{Q}]^{-1})_T &= [\sqrt{Q}] [\check{\mathbf{Z}}] [\sqrt{Q}]^{-1} \end{aligned} \quad (1.331)$$

よって、対称な行列 $[\mathbf{Z}]$ が次のように定義できる.

$$[\mathbf{Z}] \equiv [\sqrt{Q}] [\check{\mathbf{Z}}] [\sqrt{Q}]^{-1} = [\mathbf{Z}]_T \quad (1.332)$$

逆は,

$$[\check{\mathbf{Z}}] = [\sqrt{Q}]^{-1} [\mathbf{Z}] [\sqrt{Q}] \quad (1.333)$$

これを用いるとインピーダンス行列に関する式は,

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{V}} &= [\check{\mathbf{Z}}] \check{\mathbf{I}} = [\sqrt{Q}]^{-1} [\mathbf{Z}] [\sqrt{Q}] \check{\mathbf{I}} \\ [\sqrt{Q}] \check{\mathbf{V}} &= [\mathbf{Z}] [\sqrt{Q}] \check{\mathbf{I}} \end{aligned} \quad (1.334)$$

そこで、対称行列で表されるインピーダンス行列 $[\mathbf{Z}]$ より,

$$\mathbf{V} \equiv [\sqrt{Q}] \check{\mathbf{V}} \quad (1.335)$$

$$\mathbf{I} \equiv [\sqrt{Q}] \check{\mathbf{I}} \quad (1.336)$$

を定義する。よって,

$$\mathbf{V} = [\mathbf{Z}] \mathbf{I} \quad (1.337)$$

$$[\mathbf{Z}]_T = [\mathbf{Z}] \quad (1.338)$$

ここで,

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V^{(1)} \\ V^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{Z}] = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I^{(1)} \\ I^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.339)$$

これより、式 (1.323) は次のようになる。

$$\mathbf{V}_T^a \mathbf{I}^b - \mathbf{I}_T^a \mathbf{V}^b = 0 \quad (1.340)$$

もう一度、対称行列となることを確認すると、 $\mathbf{V} = [\mathbf{Z}] \mathbf{I}$ より、

$$([\mathbf{Z}] \mathbf{I}^a)_T \mathbf{I}^b - \mathbf{I}_T^a ([\mathbf{Z}] \mathbf{I}^b) = \mathbf{I}_T^a ([\mathbf{Z}]_T - [\mathbf{Z}]) \mathbf{I}^b = 0 \quad (1.341)$$

よって、

$$[\mathbf{Z}]_T = [\mathbf{Z}] \quad (1.342)$$

1.14 電磁界の境界条件

1.14.1 磁界の境界条件（面電流がある場合）

異なる媒質 (1), (2) が接する境界面 S のまわりに、方形ループ（境界面に平行な辺の長さを Δl , 垂直な辺の長さを h ）からなる積分路 C_0 を考える（ループの面 $S_0 (= h \cdot \Delta l)$ と境界面 S は直交している）。**アンペアーマクスウェルの法則** (Ampere-Maxwell's law) は、**ストークスの定理** (Stokes' theorem) を用いると、

$$\oint_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S_0} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_0 dS_0 + \iint_{S_0} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_0 dS_0 \quad (1.343)$$

ただし、 $d\mathbf{s}$ は C_0 に沿うベクトル線要素、 dS_0 は方形ループ面上の面要素、 \mathbf{n}_0 は S_0 に垂直な正方向の法線単位ベクトルを示す。

積分路 C_0 を境界面に限りなく近付け $h \rightarrow 0$, Δl を十分小さくすると（微小方形ループ）、上式右辺の第 1 項はゼロとなる。したがって、

$$(\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)}) \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \lim_{h \rightarrow 0} h \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_0 dl = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n}_0 dl \quad (1.344)$$

ただし、 \mathbf{J}_s は境界面上の電流を示し、 $\lim_{h \rightarrow 0} h \mathbf{J} = \mathbf{J}_s$

また、 $\mathbf{H}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$ は媒質 (1), (2) の境界面での磁界を各々示す。

そして、 $\boldsymbol{\tau}$ は dl に沿う単位ベクトルを示し、

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}. \quad (1.345)$$

ただし、 \mathbf{n} は境界面 S の法線単位ベクトルを示す（媒質 (2) から (1) を見た方向が正）。これより、

$$(\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)}) \cdot (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}) = \mathbf{n}_0 \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)})] = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n}_0$$

よって、磁界の境界条件は次のようになる。

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)}) = \mathbf{J}_s \quad (1.346)$$

1.14.2 電界の境界条件（面磁流がある場合）

一方、**ファラデーの電磁誘導の法則** (Faraday's law of induction)

$$-\oint_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S_0} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_0 dS_0 \quad (1.347)$$

を用いて同様に求めると電界の境界条件が得られ、次のようになる。

$$(\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}) \times \mathbf{n} = 0 \quad (1.348)$$

これより、**完全電気導体** (perfect electric conductor) 上の電磁界の境界条件は

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{at a perfect electric conductor}) \quad (1.349)$$

ただし、 \mathbf{n} は導体から見た方向を正とする法線ベクトルである。

完全電気導体に双対的な**完全磁気導体** (perfect magnetic conductor) を仮想的に考えると、

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0 \quad (\text{at a perfect magnetic conductor}) \quad (1.350)$$

ファラデーの電磁誘導の法則に等価的な磁流 \mathbf{M} を考慮して、

$$-\oint_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S_0} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_0 dS_0 + \mathbf{M} \quad (1.351)$$

これより、電界の境界条件は、

$$(\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}) \times \mathbf{n} = \mathbf{M}_s \quad (1.352)$$

ただし、 \mathbf{M}_s は境界面上の磁流を示し、

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \mathbf{M} = \mathbf{M}_s \quad (1.353)$$

1.15 影像法

1.15.1 完全電気導体

電磁流素子と無限に大きい**完全電気導体** (perfect electric conductor) がある場合、**影像法** (Image theory) より導体を取り除いて鏡像の位置に影像素子をおき、導体面上の全電界の接線成分が $\mathbf{E}|_{\tan} = 0$ となるように影像素子の振幅を決定すればよい。

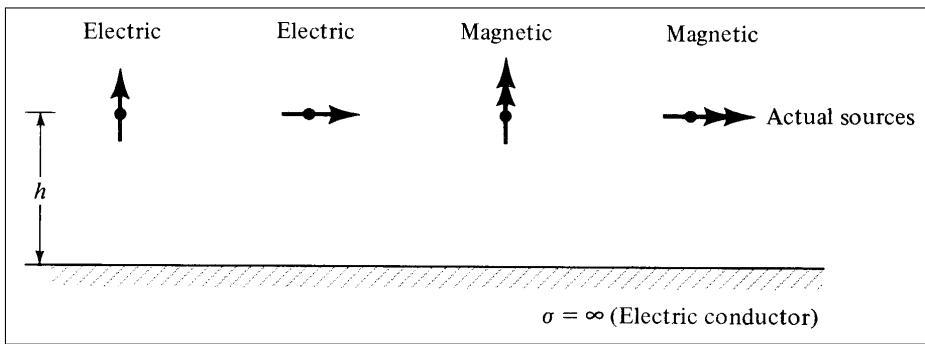


図 1.10. 完全電気導体と微小電流・磁流素子

完全電気導体による影像素子は図のようになり、完全電気導体を取り除いた 2 素子アレーとなる。

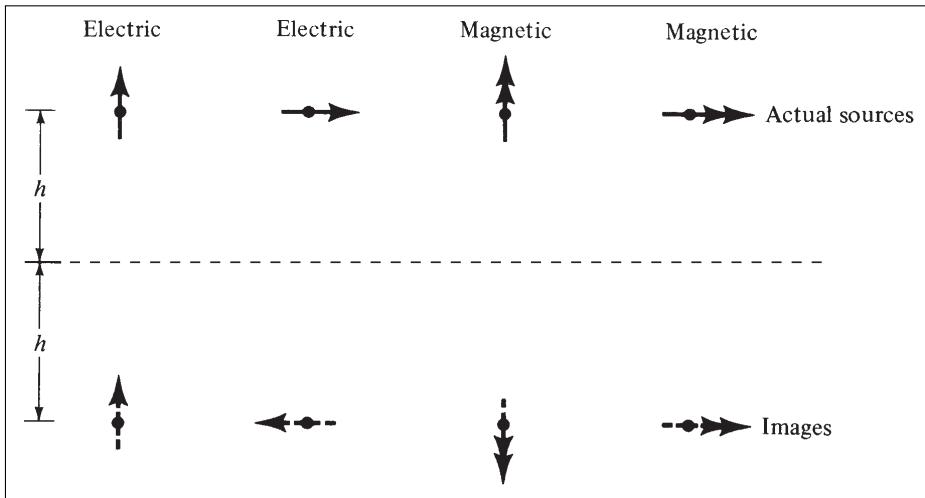


図 1.11. 完全電気導体による影像素子

微小電流素子による電界, 磁界

電流を原点におき、電流の向きを z 軸方向とする微小電流素子（電気ダイポール）によって生じる観測点 (r, θ, ϕ) における電界 \mathbf{E}_e , 磁界 \mathbf{H}_e は、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e(r, \theta, \phi) &= \frac{I\Delta z}{2\pi} j\omega\mu \left(\frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \cos\theta \mathbf{a}_r \\ &\quad + \frac{I\Delta z}{4\pi} j\omega\mu \left(1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin\theta \mathbf{a}_\theta \\ &\equiv f_e(r) \cos\theta \mathbf{a}_r + e_e(r) \sin\theta \mathbf{a}_\theta \end{aligned} \quad (1.354)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_e(r, \theta, \phi) &= \frac{I\Delta z}{4\pi} jk \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin\theta \mathbf{a}_\phi \\ &\equiv h_e(r) \sin\theta \mathbf{a}_\phi \end{aligned} \quad (1.355)$$

ただし、 \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_θ , \mathbf{a}_ϕ は、 r , θ , ϕ 方向に沿う単位ベクトルを示す。観測点を円柱座標 (ρ, ϕ, z) として表すこともでき、単位ベクトルの関係は次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\rho &= \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_r &= \sin \theta (\cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y) + \cos \theta \mathbf{a}_z = \sin \theta \mathbf{a}_\rho + \cos \theta \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\theta &= \cos \theta (\cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y) - \sin \theta \mathbf{a}_z = \cos \theta \mathbf{a}_\rho - \sin \theta \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y\end{aligned}$$

ただし、 \mathbf{a}_ρ は ρ 方向に沿う単位ベクトルを示す。これより、 \mathbf{E}_e を円筒座標系の単位ベクトルを用いて表すと、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_e &= f_e(r) \cos \theta (\sin \theta \mathbf{a}_\rho + \cos \theta \mathbf{a}_z) + e_e(r) \sin \theta (\cos \theta \mathbf{a}_\rho - \sin \theta \mathbf{a}_z) \\ &= (f_e(r) + e_e(r)) \sin \theta \cos \theta \mathbf{a}_\rho + (f_e(r) \cos^2 \theta - e_e(r) \sin^2 \theta) \mathbf{a}_z \\ &= E_\rho(r, \theta) \mathbf{a}_\rho + E_z(r, \theta) \mathbf{a}_z\end{aligned}\quad (1.356)$$

地導体に垂直な微小磁流素子

微小磁流素子の場合は、双対性より電界 \mathbf{E}_m は、

$$\mathbf{E}_m(r, \theta, \phi) = -e_m(r) \sin \theta \mathbf{a}_\phi \quad (1.357)$$

導体板が磁流素子と垂直であるから、導体面上では $\theta' = \pi - \theta$ とえ、

$$\sin \theta' = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \quad (1.358)$$

影像磁流素子による電界の接線成分 $\mathbf{E}'_{m1} \Big|_{tan}$ は、 $r' = r$ より、

$$\mathbf{E}'_{m1} \Big|_{tan} = -e_m(r') \sin \theta' \mathbf{a}_\phi = -e_m(r) \sin \theta \mathbf{a}_\phi = \mathbf{E}_{m1} \Big|_{tan} \quad (1.359)$$

影像素子の振幅を K' とすると、導体面上の電界の境界条件より、

$$K \mathbf{E}_{m1} \Big|_{tan} + K' \mathbf{E}'_{m1} \Big|_{tan} = 0 \quad (1.360)$$

$$K \mathbf{E}_{m1} \Big|_{tan} + K' \mathbf{E}_{m1} \Big|_{tan} = (K + K') \mathbf{E}_{m1} \Big|_{tan} = 0 \quad (1.361)$$

$$\therefore K' = -K \quad (1.362)$$

地導体に平行な微小電流素子

導体板が $\rho = d$ において、 $\mathbf{a}_R (= \cos \Phi \mathbf{a}_x + \sin \Phi \mathbf{a}_y)$ に直交する場合、接線電界 $\mathbf{E}_{e2} \Big|_{tan}$ は、

$$\mathbf{E}_{e2} \Big|_{tan} = E_\rho(r, \theta) (\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\Phi) \mathbf{a}_\Phi + E_z(r, \theta) \mathbf{a}_z \quad (1.363)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\Phi &= (\cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y) \cdot (-\sin \Phi \mathbf{a}_x + \cos \Phi \mathbf{a}_y) \\ &= -\cos \phi \sin \Phi + \sin \phi \cos \Phi = \sin(\phi - \Phi)\end{aligned}\quad (1.364)$$

円筒座標 (ρ, ϕ, z) において、影像素子は点 $(\rho = 2d, \phi = \Phi, z = 0)$ におき、電流の向きは $+z$ 方向とする。影像素子の位置を原点とする円柱座標 (ρ'', ϕ'', z) 、球座標 (r'', θ'', ϕ'') を考えると、導体面上では $\phi'' - \Phi = \pi - (\phi - \Phi)$ ゆえ、

$$\sin(\phi'' - \Phi) = \sin(\pi - (\phi - \Phi)) = \sin(\phi - \Phi) \quad (1.365)$$

影像素子による接線電界 $\mathbf{E}'_{e2}|_{tan}$ は、 $\rho'' = \rho$, $r'' = r$, $\theta'' = \theta$ より、 $E'_\rho(r'', \theta'') = E_\rho(r, \theta)$, $E'_z(r'', \theta'') = E_z(r, \theta)$ ゆえ、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'_{e2}|_{tan} &= E_\rho(r'', \theta'') \sin(\phi'' - \Phi) \mathbf{a}_\Phi + E_z(r'', \theta'') \mathbf{a}_z \\ &= E_\rho(r, \theta) \sin(\phi - \Phi) \mathbf{a}_\Phi + E_z(r, \theta) \mathbf{a}_z = \mathbf{E}_{e2}|_{tan}\end{aligned}\quad (1.366)$$

影像素子の振幅を I'' とすると、導体面上における電界の境界条件より、

$$I \mathbf{E}_{e2}|_{tan} + I'' \mathbf{E}'_{e2}|_{tan} = 0 \quad (1.367)$$

よって、

$$\begin{aligned}I \mathbf{E}_{e2}|_{tan} + I'' \mathbf{E}_{e2}|_{tan} &= (I + I'') \mathbf{E}_{e2}|_{tan} = 0 \\ I + I'' &= 0 \\ \therefore I'' &= -I\end{aligned}\quad (1.368)$$

1.15.2 完全磁気導体

同様にして、**完全磁気導体** (perfect magnetic conductor)^{*7} がある場合も、影像法を適用でき、導体上の全磁界の接線成分が $\mathbf{H}|_{tan} = 0$ となるように影像素子を決めればよい。

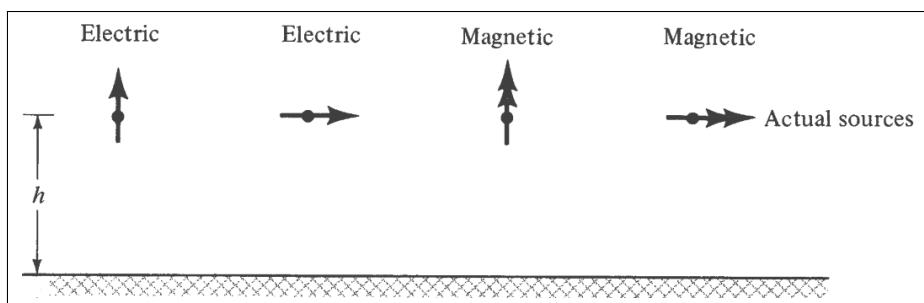


図 1.12. 完全磁気導体と微小電流・磁流素子

^{*7} 完全電気導体の境界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ に双対的な $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$ が成り立つ仮想的な境界面

影像素子は図のようになり、2素子アレーとなる。

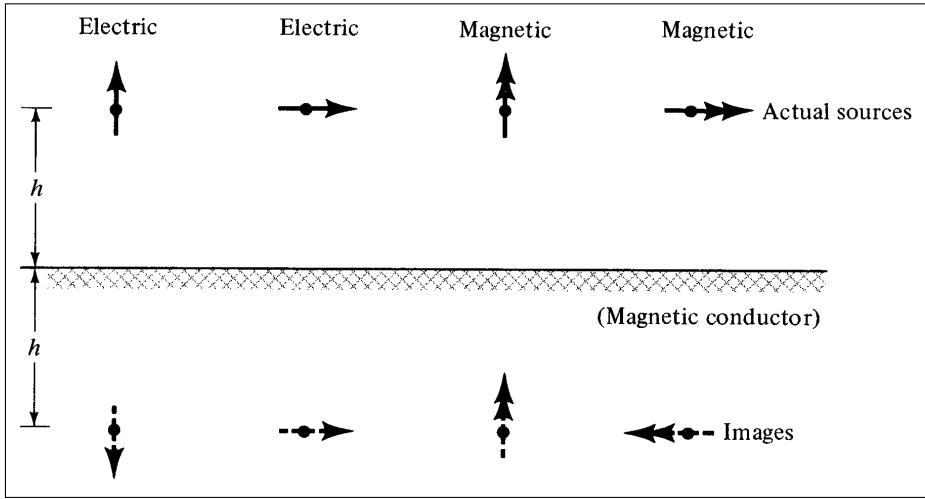


図 1.13. 完全磁気導体による影像素子

微小磁流素子による電界, 磁界

微小磁流 (振幅 K) による電界 \mathbf{E}_m および磁界 \mathbf{H}_m は、双対性より ($\mathbf{E}_e \rightarrow \mathbf{H}_m$, $\mathbf{H}_e \rightarrow -\mathbf{E}_m$, $I \rightarrow K$),

$$-\mathbf{E}_m = \frac{K\Delta z}{4\pi} jk \left(1 + \frac{1}{jkr}\right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta \mathbf{a}_\phi \equiv e_m(r) \sin \theta \mathbf{a}_\phi \quad (1.369)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m &= \frac{K\Delta z}{2\pi} j\omega\mu \left(\frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \theta \mathbf{a}_r \\ &\quad + \frac{K\Delta z}{4\pi} j\omega\mu \left(1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta \mathbf{a}_\theta \\ &\equiv f_m(r) \cos \theta \mathbf{a}_r + h_m(r) \sin \theta \mathbf{a}_\theta \\ &= (f_m(r) + h_m(r)) \sin \theta \cos \theta \mathbf{a}_\rho + (f_m(r) \cos^2 \theta - h_m(r) \sin^2 \theta) \mathbf{a}_z \\ &= H_\rho(r, \theta) \mathbf{a}_\rho + H_z(r, \theta) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (1.370)$$

地導体に垂直な微小電流素子

導体板が $z = -d$ の $x - y$ 面にある場合、接線電界 $\mathbf{E}_{e1}|_{tan}$ は、

$$\mathbf{E}_{e1}|_{tan} = E_\rho(r, \theta) \mathbf{a}_\rho = (f_e(r) + e_e(r)) \sin \theta \cos \theta \mathbf{a}_\rho \quad (1.371)$$

影像素子は点 $(x = 0, y = 0, z = -2d)$ におき、電流の向きは $+z$ 方向とする。影像素子の位置を原点とする円柱座標 (ρ, ϕ, z') 、球座標 (r', θ', ϕ) を考えると $z' = z + 2d$ 。導体面上で

は $\theta' = \pi - \theta$ ゆえ,

$$\sin \theta' = \sin(\pi - \theta) = -\sin(-\theta) = \sin \theta \quad (1.372)$$

$$\cos \theta' = \cos(\pi - \theta) = -\cos(-\theta) = -\cos \theta \quad (1.373)$$

影像素子による導体面上の接線電界 $\mathbf{E}'_{e1}|_{tan}$ は, $r' = r$ より,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{e1}|_{tan} &= (f_e(r') + e_e(r')) \sin \theta' \cos \theta' \mathbf{a}_\rho \\ &= (f_e(r) + e_e(r)) \sin \theta (-\cos \theta) \mathbf{a}_\rho = -\mathbf{E}_{e1}|_{tan} \end{aligned} \quad (1.374)$$

影像素子の励振係数を I' とすると, 導体面上における電界の境界条件より,

$$I\mathbf{E}_{e1}|_{tan} + I'\mathbf{E}'_{e1}|_{tan} = 0 \quad (1.375)$$

よって,

$$\begin{aligned} I\mathbf{E}_{e1}|_{tan} + I'(-\mathbf{E}_{e1}|_{tan}) &= (I - I')\mathbf{E}_{e1}|_{tan} = 0 \\ I - I' &= 0 \\ \therefore I' &= I \end{aligned} \quad (1.376)$$

影像素子の振幅 I' は, 電流素子の振幅 I と等しい値となる.

地導体に平行な微小磁流素子

導体板に平行な磁流素子による接線電界 $\mathbf{E}_{m2}|_{tan}$ は,

$$\mathbf{E}_{m2}|_{tan} = -e_m(r) \sin \theta (\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\Phi) \mathbf{a}_\Phi \quad (1.377)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\Phi &= (-\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y) \cdot (-\sin \Phi \mathbf{a}_x + \cos \Phi \mathbf{a}_y) \\ &= \sin \phi \sin \Phi + \cos \phi \cos \Phi = \cos(\phi - \Phi) \end{aligned} \quad (1.378)$$

導体面上では $\phi'' - \Phi = \pi - (\phi - \Phi)$ ゆえ,

$$\cos(\phi'' - \Phi) = \cos(\pi - (\phi - \Phi)) = -\cos(\phi - \Phi) \quad (1.379)$$

よって, 影像素子による接線電界 $\mathbf{E}'_{m2}|_{tan}$ は,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{m2}|_{tan} &= -e_m(r'') \sin \theta'' \cos(\phi'' - \Phi) \mathbf{a}_\Phi \\ &= e_m(r) \sin \theta \cos(\phi - \Phi) \mathbf{a}_\Phi = -\mathbf{E}_{m2}|_{tan} \end{aligned} \quad (1.380)$$

影像素子の振幅を K' とすると, 導体面上での電界の境界条件より,

$$K\mathbf{E}_{m2}|_{tan} + K''\mathbf{E}'_{m2}|_{tan} = 0 \quad (1.381)$$

$$K\mathbf{E}_{m2}|_{tan} + K''(-\mathbf{E}_{m2}|_{tan}) = (K - K'')\mathbf{E}_{m2}|_{tan} = 0 \quad (1.382)$$

$$\therefore K'' = K \quad (1.383)$$

1.16 平面波の反射・透過

1.16.1 平面波の表示

異なる媒質の境界面に平面波が入射すると、反射・透過が生じる。いま、単位ベクトル \mathbf{a}_r に沿う方向に伝搬する平面波を考えると、電界 \mathbf{E}^+ および磁界 \mathbf{H}^+ は、

$$\mathbf{E}^+ = \mathbf{A}^+ e^{-jka_r \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}^+ = Y_w (\mathbf{a}_r \times \mathbf{E}^+) \quad (1.384)$$

ただし、 \mathbf{r} は位置ベクトル、 k は波数、 Y_w は波動アドミタンスを示し、無損失な場合、

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon, \quad Y_w = \frac{1}{Z_w} = \frac{k}{\omega \mu} \quad (1.385)$$

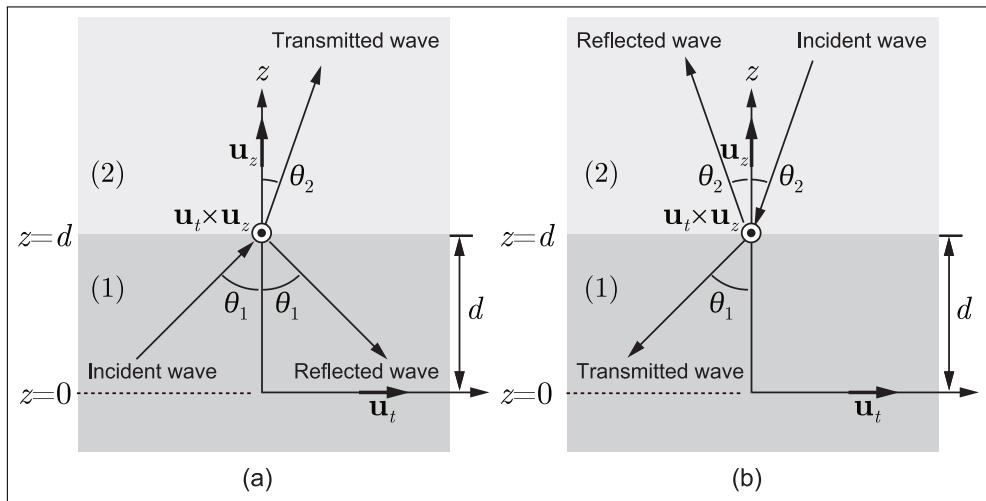


図 1.14. 座標系および単位ベクトルの定義

境界面の法線方向を z 軸方向にとると、平面波の反射方向 $\hat{\mathbf{a}}_r$ は反射の法則より、

$$\hat{\mathbf{a}}_r = (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x)\mathbf{a}_x + (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_y)\mathbf{a}_y - (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z)\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_r - 2(\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z)\mathbf{a}_z \quad (1.386)$$

この反射波の電界 \mathbf{E}^- および磁界 \mathbf{H}^- は、

$$\mathbf{E}^- = \mathbf{A}^- e^{-jka_r \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}^- = Y_w (\hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{E}^-) \quad (1.387)$$

平面波 \mathbf{E}^\pm は、入射面に垂直な電界 \mathbf{E}_\perp^\pm と平行な電界 \mathbf{E}_\parallel^\pm の重ね合わせで表すことができ、

$$\mathbf{E}^\pm = \mathbf{E}_\perp^\pm + \mathbf{E}_\parallel^\pm \quad (1.388)$$

いま、入射面が xz 面内となるよう座標系を定義すると、電界は \mathbf{a}_y 方向成分と、これに直交する成分で表され、

$$\mathbf{E}^+ = \mathbf{A}^+ e^{-jk\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{A}^+ = A_\perp^+ \mathbf{a}_y + A_\parallel^+ (\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_r) \quad (1.389)$$

$$\mathbf{E}^- = \mathbf{A}^- e^{-jk\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{A}^- = A_\perp^- \mathbf{a}_y + A_\parallel^- (\hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{a}_y) \quad (1.390)$$

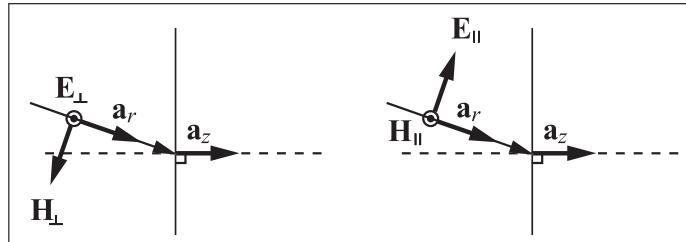


図 1.15. 入射面と電界、磁界の方向

ここで、

$$\mathbf{a}_r = -\sin \theta \mathbf{a}_x + \cos \theta \mathbf{a}_z, \quad \hat{\mathbf{a}}_r = -\sin \theta \mathbf{a}_x - \cos \theta \mathbf{a}_z \quad (1.391)$$

より、

$$\begin{aligned} -k\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r} &= -k(-\sin \theta \mathbf{a}_x + \cos \theta \mathbf{a}_z) \cdot (x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z) \\ &= k(x \sin \theta - z \cos \theta) \end{aligned} \quad (1.392)$$

$$\begin{aligned} -k\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r} &= -k(-\sin \theta \mathbf{a}_x - \cos \theta \mathbf{a}_z) \cdot (x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z) \\ &= k(x \sin \theta + z \cos \theta) \end{aligned} \quad (1.393)$$

よって、電界 \mathbf{E}^+ , \mathbf{E}^- は、

$$\mathbf{E}^+ = \mathbf{A}^+ e^{-jk\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r}} = \left\{ A_\perp^+ \mathbf{a}_y + A_\parallel^+ (\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_r) \right\} e^{jk(x \sin \theta - z \cos \theta)} \quad (1.394)$$

$$\mathbf{E}^- = \mathbf{A}^- e^{-jk\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}} = \left\{ A_\perp^- \mathbf{a}_y + A_\parallel^- (\hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{a}_y) \right\} e^{jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} \quad (1.395)$$

また、磁界についても重ね合わせで、

$$\mathbf{H}^\pm = \mathbf{H}_\perp^\pm + \mathbf{H}_\parallel^\pm \quad (1.396)$$

ここで、磁界 \mathbf{H}^+ , \mathbf{H}^- は、

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^+ &= Y_w \left[\mathbf{a}_r \times \left\{ A_\perp^+ \mathbf{a}_y + A_\parallel^+ (\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_r) \right\} \right] e^{jk(x \sin \theta - z \cos \theta)} \\ &= Y_w \left\{ A_\perp^+ (\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_y) + A_\parallel^+ \mathbf{a}_y \right\} e^{jk(x \sin \theta - z \cos \theta)} \end{aligned} \quad (1.397)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^- &= Y_w \left[\hat{\mathbf{a}}_r \times \left\{ A_\perp^- \mathbf{a}_y + A_\parallel^- (\hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{a}_y) \right\} \right] e^{jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} \\ &= Y_w \left\{ A_\perp^- (\hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{a}_y) - A_\parallel^- \mathbf{a}_y \right\} e^{jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} \end{aligned} \quad (1.398)$$

入射面に電界が垂直な場合、電界の z 方向成分がないので TE 波、一方、入射面に電界が平行な場合、磁界の z 方向成分がないので TM 波である。ここで、

$$(\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_r) \cdot \mathbf{a}_x = (\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y) \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \cos \theta \quad (1.399)$$

$$(\hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{a}_y) \cdot \mathbf{a}_x = (\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x) \cdot \hat{\mathbf{a}}_r = -\mathbf{a}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_r = \cos \theta \quad (1.400)$$

より、 xy 面の接線電磁界は（添え字 t は接線成分を示す）、

$$\mathbf{E}_t^+ = (A_\perp^+ \mathbf{a}_y + A_\parallel^+ \cos \theta \mathbf{a}_x) e^{jk(x \sin \theta - z \cos \theta)} \quad (1.401)$$

$$\mathbf{E}_t^- = (A_\perp^- \mathbf{a}_y + A_\parallel^- \cos \theta \mathbf{a}_x) e^{jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} \quad (1.402)$$

$$\mathbf{H}_t^+ = Y_w (-A_\perp^+ \cos \theta \mathbf{a}_x + A_\parallel^+ \mathbf{a}_y) e^{jk(x \sin \theta - z \cos \theta)} \quad (1.403)$$

$$\mathbf{H}_t^- = Y_w (A_\perp^- \cos \theta \mathbf{a}_x - A_\parallel^- \mathbf{a}_y) e^{jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} \quad (1.404)$$

となり、反射波と透過波を扱うためには、このような 2 つの平面波の重ね合わせによって電磁界を表せばよい。

まず、電界について、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \mathbf{E}_t^+ + \mathbf{E}_t^- \\ &= (A_\perp^+ \mathbf{a}_y + A_\parallel^+ \cos \theta \mathbf{a}_x) e^{jk(x \sin \theta - z \cos \theta)} + (A_\perp^- \mathbf{a}_y + A_\parallel^- \cos \theta \mathbf{a}_x) e^{jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} \\ &\equiv (V_\perp(z) \mathbf{a}_y + V_\parallel(z) \mathbf{a}_x) e^{jkx \sin \theta} \end{aligned} \quad (1.405)$$

ここで、

$$V_\perp(z) = A_\perp^+ e^{-jkz \cos \theta} + A_\perp^- e^{jkz \cos \theta} \equiv V_\perp^+ e^{-jk_z z} + V_\perp^- e^{jk_z z} \quad (1.406)$$

$$V_\parallel(z) = \cos \theta (A_\parallel^+ e^{-jkz \cos \theta} + A_\parallel^- e^{jkz \cos \theta}) \equiv V_\parallel^+ e^{-jk_z z} + V_\parallel^- e^{jk_z z} \quad (1.407)$$

ただし、

$$V_\perp^\pm \equiv A_\perp^\pm, \quad V_\parallel^\pm \equiv \cos \theta A_\parallel^\pm, \quad k_z \equiv k \cos \theta \quad (1.408)$$

同様にして、磁界について、

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \mathbf{H}_t^+ + \mathbf{H}_t^- \\ &= Y_w (-A_\perp^+ \cos \theta \mathbf{a}_x + A_\parallel^+ \mathbf{a}_y) e^{jk(x \sin \theta - z \cos \theta)} \\ &\quad + Y_w (A_\perp^- \cos \theta \mathbf{a}_x - A_\parallel^- \mathbf{a}_y) e^{jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} \\ &\equiv (-I_\perp(z) \mathbf{a}_x + I_\parallel(z) \mathbf{a}_y) e^{jkx \sin \theta} \end{aligned} \quad (1.409)$$

ここで、

$$I_\perp(z) = Y_w \cos \theta (A_\perp^+ e^{-jkz \cos \theta} - A_\perp^- e^{jkz \cos \theta}) \equiv Y_\perp (V_\perp^+ e^{-jk_z z} - V_\perp^- e^{jk_z z}) \quad (1.410)$$

$$I_\parallel(z) = Y_w (A_\parallel^+ e^{-jkz \cos \theta} - A_\parallel^- e^{jkz \cos \theta}) \equiv Y_\parallel (V_\parallel^+ e^{-jk_z z} - V_\parallel^- e^{jk_z z}) \quad (1.411)$$

ただし,

$$Y_{\perp} \equiv Y_w \cos \theta, \quad Y_{\parallel} \equiv \frac{Y_w}{\cos \theta}, \quad k_z \equiv k \cos \theta \quad (1.412)$$

1.16.2 境界面での反射・透過

媒質の境界面 ($z = 0$) における接線電磁界の連続条件より,

$$(V_{\perp,1}(0)\mathbf{a}_y + V_{\parallel,1}(0)\mathbf{a}_x)e^{jk_1 x \sin \theta_1} = (V_{\perp,2}(0)\mathbf{a}_y + V_{\parallel,2}(0)\mathbf{a}_x)e^{jk_2 x \sin \theta_2} \quad (1.413)$$

$$(-I_{\perp,1}(0)\mathbf{a}_x + I_{\parallel,1}(0)\mathbf{a}_y)e^{jk_1 x \sin \theta_1} = (-I_{\perp,2}(0)\mathbf{a}_x + I_{\parallel,2}(0)\mathbf{a}_y)e^{jk_2 x \sin \theta_2} \quad (1.414)$$

任意の x に対して成り立つ条件は,

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (1.415)$$

これは**スネルの法則** (Snell's law) である. よって, 各成分について (添字 1, 2 は領域を示す),

$$\begin{aligned} V_{\perp,1}(0) &= V_{\perp,2}(0), & I_{\perp,1}(0) &= I_{\perp,2}(0) \\ V_{\parallel,1}(0) &= V_{\parallel,2}(0), & I_{\parallel,1}(0) &= I_{\parallel,2}(0) \end{aligned} \quad (1.416)$$

上式は同じ形の 2 組の式であるため, 添え字 \perp , \parallel を省略した次式を解けばよい.

$$V_1(0) = V_2(0), \quad I_1(0) = I_2(0) \quad (1.417)$$

したがって,

$$V_1^+ + V_1^- = V_2^+ + V_2^- \quad (1.418)$$

$$Y_1(V_1^+ - V_1^-) = Y_2(V_2^+ - V_2^-) \quad (1.419)$$

領域 (1) から平面波が入射したときの反射および透過を考えると, $V_2^- = 0$ として,

$$V_1^+ + V_1^- = V_2^+ \quad (1.420)$$

$$Y_1(V_1^+ - V_1^-) = Y_2 V_2^+ \quad (1.421)$$

これより, V_2^+ , あるいは V_1^- を消去すると,

$$\left. \frac{V_1^-}{V_1^+} \right|_{V_2^- = 0} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad \left. \frac{V_2^+}{V_1^+} \right|_{V_2^- = 0} = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2} \quad (1.422)$$

したがって, TE 波の反射係数 R_{\perp} は,

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \left. \frac{A_{\perp,1}^-}{A_{\perp,1}^+} \right|_{A_{\perp,2}^- = 0} = \left. \frac{V_{\perp,1}^-}{V_{\perp,1}^+} \right|_{V_{\perp,2}^- = 0} = \frac{Y_{\perp,1} - Y_{\perp,2}}{Y_{\perp,1} + Y_{\perp,2}} \\ &= \frac{Y_{w1} \cos \theta_1 - Y_{w2} \cos \theta_2}{Y_{w1} \cos \theta_1 + Y_{w2} \cos \theta_2} \end{aligned} \quad (1.423)$$

また, TE 波の透過係数 T_{\perp} は,

$$\begin{aligned} T_{\perp} &= \frac{A_{\perp,2}^+}{A_{\perp,1}^+} \Big|_{A_{\perp,2}^- = 0} = \frac{V_{\perp,2}^+}{V_{\perp,1}^+} \Big|_{V_{\perp,2}^- = 0} = \frac{2Y_{\perp,1}}{Y_{\perp,1} + Y_{\perp,2}} \\ &= \frac{2Y_{w1} \cos \theta_1}{Y_{w1} \cos \theta_1 + Y_{w2} \cos \theta_2} \end{aligned} \quad (1.424)$$

同様にして, TM 波の反射係数 R_{\parallel} は,

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{A_{\parallel,1}^-}{A_{\parallel,1}^+} \Big|_{A_{\parallel,2}^- = 0} = \frac{V_{\parallel,1}^- \cos \theta_1}{V_{\parallel,1}^+ \cos \theta_1} \Big|_{V_{\parallel,2}^- = 0} = \frac{Y_{\parallel,1} - Y_{\parallel,2}}{Y_{\parallel,1} + Y_{\parallel,2}} = \frac{\frac{Y_{w1}}{\cos \theta_1} - \frac{Y_{w2}}{\cos \theta_2}}{\frac{Y_{w1}}{\cos \theta_1} + \frac{Y_{w2}}{\cos \theta_2}} \\ &= \frac{Y_{w1} \cos \theta_2 - Y_{w2} \cos \theta_1}{Y_{w1} \cos \theta_2 + Y_{w2} \cos \theta_1} \end{aligned} \quad (1.425)$$

また, TM 波の透過係数 T_{\parallel} は,

$$\begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{A_{\parallel,2}^+}{A_{\parallel,1}^+} \Big|_{A_{\parallel,2}^- = 0} = \frac{\frac{V_{\parallel,2}^+}{\cos \theta_2}}{\frac{V_{\parallel,1}^+}{\cos \theta_1}} \Big|_{V_{\parallel,2}^- = 0} = \frac{2Y_{\parallel,1}}{Y_{\parallel,1} + Y_{\parallel,2}} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} = \frac{2 \frac{Y_{w1}}{\cos \theta_1}}{\frac{Y_{w1}}{\cos \theta_1} + \frac{Y_{w2}}{\cos \theta_2}} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \\ &= \frac{2Y_{w1} \cos \theta_1}{Y_{w1} \cos \theta_2 + Y_{w2} \cos \theta_1} \end{aligned} \quad (1.426)$$

1.16.3 相対屈折率

相対屈折率 $n \equiv k_2/k_1$ を定義すると,

$$Y_{w2} = \frac{k_2}{\omega \mu_2} = n \frac{\mu_1}{\mu_2} Y_{w1} \quad (1.427)$$

これより, 各係数は次のようになる.

$$R_{\perp} = \frac{\mu_2 \cos \theta_1 - n \mu_1 \cos \theta_2}{\mu_2 \cos \theta_1 + n \mu_1 \cos \theta_2}, \quad T_{\perp} = \frac{2 \mu_2 \cos \theta_1}{\mu_2 \cos \theta_1 + n \mu_1 \cos \theta_2} \quad (1.428)$$

$$R_{\parallel} = -\frac{n \mu_1 \cos \theta_1 - \mu_2 \cos \theta_2}{n \mu_1 \cos \theta_1 + \mu_2 \cos \theta_2}, \quad T_{\parallel} = \frac{2 \mu_2 \cos \theta_1}{n \mu_1 \cos \theta_1 + \mu_2 \cos \theta_2} \quad (1.429)$$

ここで, スネルの法則より,

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} \quad (1.430)$$

1.16.4 入射角を考慮した実効比誘電率

R_{\perp} , R_{\parallel} を変形して,

$$R_{\perp} = \frac{1 - \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_1}}}{1 + \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_1}}}, \quad R_{\parallel} = -\frac{\sqrt{\frac{n^4 \cos^2 \theta_1}{n^2 - \sin^2 \theta_1}} - 1}{\sqrt{\frac{n^4 \cos^2 \theta_1}{n^2 - \sin^2 \theta_1}} + 1} \quad (1.431)$$

いま,

$$\alpha_{\perp}(\theta_1) \equiv \frac{n^2 - \sin^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_1} = \frac{n^2 - \sin^2 \theta_1}{1 - \sin^2 \theta_1} \quad (1.432)$$

$$\alpha_{\parallel}(\theta_1) \equiv \frac{n^4 \cos^2 \theta_1}{n^2 - \sin^2 \theta_1} = \frac{n^4(1 - \sin^2 \theta_1)}{n^2 - \sin^2 \theta_1} \quad (1.433)$$

とおくと, 反射係数 R_{\perp} , R_{\parallel} , 透過係数 T_{\perp} , T_{\parallel} は,

$$R_{\perp} = \frac{1 - \sqrt{\alpha_{\perp}(\theta_1)}}{1 + \sqrt{\alpha_{\perp}(\theta_1)}}, \quad T_{\perp} = \frac{2}{1 + \sqrt{\alpha_{\perp}(\theta_1)}} \quad (1.434)$$

また,

$$R_{\parallel} = \frac{1 - \sqrt{\alpha_{\parallel}(\theta_1)}}{1 + \sqrt{\alpha_{\parallel}(\theta_1)}}, \quad T_{\parallel} = \frac{2}{1 + \sqrt{\alpha_{\parallel}(\theta_1)}} \frac{\sqrt{\alpha_{\parallel}(\theta_1)}}{n} \quad (1.435)$$

ここで, $\alpha_{\perp}(\theta_1)$, $\alpha_{\parallel}(\theta_1)$ を**実効比誘電率** (effective relative permittivity) という.

垂直入射のとき ($\theta_1 = 0$),

$$\alpha_{\perp}(0) = \frac{n^2 - \sin^2 0}{\cos^2 0} = n^2 \quad (1.436)$$

$$\alpha_{\parallel}(0) = \frac{n^4 \cos^2 0}{n^2 - \sin^2 0} = n^2 \quad (1.437)$$

ここで, $n^2 = k_2^2/k_1^2 = \epsilon_2/\epsilon_1$. このとき, 反射係数 R_{\perp} , R_{\parallel} は,

$$R_{\perp}\Big|_{\theta_1=0} = \frac{1-n}{1+n}, \quad R_{\parallel}\Big|_{\theta_1=0} = -\frac{n-1}{n+1} = R_{\perp}\Big|_{\theta_1=0} \quad (1.438)$$

1.16.5 単層誘電体板における反射・透過

図のように領域 (2) を誘電体板, 領域 (1) を自由空間, 領域 (3) を誘電体媒質として, 媒質 (1) から (2), (3) に平面波が入射したときの反射, 透過を求める.

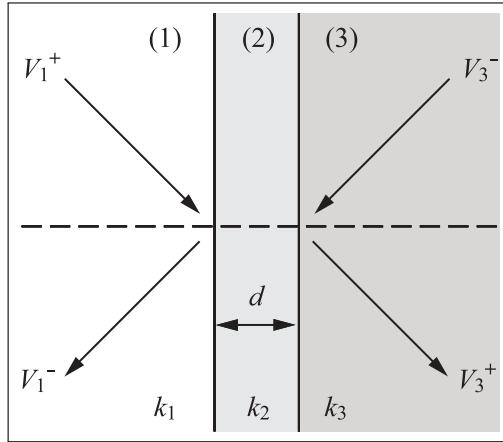


図 1.16. 単層誘電体板

領域 (1) と (2) の境界面 ($z = 0$) での接線電磁界の連続条件より得られる式は、先に求めた境界面での反射・透過と同様に、

$$V_1(0) = V_2(0), \quad (1.439)$$

$$I_1(0) = I_2(0) \quad (1.440)$$

より、

$$V_1^+ + V_1^- = V_2^+ + V_2^-, \quad (1.441)$$

$$Y_1(V_1^+ - V_1^-) = Y_2(V_2^+ - V_2^-) \quad (1.442)$$

これより、 V_2^+ 、あるいは V_2^- を消去すると、

$$\begin{aligned} V_2^- &= \frac{Y_1 + Y_2}{2Y_2} \left(-\frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} V_1^+ + V_1^- \right) = \frac{Y_1 + Y_2}{2Y_2} (-R_{11}V_1^+ + V_1^-) \\ V_2^+ &= \frac{Y_1 + Y_2}{2Y_2} \left(V_1^+ - \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} V_1^- \right) = \frac{Y_1 + Y_2}{2Y_2} (V_1^+ - R_{11}V_1^-) \end{aligned}$$

ここで、

$$R_{11} \equiv \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} \quad (1.443)$$

一方、領域 (2) と (3) の境界面 ($z = d$) での接線電磁界の連続条件より、

$$V_2(d) = V_3(0), \quad (1.444)$$

$$I_2(d) = I_3(0) \quad (1.445)$$

ゆえ、

$$V_2^+ e^{-jk_{z2}d} + V_2^- e^{jk_{z2}d} = V_3^+ + V_3^- \quad (1.446)$$

$$Y_2(V_2^+ e^{-jk_{z2}d} - V_2^- e^{jk_{z2}d}) = Y_3(V_3^+ - V_3^-) \quad (1.447)$$

いま、 $V_3^- = 0$ とおき（領域(3)からの入射波がない）、 V_3^+ を消去すると、

$$\begin{aligned} -(Y_3 - Y_2)V_2^+e^{-jk_{z2}d} &= (Y_3 + Y_2)V_2^-e^{jk_{z2}d} \\ -R_{33}V_2^+e^{-jk_{z2}d} &= V_2^- \end{aligned} \quad (1.448)$$

先に求めた V_2^+ , V_2^- を代入すると、

$$-R_{33}(V_1^+ - R_{11}V_1^-)e^{-jk_{z2}d} = -R_{11}V_1^+ + V_1^- \quad (1.449)$$

これより、反射係数 R は、

$$R = \left. \frac{V_1^-}{V_1^+} \right|_{V_3^- = 0} = \frac{R_{11} - R_{33}e^{-jk_{z2}d}}{1 - R_{11}R_{33}e^{-jk_{z2}d}} \quad (1.450)$$

ここで、

$$R_{11} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad R_{33} = \frac{Y_3 - Y_2}{Y_3 + Y_2}, \quad (1.451)$$

$$k_{z2} = k_2 \cos \theta_2 \quad (1.452)$$

ただし、 R_{11} は、先に示した領域(1)と(2)の境界面に領域(1)から平面波が入射したときの TE 波（垂直偏波 \perp ），TM 波（平行偏波 \parallel ）の反射係数を示す。同様にして、透過係数 T は（導出省略）、

$$T = \left. \frac{V_3^+}{V_1^+} \right|_{V_3^- = 0} = \frac{(1 - R_{11})(1 - R_{33})}{1 - R_{11}R_{33}e^{-jk_{z2}d}} e^{-jk_{z2}d} \quad (1.453)$$

1.16.6 多層誘電体板における反射・透過

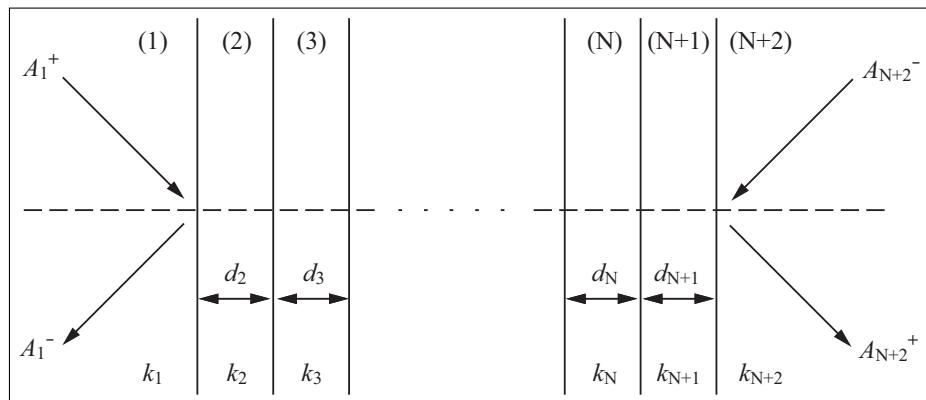


図 1.17. 多層誘電体板（ N 層の場合）

領域 (i) と (i+1) の境界面 ($z = d_i$) での接線電磁界の連続条件より,

$$V_i^+ e^{-jk_{zi}d_i} + V_i^- e^{jk_{zi}d_i} = V_{i+1}^+ + V_{i+1}^- \quad (1.454)$$

$$Y_i (V_i^+ e^{-jk_{zi}d_i} - V_i^- e^{jk_{zi}d_i}) = Y_{i+1} (V_{i+1}^+ - V_{i+1}^-) \quad (1.455)$$

ただし,

$$k_{zi} = k_i \cos \theta_i \quad (1.456)$$

まず, V_i^- を消去すると,

$$V_i^+ = \frac{e^{jk_{zi}d_i}}{2} \left\{ V_{i+1}^+ \left(1 + \frac{Y_{i+1}}{Y_i} \right) + V_{i+1}^- \left(1 - \frac{Y_{i+1}}{Y_i} \right) \right\} \quad (1.457)$$

また, V_i^+ を消去すると,

$$V_i^- = \frac{e^{-jk_{zi}d_i}}{2} \left\{ V_{i+1}^+ \left(1 - \frac{Y_{i+1}}{Y_i} \right) + V_{i+1}^- \left(1 + \frac{Y_{i+1}}{Y_i} \right) \right\} \quad (1.458)$$

まず, 垂直偏波については, 先に定義した

$$V_\perp^\pm = A_\perp^\pm, \quad Y_\perp = Y_w \cos \theta \quad (1.459)$$

より,

$$\frac{Y_{\perp,i+1}}{Y_{\perp,i}} = \frac{Y_{w,i+1} \cos \theta_{i+1}}{Y_{w,1} \cos \theta_i} \equiv W_{\perp,i} \quad (1.460)$$

よって,

$$A_{\perp,i}^+ = \frac{e^{jk_{zi}d_i}}{2} \left\{ A_{\perp,i+1}^+ (1 + W_{\perp,i}) + A_{\perp,i+1}^- (1 - W_{\perp,i}) \right\} \quad (1.461)$$

$$A_{\perp,i}^- = \frac{e^{-jk_{zi}d_i}}{2} \left\{ A_{\perp,i+1}^+ (1 - W_{\perp,i}) + A_{\perp,i+1}^- (1 + W_{\perp,i}) \right\} \quad (1.462)$$

次に, 平行偏波についても同様にして, 先に定義した

$$V_\parallel^\pm = A_\parallel^\pm \cos \theta, \quad Y_\parallel = \frac{Y_w}{\cos \theta} \quad (1.463)$$

より,

$$\frac{Y_{\parallel,i+1}}{Y_{\parallel,i}} = \frac{Y_{w,i+1} \cos \theta_i}{Y_{w,1} \cos \theta_{i+1}} \equiv W_{\parallel,i} \quad (1.464)$$

これより,

$$\begin{aligned} A_{\parallel,i}^+ \cos \theta_i &= \frac{e^{jk_{zi}d_i}}{2} \left\{ A_{\parallel,i+1}^+ \cos \theta_{i+1} (1 + W_{\parallel,i}) + A_{\parallel,i+1}^- \cos \theta_{i+1} (1 - W_{\parallel,i}) \right\} \\ A_{\parallel,i}^- \cos \theta_i &= \frac{e^{-jk_{zi}d_i}}{2} \left\{ A_{\parallel,i+1}^+ \cos \theta_{i+1} (1 - W_{\parallel,i}) + A_{\parallel,i+1}^- \cos \theta_{i+1} (1 + W_{\parallel,i}) \right\} \end{aligned} \quad (1.465)$$

よって、

$$A_{\parallel,i}^+ = \frac{e^{jk_{zi}d_i}}{2} \frac{\cos \theta_{i+1}}{\cos \theta_i} \left\{ A_{\parallel,i+1}^+ (1 + W_{\parallel,i}) + A_{\parallel,i+1}^- (1 - W_{\parallel,i}) \right\} \quad (1.466)$$

$$A_{\parallel,i}^- = \frac{e^{-jk_{zi}d_i}}{2} \frac{\cos \theta_{i+1}}{\cos \theta_i} \left\{ A_{\parallel,i+1}^+ (1 - W_{\parallel,i}) + A_{\parallel,i+1}^- (1 + W_{\parallel,i}) \right\} \quad (1.467)$$

したがって、媒質(1)（半無限、 $d_1 = 0$ ）から N 層（媒質(2), (3), …, (N+1)）の多層誘電体（媒質(N+2)は半無限）に平面波が入射したときの透過係数 T 、反射係数 R は、次式によつて得られる。

$$T = \frac{A_{N+2}^+}{A_1^+} \Big|_{A_{N+2}^+=1, A_{N+2}^-=0} = \frac{1}{A_1^+} \Big|_{A_{N+2}^+=1, A_{N+2}^-=0} \quad (1.468)$$

$$R = \frac{A_1^-}{A_1^+} \Big|_{A_{N+2}^+=1, A_{N+2}^-=0} \quad (1.469)$$

CHAPTER 2

電磁波の積分表示

まず、マクスウェルの方程式を拡張し、磁流源を導入した電磁場の積分形式を導出する、次に、ストラットンの定理およびベクトル・ヘルムホルツ方程式を用いて、波源が存在する場合における電磁界の一般的な積分表示式を求める。特に、有限の開口面からの電磁波放射を扱う開口面法について詳述し、等価な二次波源の概念に基づき、開口面上の電磁界分布から放射される電磁界を積分的に求める手法を解説する。さらに、フレネル領域およびフラウンホーファ領域における放射電磁界の近似表現を導き、フーリエ変換との関連性にも言及することで、電磁波放射に関する基礎理論を体系的に説明する。

2.1 ストラットンの定理

ベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} については、次のような発散に関する関係式がある。

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \quad (2.1)$$

いま、ベクトル \mathbf{a} の代わりに \mathbf{F} , ベクトル \mathbf{b} の代わりに $\nabla \times \mathbf{G}$ を考えると,

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) \quad (2.2)$$

両辺を交換し、体積積分すると、

$$\iiint_V \{(\nabla \times \mathbf{G}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G})\} dV = \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{G}) dV \quad (2.3)$$

ガウスの発散定理 (Gauss's divergence theorem) を用いて上式の右辺を面積分で表すと、

$$\iiint_V \{(\nabla \times \mathbf{G}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G})\} dV = \oint_S (\mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.4)$$

これをベクトルの**グリーンの第一定理** (first Green's theorem) という。これより、 \mathbf{F} と \mathbf{G} を入れ換えると、

$$\iiint_V \{(\nabla \times \mathbf{G}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{G} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})\} dV = \oint_S (\mathbf{G} \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.5)$$

式 (2.4) と式 (2.5) の差より、ベクトルの**グリーンの第二定理** (second Green's theorem)，いわゆる**ストラットンの定理** (Stratton's theorems) が得られ、次のようになる。

$$\iiint_V (\mathbf{F} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{G} - \mathbf{G} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}) dV = \oint_S (\mathbf{G} \times \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.6)$$

ただし、 \mathbf{n} は外向き法線ベクトルを示す。

2.2 波源があるときのベクトル・ヘルムホルツ方程式

2.2.1 磁流源の導入

Maxwell の方程式において、電流源 \mathbf{J} および電荷 ρ に加えて、仮想的な**磁流源** (magnetic current) \mathbf{J}_m および**磁荷** (magnetic charge) ρ_m を導入すると、次のようなになる。

$$\nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} = -\mathbf{J}_m \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - j\omega\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{J} \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu} \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + j\omega\rho = 0 \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m + j\omega\rho_m = 0 \quad (2.12)$$

式 (2.7) において回転を求めるとき、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu\nabla \times \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}_m \quad (2.13)$$

式 (2.8) を用いて、 $\nabla \times \mathbf{H}$ を消去して、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu(j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}) = -\nabla \times \mathbf{J}_m \quad (2.14)$$

ここで、

$$k^2 \equiv \omega^2\epsilon\mu \quad (2.15)$$

とおくと、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{J}_m \quad (2.16)$$

これは、波源があるときの**ベクトルヘルムホルツ方程式** (vector Helmholtz equations with sources) である。

同様にして、磁界 \mathbf{H} について次式が得られる（導出省略）。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} = -j\omega\epsilon \mathbf{J}_m + \nabla \times \mathbf{J} \quad (2.17)$$

このようにして得られたベクトルヘルムホルツ方程式を基に、源による電磁界の一般的な表現を求めていく。

2.2.2 電磁流源がある場合の双対性

Maxwell の方程式に磁流源を導入したとき、次のような**双対性** (duality) があることがわかる。

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}_m, \quad \rho \rightarrow \rho_m \quad (2.18)$$

$$\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}, \quad \mathbf{J}_m \rightarrow -\mathbf{J}, \quad \rho_m \rightarrow \rho \quad (2.19)$$

2.3 電磁界の一般的な積分表示式

ストラットンの定理を基にして、電磁界の一般的な積分表示式を導出^{*1}しよう。

2.3.1 ストラットンの定理を基にした積分

次の図のように、閉曲面 S_1, S_2, \dots, S_n によって囲まれた領域 V を考え、法線ベクトル \mathbf{n} を曲面上に領域 V の内部に向くように定義する。

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\mathbf{G} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{G}) dV \\ &= \oint_{S_1 + S_2 + \dots + S_n} (\mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{G} - \mathbf{G} \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot (-\mathbf{n}) dS \end{aligned} \quad (2.20)$$

ただし、法線ベクトル \mathbf{n} は通常のストラットンの定理の式とは逆向き、つまり領域 V の内向きであることに注意すること。上式において、ベクトル \mathbf{F} , \mathbf{G} を次のようにおく。

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{E} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{G} \equiv \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{a} = \psi \mathbf{a} \quad (2.22)$$

^{*1} Samuel Silver, "Microwave Antenna Theory and Design," 3.8. General Solution of the Field Equations in Terms of the Sources, for a Time-periodic Field, McGraw Hill (1949), IEE, reprint (1984), ISBN-13: 978-0863410178.

ただし, \mathbf{E} は電界, r は点 P からの距離, \mathbf{a} は任意の定ベクトルを示す. このとき, ψ は次に示す波源のないスカラヘルムホルツ方程式を満足する.

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (2.23)$$

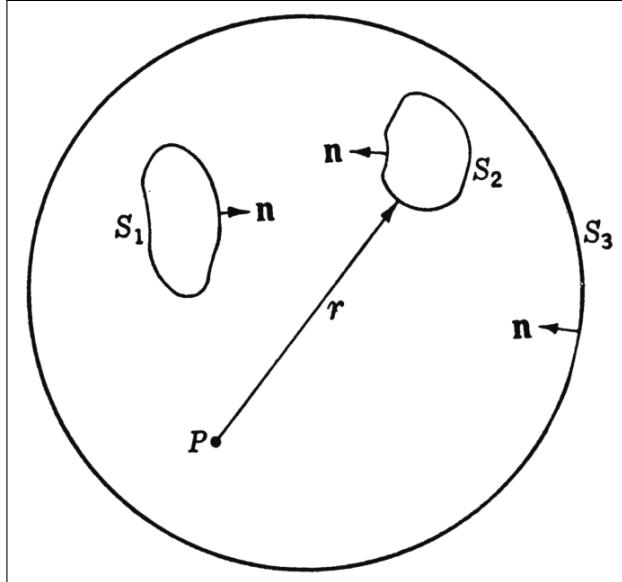


図 2.1. 閉曲面 S_i と単位ベクトル n の定義

いま, 上式のラプラシアン ∇^2 を, 球座標系 (r, θ, ϕ) で一般的に表すと,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.24)$$

であるが, $\psi = \psi(r)$ ゆえ, θ, ϕ に依らないので,

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (2.25)$$

関数 G は点 P で特異点となるので, 点 P を中心とする半径 r_0 の球面 Σ を考え, S_1, S_2, \dots, S_n と Σ で囲まれた領域を V' とする. ただし, 点 P は閉曲面 S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 上にある場合は後述するが, ここでは面 S_i 上にないものとする.

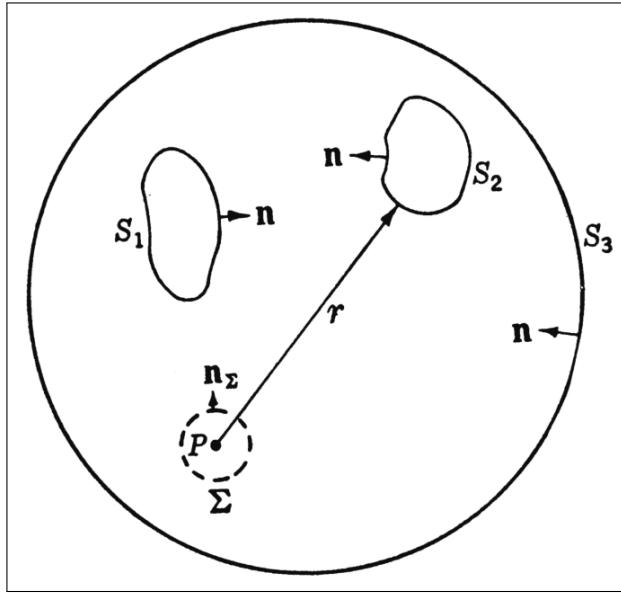


図 2.2. 閉曲面 S_i と点 P を囲む球面 Σ

これより、ストラットンの定理は、

$$\begin{aligned} & \iiint_{V'} (\psi \mathbf{a} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \nabla \times \psi \mathbf{a}) dV \\ &= \oint_{S_1 + S_2 + \dots + S_n + \Sigma} (-\mathbf{E} \times \nabla \times \psi \mathbf{a} + \psi \mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (2.26)$$

ただし、 Σ は ψ の発散する領域を囲む閉曲面、 V' は V の中で Σ で囲まれる領域を除いた領域を示す。また、 r は閉曲面 Σ の中の点 P と領域 V' 中の任意の点までの距離を示す。得られた体積積分は電界を用いて計算する式となっているので、ここでは、体積積分を変形して波源に関する積分表示を導出していく。

$$\begin{aligned} \psi \mathbf{a} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \psi \mathbf{a} \cdot (k^2 \mathbf{E} - j\omega \mu \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{J}_m) \\ &= \mathbf{a} \cdot (\psi k^2 \mathbf{E} - j\omega \mu \mathbf{J} \psi - \psi \nabla \times \mathbf{J}_m) \end{aligned} \quad (2.27)$$

また、被積分関数の第 2 項は、ベクトル公式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{b} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{b} - \nabla^2 \mathbf{b} \quad (2.28)$$

より (\mathbf{a} は定ベクトル)，

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \nabla \times \nabla \times \psi \mathbf{a} &= \mathbf{E} \cdot \{\nabla \nabla \cdot (\psi \mathbf{a}) - \nabla^2 (\psi \mathbf{a})\} = \mathbf{E} \cdot \{\nabla(\mathbf{a} \cdot \nabla \psi) - \mathbf{a} \nabla^2 \psi\} \\ &= \mathbf{E} \cdot \{\nabla(\mathbf{a} \cdot \nabla \psi) + \mathbf{a} k^2 \psi\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

よって、式 (2.26) の左辺の被積分関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \psi \mathbf{a} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \nabla \times \psi \mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \cdot (-j\omega \mu \mathbf{J} \psi - \psi \nabla \times \mathbf{J}_m) - \mathbf{E} \cdot \nabla(\mathbf{a} \cdot \nabla \psi) \end{aligned} \quad (2.30)$$

次に、体積積分を一部、面積積分に変換するため、 ∇ に関する変形を行う。回転に関するベクトル公式

$$\nabla \times (\phi \mathbf{b}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{b} + \phi \nabla \times \mathbf{b} \quad (2.31)$$

を一部移項して変形して、

$$\begin{aligned} \phi \nabla \times \mathbf{b} &= \nabla \times (\phi \mathbf{b}) - (\nabla \phi) \times \mathbf{b} \\ &= \nabla \times (\phi \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times \nabla \phi \end{aligned} \quad (2.32)$$

これより、

$$\psi \nabla \times \mathbf{J}_m = \nabla \times (\psi \mathbf{J}_m) + \mathbf{J}_m \times \nabla \psi \quad (2.33)$$

また、発散に関するベクトル公式

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{b}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{b} + \phi \nabla \cdot \mathbf{b} \quad (2.34)$$

を一部移項して変形して

$$(\nabla \phi) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\mathbf{b} \phi) - \phi \nabla \cdot \mathbf{b} \quad (2.35)$$

これより、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \nabla (\mathbf{a} \cdot \nabla \psi) &= \nabla \cdot \{\mathbf{E}(\mathbf{a} \cdot \nabla \psi)\} - (\mathbf{a} \cdot \nabla \psi) \nabla \cdot \mathbf{E} \\ &= \nabla \cdot \{\mathbf{E}(\mathbf{a} \cdot \nabla \psi)\} - (\mathbf{a} \cdot \nabla \psi) \frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned} \quad (2.36)$$

したがって、式(2.26)の左辺の被積分関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} s\psi \mathbf{a} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \nabla \times \psi \mathbf{a} \\ = -\mathbf{a} \cdot j\omega \mu \mathbf{J} \psi - \mathbf{a} \cdot \{\nabla \times (\psi \mathbf{J}_m) + \mathbf{J}_m \times \nabla \psi\} \\ - \left[\nabla \cdot \{\mathbf{E}(\mathbf{a} \cdot \nabla \psi)\} - \frac{\rho}{\epsilon} \mathbf{a} \cdot \nabla \psi \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

よって、式(2.26)の左辺は次のようになる。

$$\begin{aligned} \iiint_{V'} \left[-\mathbf{a} \cdot j\omega \mu \mathbf{J} \psi - \mathbf{a} \cdot \{\nabla \times (\psi \mathbf{J}_m) + \mathbf{J}_m \times \nabla \psi\} \right. \\ \left. - \nabla \cdot \{\mathbf{E}(\mathbf{a} \cdot \nabla \psi)\} + \frac{\rho}{\epsilon} \mathbf{a} \cdot \nabla \psi \right] dV \\ = \mathbf{a} \cdot \iiint_{V'} \left(-j\omega \mu \mathbf{J} \psi - \mathbf{J}_m \times \nabla \psi + \frac{\rho}{\epsilon} \nabla \psi \right) dV \\ - \mathbf{a} \cdot \iiint_{V'} \nabla \times (\psi \mathbf{J}_m) dV - \int_{V'} \nabla \cdot \{\mathbf{E}(\mathbf{a} \cdot \nabla \psi)\} dV \end{aligned} \quad (2.38)$$

最後の項は、ガウスの発散定理より、通常とは逆に \mathbf{n} を V の内向きにとると、

$$\begin{aligned} \iiint_{V'} \nabla \cdot \{\mathbf{E}(\mathbf{a} \cdot \nabla \psi)\} dV &= \oint\!\oint_{S_1 + \dots + \Sigma} \{\mathbf{E}(\mathbf{a} \cdot \nabla \psi)\} \cdot (-\mathbf{n}) dS \\ &= -\mathbf{a} \cdot \oint\!\oint_{S_1 + \dots + \Sigma} (\nabla \psi)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS \end{aligned} \quad (2.39)$$

また、ベクトルのガウスの定理（法線ベクトル \mathbf{n} は逆向き）

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{b} dV = \oint\!\oint_S (-\mathbf{n}) \times \mathbf{b} dS \quad (2.40)$$

より、

$$\iiint_{V'} \nabla \times (\psi \mathbf{J}_m) dV = \oint\!\oint_{S_1 + \dots + \Sigma} (-\mathbf{n}) \times (\psi \mathbf{J}_m) dS \quad (2.41)$$

両辺に定ベクトル \mathbf{a} とのスカラ積をとると、

$$\mathbf{a} \cdot \iiint_{V'} \nabla \times (\psi \mathbf{J}_m) dV = -\mathbf{a} \cdot \oint\!\oint_{S_1 + \dots + \Sigma} \psi \mathbf{n} \times \mathbf{J}_m dS \quad (2.42)$$

次に、式 (2.26) の右辺の被積分関数について、 \mathbf{a} とのスカラ積の形に変形していく。まず、その第 1 項は、

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \times \nabla \times \psi \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} &= [\mathbf{E} \times \{(\nabla \psi) \times \mathbf{a}\}] \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \{(\nabla \psi) \times \mathbf{a}\} \\ &= \mathbf{a} \cdot \{(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times (\nabla \psi)\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

そして、第 2 項は、Maxwell の方程式を用いて、

$$\begin{aligned} \{\psi \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{E})\} \cdot \mathbf{n} &= \{\psi \mathbf{a} \times (-j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{J}_m)\} \cdot \mathbf{n} \\ &= -j\omega\mu\psi(\mathbf{a} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} - \psi(\mathbf{a} \times \mathbf{J}_m) \cdot \mathbf{n} \\ &= -j\omega\mu\psi(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{a} - \psi(\mathbf{J}_m \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{a} \\ &= j\omega\mu\psi\mathbf{a} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + \psi\mathbf{a} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{J}_m) \end{aligned} \quad (2.44)$$

以上の結果より、式 (2.26) は次のようになる。

$$\begin{aligned} &- \mathbf{a} \cdot \iiint_{V'} \left(j\omega\mu\mathbf{J}\psi + \mathbf{J}_m \times \nabla\psi - \frac{\rho}{\epsilon} \nabla\psi \right) dV \\ &\quad + \mathbf{a} \cdot \oint\!\oint_{S_1 + \dots + \Sigma} (\nabla\psi)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS + \mathbf{a} \cdot \oint\!\oint_{S_1 + \dots + \Sigma} \psi \mathbf{n} \times \mathbf{J}_m dS \\ &= -\mathbf{a} \cdot \oint\!\oint_{S_1 + \dots + \Sigma} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times (\nabla\psi) dS \\ &\quad + \mathbf{a} \cdot \oint\!\oint_{S_1 + \dots + \Sigma} \{j\omega\mu\psi(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + \psi\mathbf{n} \times \mathbf{J}_m\} dS \end{aligned} \quad (2.45)$$

体積積分と面積積分で整理すると,

$$\begin{aligned} & -\mathbf{a} \cdot \iiint_{V'} \left(j\omega\mu\mathbf{J}\psi + \mathbf{J}_m \times \nabla\psi - \frac{\rho}{\epsilon} \nabla\psi \right) dV \\ &= \mathbf{a} \cdot \oint_{S_1 + \dots + \Sigma} \left\{ -(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times (\nabla\psi) + j\omega\mu\psi(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) - (\nabla\psi)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \right\} dS \quad (2.46) \end{aligned}$$

得られた式は任意のベクトル \mathbf{a} について成り立つから、両辺の積分は等しくならなければいけない。つまり、

$$\begin{aligned} & \iiint_{V'} \left(j\omega\mu\psi\mathbf{J} + \mathbf{J}_m \times \nabla\psi - \frac{\rho}{\epsilon} \nabla\psi \right) dV \\ &= \oint_{S_1 + \dots + \Sigma} \left\{ (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\psi - j\omega\mu\psi(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\nabla\psi \right\} dS \quad (2.47) \end{aligned}$$

球面 Σ に関する面積分は、極限では点 P における値で決まり、この積分について計算していく。そこで、球面 Σ に関する面積分を左辺に分離して表すと、

$$\begin{aligned} & \oint_{\Sigma} \left\{ (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\psi - j\omega\mu\psi(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\nabla\psi \right\} dS \\ &= \iiint_{V'} \left(j\omega\mu\psi\mathbf{J} + \mathbf{J}_m \times \nabla\psi - \frac{\rho}{\epsilon} \nabla\psi \right) dV \\ & \quad - \oint_{S_1 + \dots + S_n} \left\{ (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\psi - j\omega\mu\psi(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\nabla\psi \right\} dS \quad (2.48) \end{aligned}$$

そして、閉曲面 Σ の中の点 P を観測点として考える。ここで、 ψ は r のみの関数であるから、

$$\nabla\psi(r) = \mathbf{a}_r \frac{d\psi}{dr} = \mathbf{a}_r \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) = - \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{a}_r \quad (2.49)$$

閉曲面 Σ は、点 P を中心とする半径 r_0 の球と考えておき、 Σ の外向き法線ベクトルを \mathbf{n} とすると、 $\mathbf{a}_r = \mathbf{n}$ より、

$$(\nabla\psi)_{r=r_0} = - \left(jk + \frac{1}{r_0} \right) \frac{e^{-jkr_0}}{r_0} \mathbf{n} = - \left(jk + \frac{1}{r_0} \right) \psi_0 \mathbf{n} \quad (2.50)$$

ここで、

$$\psi(r_0) = \frac{e^{-jkr_0}}{r_0} \equiv \psi_0 \quad (2.51)$$

これより、 Σ に沿った面積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \oint_{\Sigma} \left\{ (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\psi - j\omega\mu\psi(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\nabla\psi \right\} dS \\ &= \oint_{\Sigma} \left\{ -(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \left(jk + \frac{1}{r_0} \right) \mathbf{n} - j\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \left(jk + \frac{1}{r_0} \right) \mathbf{n} \right\} \psi_0 dS \\ &= \oint_{\Sigma} \left[-j\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) - \left(jk + \frac{1}{r_0} \right) \{(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n}\} \right] \psi_0 dS \quad (2.52) \end{aligned}$$

ベクトル公式

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} \quad (2.53)$$

より,

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} \\ &= \mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.54)$$

よって,

$$\mathbf{E} = (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} \quad (2.55)$$

これより,

$$\oint\!\oint_{\Sigma} \{ \} dS = \oint\!\oint_{\Sigma} \left\{ -j\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) - \left(jk + \frac{1}{r_0} \right) \mathbf{E} \right\} \psi_0 dS \quad (2.56)$$

立体角要素 $d\Omega$ を用いると,

$$\begin{aligned} \oint\!\oint_{\Sigma} \{ \} dS &= \oint\!\oint_{\Sigma} \left\{ -j\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) - \left(jk + \frac{1}{r_0} \right) \mathbf{E} \right\} e^{-jkr_0} r_0 d\Omega \\ &= -j\omega\mu r_0 e^{-jkr_0} \oint\!\oint_{\Sigma} \left\{ (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \right\} d\Omega - e^{-jkr_0} \oint\!\oint_{\Sigma} \mathbf{E} d\Omega \end{aligned} \quad (2.57)$$

$r_0 \rightarrow 0$ のとき, 上式の第1項はゼロになるから,

$$\begin{aligned} \lim_{r_0 \rightarrow 0} \oint\!\oint_{\Sigma} \{ \} dS &= \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left(-e^{-jkr_0} \oint\!\oint_{\Sigma} \mathbf{E} d\Omega \right) = -\mathbf{E}_p \oint\!\oint_{\Sigma} d\Omega \\ &= -4\pi \mathbf{E}_p \end{aligned} \quad (2.58)$$

ただし, \mathbf{E}_p は点 P における電界 \mathbf{E} を示す.

2.3.2 波源による電磁界の積分表示式

観測点 P における電界 \mathbf{E}_p は, 式 (2.58) を式 (2.48) に代入して,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(j\omega\mu\psi \mathbf{J} + \mathbf{J}_m \times \nabla\psi - \frac{\rho}{\epsilon} \nabla\psi \right) dV \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint\!\oint_{S_1+} \{ -j\omega\mu\psi(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla\psi \} dS \end{aligned} \quad (2.59)$$

同様にして, 点 P における磁界 \mathbf{H}_p は次のようになる (導出省略).

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(j\omega\epsilon\psi \mathbf{J}_m - \mathbf{J} \times \nabla\psi - \frac{\rho_m}{\mu} \nabla\psi \right) dV \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint\!\oint_{S_1+} \{ j\omega\epsilon\psi(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla\psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \nabla\psi \} dS \end{aligned} \quad (2.60)$$

ただし、閉曲面 S_i 上の電磁界は、領域 V' 以外の領域に存在する源によって励振されるものであり、**等価波源** (equivalent sources)，あるいは2次波源ともいう。

2.3.3 等価波源

領域 V' の積分で見られる源と同様にして、等価的な電流 \mathbf{K} ，磁流 \mathbf{K}_m ，電荷 η ，磁荷 η_m を次のように定義する。

$$\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{K}_m = -(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \quad (2.61)$$

$$\eta = \epsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}), \quad \eta_m = \mu(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \quad (2.62)$$

これより、電界 \mathbf{E}_p ，磁界 \mathbf{H}_p の表示式は、実際の源が3次元的な分布であるのに対して、等価波源は2次元的な分布となっているだけで、式の形は同じであることがわかる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\psi \mathbf{J} - \mathbf{J}_m \times \nabla\psi + \frac{\rho}{\epsilon} \nabla\psi \right) dV \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1+ \dots + S_n} \left(-j\omega\mu\psi \mathbf{K} - \mathbf{K}_m \times \nabla\psi + \frac{\eta}{\epsilon} \nabla\psi \right) dS \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\epsilon\psi \mathbf{J}_m + \mathbf{J} \times \nabla\psi + \frac{\rho_m}{\mu} \nabla\psi \right) dV \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1+ \dots + S_n} \left(-j\omega\epsilon\psi \mathbf{K}_m + \mathbf{K} \times \nabla\psi + \frac{\eta_m}{\mu} \nabla\psi \right) dS \end{aligned} \quad (2.64)$$

2.3.4 等価波源がある場合の双対性

電磁流源がある場合（導電率 $\sigma = 0$ のとき），**双対性** (duality) より，

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}_m, \quad \rho \rightarrow \rho_m, \quad \mu \rightarrow \epsilon \quad (2.65)$$

$$\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}, \quad \mathbf{J}_m \rightarrow -\mathbf{J}, \quad \rho_m \rightarrow \rho, \quad \epsilon \rightarrow \mu \quad (2.66)$$

等価波源についても、次のような双対性があることがわかる^{*2}。

$$\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K}_m = \mathbf{n} \times (-\mathbf{E}) = -(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \quad (2.67)$$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{E} \times \mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{K} = \mathbf{H} \times \mathbf{n} = -(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \quad (2.68)$$

$$\eta = \epsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \rightarrow \eta_m = \mu(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \quad (2.69)$$

$$\eta_m = \mu(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \rightarrow -\eta = \epsilon(\mathbf{n} \cdot (-\mathbf{E})) = -\mu(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \quad (2.70)$$

^{*2} A. Ishimaru, “Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering From Fundamentals to Applications,” 2.8. Duality Principle and Symmetry of Maxwell’s Equations, 2dn ed., p.27, IEEE Press, Wiley (2017), ISBN: 978-1-119-07969-9.

2.4 無限空間での電磁界の積分表示式

2.4.1 閉曲面 S 内部の領域 V

領域 V の中の空洞領域にあたる閉曲面がなく、ただ一つの閉曲面 S (半径 R) によって領域 V が囲まれている場合を考える^{*3}。電界 \mathbf{E}_p 、および磁界 \mathbf{H}_p は、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_p &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\psi \mathbf{J} - \mathbf{J}_m \times \nabla\psi + \frac{\rho}{\epsilon} \nabla\psi \right) dV \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(R)} \left\{ -j\omega\mu\psi(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla\psi \right\} dS\end{aligned}\quad (2.71)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_p &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\epsilon\psi \mathbf{J}_m + \mathbf{J} \times \nabla\psi + \frac{\rho_m}{\mu} \nabla\psi \right) dV \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(R)} \left\{ j\omega\epsilon\psi(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla\psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \nabla\psi \right\} dS\end{aligned}\quad (2.72)$$

この球の半径 R に沿う単位ベクトルを \mathbf{a}_R とすると、

$$(\nabla\psi)_{r=R} = - \left(jk + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} \mathbf{a}_R \quad (2.73)$$

一方、 \mathbf{n} は領域 V の方向を向く法線ベクトルゆえ、 $\mathbf{n} = -\mathbf{a}_R$ 。また、ベクトル公式

$$\mathbf{E} = (\mathbf{a}_R \times \mathbf{E}) \times \mathbf{a}_R + (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{E}) \mathbf{a}_R \quad (2.74)$$

より、 \mathbf{E}_p に関する面積分は次のようになる。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi} \oint_{S(R)} \left\{ -j\omega\mu\psi(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla\psi \right\} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S(R)} \left[-j\omega\mu(-\mathbf{a}_R \times \mathbf{H}) \right. \\ &\quad \left. - \left(jk + \frac{1}{R} \right) \{(-\mathbf{a}_R \times \mathbf{E}) \times \mathbf{a}_R + (-\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{E}) \mathbf{a}_R\} \right] \frac{e^{-jkR}}{R} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S(R)} \left\{ j\omega\mu(\mathbf{a}_R \times \mathbf{H}) + \left(jk + \frac{1}{R} \right) \mathbf{E} \right\} \frac{e^{-jkR}}{R} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S(R)} \left[j\omega\mu \left\{ (\mathbf{a}_R \times \mathbf{H}) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \right\} + \frac{\mathbf{E}}{R} \right] \frac{e^{-jkR}}{R} dS\end{aligned}\quad (2.75)$$

^{*3} Samuel Silver, "Microwave Antenna Theory and Design," 3.9. Field Due to Sources in an Unbounded Region, McGraw Hill (1949), IEE, reprint (1984), ISBN-13: 978-0863410178.

2.4.2 放射条件

半径 R を無限に大きくしていくと、球の面積は R^2 に比例して増加するので、式 (2.75) を次のように変形して積分を評価していく。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \oint_{S(R)} \left\{ -j\omega\mu\psi(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\nabla\psi \right\} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S(R)} \left[j\omega\mu R \left\{ (\mathbf{a}_R \times \mathbf{H}) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \right\} + \frac{R\mathbf{E}}{R} \right] e^{-jkR} \frac{dS}{R^2} \end{aligned} \quad (2.76)$$

電磁界が次の条件を満足するとき、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R\mathbf{E} \text{ is finite.} \quad (2.77)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left\{ (\mathbf{a}_R \times \mathbf{H}) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \right\} = 0 \quad (2.78)$$

式 (2.78) と単位ベクトル \mathbf{a}_R とのスカラ積およびベクトル積は次のようにゼロになる。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{a}_R \cdot R \left\{ (\mathbf{a}_R \times \mathbf{H}) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \right\} = \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (R\mathbf{E}) \cdot \mathbf{a}_R = 0 \quad (2.79)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{a}_R \times R \left\{ (\mathbf{a}_R \times \mathbf{H}) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \right\} = \lim_{R \rightarrow \infty} R \left\{ -\mathbf{H} + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\mathbf{a}_R \times \mathbf{E}) \right\} = 0 \quad (2.80)$$

磁界 \mathbf{H}_p に関しても同様に積分を変形して、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \oint_{S(R)} \left\{ j\omega\epsilon\psi(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla\psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\nabla\psi \right\} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S(R)} \left[j\omega\epsilon R \left\{ -(\mathbf{a}_R \times \mathbf{E}) + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H} \right\} + \frac{R\mathbf{H}}{R} \right] e^{-jkR} \frac{dS}{R^2} \end{aligned} \quad (2.81)$$

電磁界が次の条件を満足するとき、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R\mathbf{H} \text{ is finite.} \quad (2.82)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left\{ -(\mathbf{a}_R \times \mathbf{E}) + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H} \right\} = 0 \quad (2.83)$$

同様にして、式 (2.83) と単位ベクトル \mathbf{a}_R とのスカラ積およびベクトル積は次のようにゼロになる。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{a}_R \cdot R \left\{ -(\mathbf{a}_R \times \mathbf{E}) + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H} \right\} = \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (R\mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_R = 0 \quad (2.84)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{a}_R \times R \left\{ -(\mathbf{a}_R \times \mathbf{E}) + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H} \right\} = \lim_{R \rightarrow \infty} R \left\{ \mathbf{E} - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\mathbf{H} \times \mathbf{a}_R) \right\} = 0 \quad (2.85)$$

これらの条件は、 $R \rightarrow \infty$ において用いられる放射条件と呼ばれるもので、次のような遠方界の特性がわかる。

- 電磁界は、大きく見積もっても R^{-1} で減少していく。
- 電磁界の \mathbf{a}_R 方向成分は、さらに小さくなり、 R^{-1} のオーダーで考えると、電界と磁界の成分は、 \mathbf{a}_R の方向に直交している。
- R^{-1} のオーダーにおいては、電界と磁界は直交している。

したがって、遠方の電磁界は、球 $S(R)$ の中心から伝搬する平面波と類似の振る舞いをするものと考えることができる。

2.4.3 無限空間における電磁界

球 $S(R)$ を無限に大きくして、境界面のない無限空間における電磁界 \mathbf{E}_p , \mathbf{H}_p は次のようになる。

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\psi\mathbf{J} - \mathbf{J}_m \times \nabla\psi + \frac{\rho}{\epsilon} \nabla\psi \right) dV \quad (2.86)$$

$$\mathbf{H}_p = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\epsilon\psi\mathbf{J}_m + \mathbf{J} \times \nabla\psi + \frac{\rho_m}{\mu} \nabla\psi \right) dV \quad (2.87)$$

ただし、実際の積分範囲は、波源の存在する有限領域にとればよい。連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + j\omega\rho = 0 \quad (2.88)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m + j\omega\rho_m = 0 \quad (2.89)$$

より、電荷 ρ , 磁荷 ρ_m を電流 \mathbf{J} , 磁流 \mathbf{J}_m によって表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\psi\mathbf{J} - \mathbf{J}_m \times \nabla\psi - \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{j\omega\epsilon} \nabla\psi \right) dV \\ &= \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \iiint_V \left\{ -k^2\psi\mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{J}_m \times \nabla\psi + (\nabla \cdot \mathbf{J})(\nabla\psi) \right\} dV \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\psi\mathbf{J}_m + \mathbf{J} \times \nabla\psi - \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_m}{j\omega\mu} \nabla\psi \right) dV \\ &= \frac{j}{4\pi\omega\mu} \iiint_V \left\{ -k^2\psi\mathbf{J}_m - j\omega\mu\mathbf{J} \times \nabla\psi + (\nabla \cdot \mathbf{J}_m)(\nabla\psi) \right\} dV \end{aligned} \quad (2.91)$$

さて、上式の第3項は、さらに変形でき、まず電界 \mathbf{E}_p については、

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{J})(\nabla\psi) &= (\nabla \cdot \mathbf{J}) \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial\psi}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial\psi}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \\ &= \mathbf{a}_x \frac{\partial\psi}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{J}) + \mathbf{a}_y \frac{\partial\psi}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{J}) + \mathbf{a}_z \frac{\partial\psi}{\partial z} (\nabla \cdot \mathbf{J}) \end{aligned} \quad (2.92)$$

ここで、ベクトル公式 $\nabla \cdot (\phi\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot (\nabla\phi) + \phi(\nabla \cdot \mathbf{a})$ を変形した

$$\phi(\nabla \cdot \mathbf{a}) = \nabla \cdot (\mathbf{a}\phi) - \mathbf{a} \cdot (\nabla\phi) \quad (2.93)$$

より、式(2.92)の各成分は、次のような。

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathbf{J})(\nabla \psi) &= \mathbf{a}_x \left\{ \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right\} \\
&\quad + \mathbf{a}_y \left\{ \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\} + \mathbf{a}_z \left\{ \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} \\
&= \left[\mathbf{a}_x \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_y \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \mathbf{a}_z \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] \\
&\quad - \left[\mathbf{a}_x \left\{ \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right\} + \mathbf{a}_y \left\{ \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\} + \mathbf{a}_z \left\{ \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{2.94}$$

いま、 $\mathbf{J} \equiv J_x \mathbf{a}_x + J_y \mathbf{a}_y + J_z \mathbf{a}_z$ とおくと、式(2.94)の第2項は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&- \left[\mathbf{a}_x \left\{ \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right\} + \mathbf{a}_y \left\{ \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\} + \mathbf{a}_z \left\{ \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} \right] \\
&= -\mathbf{a}_x \left(J_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + J_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + J_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \right) \\
&\quad - \mathbf{a}_y \left(J_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + J_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + J_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} \right) - \mathbf{a}_z \left(J_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + J_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + J_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \\
&= - \left[J_x \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \psi) + J_y \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \psi) + J_z \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \psi) \right] \\
&= -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \nabla \psi
\end{aligned} \tag{2.95}$$

一方、第1項については、ガウスの発散定理より、

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \left[\mathbf{a}_x \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_y \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \mathbf{a}_z \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] dV \\
&= \mathbf{a}_x \iiint_V \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dV + \mathbf{a}_y \iiint_V \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dV + \mathbf{a}_z \iiint_V \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dV \\
&= \mathbf{a}_x \iint_S \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathbf{a}_y \iint_S \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathbf{a}_z \iint_S \left(\mathbf{J} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \cdot (-\mathbf{n}) dS \\
&= - \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{a}_x dS - \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{a}_y dS - \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{a}_z dS \\
&= - \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \nabla \psi dS
\end{aligned} \tag{2.96}$$

波源は有限領域に存在する場合を取り扱っているので、無限遠方にとった積分経路上には電流源はなく、上の積分は値を持たないことになる。つまり、

$$\iint_{S(R)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \nabla \psi dS = 0 \tag{2.97}$$

磁界 \mathbf{H}_p についても同様であり、次式が成り立つ。

$$\iint_{S(R)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_m) \nabla \psi dS = 0 \tag{2.98}$$

これより、電磁界は次のようになる。

$$\mathbf{E}_p = \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \iiint_V \left\{ -k^2\psi\mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{J}_m \times \nabla\psi - (\mathbf{J} \cdot \nabla)(\nabla\psi) \right\} dV \quad (2.99)$$

$$\mathbf{H}_p = \frac{j}{4\pi\omega\mu} \iiint_V \left\{ -k^2\psi\mathbf{J}_m - j\omega\mu\mathbf{J} \times \nabla\psi - (\mathbf{J}_m \cdot \nabla)(\nabla\psi) \right\} dV \quad (2.100)$$

さらに、 $\psi = \frac{e^{-jkr}}{r}$ より、

$$\mathbf{E}_p = -\frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \iiint_V \left\{ (\mathbf{J} \cdot \nabla)\nabla + k^2\mathbf{J} - j\omega\epsilon\mathbf{J}_m \times \nabla \right\} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) dV \quad (2.101)$$

$$\mathbf{H}_p = -\frac{j}{4\pi\omega\mu} \iiint_V \left\{ (\mathbf{J}_m \cdot \nabla)\nabla + k^2\mathbf{J}_m + j\omega\mu\mathbf{J} \times \nabla \right\} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) dV \quad (2.102)$$

ただし、波源は有限領域にあり、 r は源から観測点 P までの距離を示し、 ∇ は波源の座標成分に関する微分演算子である。

2.5 波源の3次元分布による放射電磁界

自由空間での電磁流源による電磁界の積分表示式における ∇ 演算子を実行して一般的な式の導出を行い、それから放射界領域、遠方界領域での電磁界の近似について説明する^{*4}。

2.5.1 $(\mathbf{J} \cdot \nabla)\nabla\psi$ の計算

まず、電界 \mathbf{E}_p の表示式の第1項に見られる $(\mathbf{J} \cdot \nabla)\nabla\psi$ を計算しよう。そこで、観測点 P を固定したとき、点 P を原点にとった球座標系 (r, θ_p, ϕ_p) によって電流源 \mathbf{J} の座標を表せば、演算子 ∇ はこれら座標成分に関する微分演算となり、次のようになる。

$$(\mathbf{J} \cdot \nabla)\nabla\psi = (\mathbf{J} \cdot \nabla)\nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \quad (2.103)$$

ただし、

$$\nabla\psi = \nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) = \mathbf{a}_{rp} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) = -\mathbf{a}_{rp} \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2.104)$$

ここで、

$$\mathbf{a}_{rp} = \sin\theta_p(\cos\phi_p\mathbf{a}_x + \sin\phi_p\mathbf{a}_y) + \cos\theta_p\mathbf{a}_z \quad (2.105)$$

^{*4} Samuel Silver, "Microwave Antenna Theory and Design," 3.10. The far-zone Fields, McGraw Hill (1949), IEE, reprint (1984), ISBN-13: 978-0863410178.

いま,

$$\alpha(r) \equiv -\left(jk + \frac{1}{r}\right) \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2.106)$$

とおくと,

$$\nabla\psi = \mathbf{a}_{rp}\alpha \quad (2.107)$$

これより, 与式は次のようになる.

$$\begin{aligned} (\mathbf{J} \cdot \nabla)\nabla\psi &= (\mathbf{J} \cdot \nabla)(\mathbf{a}_{rp}\alpha) \\ &= J_x \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_{rp}\alpha) + J_y \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_{rp}\alpha) + J_z \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_{rp}\alpha) \\ &= J_x \left(\frac{\partial \mathbf{a}_{rp}}{\partial x} \alpha + \mathbf{a}_{rp} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + J_y \left(\frac{\partial \mathbf{a}_{rp}}{\partial y} \alpha + \mathbf{a}_{rp} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + J_z \left(\frac{\partial \mathbf{a}_{rp}}{\partial z} \alpha + \mathbf{a}_{rp} \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \\ &= \alpha \left(J_x \frac{\partial \mathbf{a}_{rp}}{\partial x} + J_y \frac{\partial \mathbf{a}_{rp}}{\partial y} + J_z \frac{\partial \mathbf{a}_{rp}}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_{rp} \left(J_x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + J_y \frac{\partial \alpha}{\partial y} + J_z \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \\ &= \alpha(\mathbf{J} \cdot \nabla)\mathbf{a}_{rp} + \mathbf{a}_{rp}(\mathbf{J} \cdot \nabla\alpha) \end{aligned} \quad (2.108)$$

上式の第1項は,

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{J} \cdot \nabla)\mathbf{a}_{rp} &= \alpha(\mathbf{J} \cdot \nabla) \left\{ (\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}_x)\mathbf{a}_x + (\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}_y)\mathbf{a}_y + (\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}_z)\mathbf{a}_z \right\} \\ &= \mathbf{a}_x \alpha \left\{ \mathbf{J} \cdot \nabla(\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}_x) \right\} + \mathbf{a}_y \alpha \left\{ \mathbf{J} \cdot \nabla(\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}_y) \right\} + \mathbf{a}_z \alpha \left\{ \mathbf{J} \cdot \nabla(\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}_z) \right\} \end{aligned} \quad (2.109)$$

上式の \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , \mathbf{a}_z は定ベクトルであるので, 任意の定ベクトルを \mathbf{a} とおくと,

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}) &= \mathbf{a}_{rp} \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}_{\theta p} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_p}(\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}_{\phi p} \frac{1}{r \sin \theta_p} \frac{\partial}{\partial \phi_p}(\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a}_{\theta p} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mathbf{a}_{rp}}{\partial \theta_p} \cdot \mathbf{a} \right) + \mathbf{a}_{\phi p} \frac{1}{r \sin \theta_p} \left(\frac{\partial \mathbf{a}_{rp}}{\partial \phi_p} \cdot \mathbf{a} \right) \end{aligned} \quad (2.110)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}_{rp}}{\partial \theta_p} &= \frac{\partial}{\partial \theta_p} \left\{ \sin \theta_p (\cos \phi_p \mathbf{a}_x + \sin \phi_p \mathbf{a}_y) + \cos \theta_p \mathbf{a}_z \right\} \\ &= \cos \theta_p (\cos \phi_p \mathbf{a}_x + \sin \phi_p \mathbf{a}_y) - \sin \theta_p \mathbf{a}_z \\ &= \mathbf{a}_{\theta p} \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}_{rp}}{\partial \phi_p} &= \frac{\partial}{\partial \phi_p} \left\{ \sin \theta_p (\cos \phi_p \mathbf{a}_x + \sin \phi_p \mathbf{a}_y) + \cos \theta_p \mathbf{a}_z \right\} \\ &= \sin \theta_p (-\sin \phi_p \mathbf{a}_x + \cos \phi_p \mathbf{a}_y) \\ &= \sin \theta_p \mathbf{a}_{\phi p} \end{aligned} \quad (2.112)$$

これより,

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}) &= \mathbf{a}_{\theta p} \frac{1}{r} (\mathbf{a}_{\theta p} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}_{\theta p} \frac{1}{r \sin \theta_p} (\sin \theta_p \mathbf{a}_{\phi p} \cdot \mathbf{a}) \\
&= \frac{1}{r} \left\{ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_{\theta p}) \mathbf{a}_{\theta p} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_{\phi p}) \mathbf{a}_{\phi p} \right\} \\
&= \frac{1}{r} \left\{ \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_{rp}) \mathbf{a}_{rp} \right\}
\end{aligned} \tag{2.113}$$

上式の \mathbf{a} を, \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , \mathbf{a}_z とおいても成り立つ. よって, 式 (2.109) を式 (2.113) に用いて,

$$\begin{aligned}
&\alpha(\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{a}_{rp} \\
&= \mathbf{a}_x \alpha \left(\mathbf{J} \cdot \left[\frac{1}{r} \left\{ \mathbf{a}_x - (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_{rp}) \mathbf{a}_{rp} \right\} \right] \right) \\
&\quad + \mathbf{a}_y \alpha \left(\mathbf{J} \cdot \left[\frac{1}{r} \left\{ \mathbf{a}_y - (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_{rp}) \mathbf{a}_{rp} \right\} \right] \right) + \mathbf{a}_z \alpha \left(\mathbf{J} \cdot \left[\frac{1}{r} \left\{ \mathbf{a}_z - (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_{rp}) \mathbf{a}_{rp} \right\} \right] \right) \\
&= \frac{\alpha}{r} \left[\left\{ (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_x + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_y + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_z) \mathbf{a}_z \right\} \right. \\
&\quad \left. - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_{rp}) \left\{ (\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_x + (\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_y + (\mathbf{a}_{rp} \cdot \mathbf{a}_z) \mathbf{a}_z \right\} \right] \\
&= \frac{\alpha}{r} \left\{ \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_{rp}) \mathbf{a}_{rp} \right\}
\end{aligned} \tag{2.114}$$

一方, 式 (2.108) の第 2 項の $\nabla \alpha$ は,

$$\begin{aligned}
\nabla \alpha &= \nabla \left\{ - \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \right\} = \mathbf{a}_{rp} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ - \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \right\} \\
&= \mathbf{a}_{rp} \left\{ \frac{1}{r^2} + \left(jk + \frac{1}{r} \right)^2 \right\} \frac{e^{-jkr}}{r} = \mathbf{a}_{rp} \left(-k^2 + j2\frac{k}{r} + \frac{2}{r^2} \right) \frac{e^{-jkr}}{r}
\end{aligned} \tag{2.115}$$

したがって, $(\mathbf{J} \cdot \nabla) \nabla \psi$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{J} \cdot \nabla) \nabla \psi &= \alpha(\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{a}_{rp} + \mathbf{a}_{rp} (\mathbf{J} \cdot \nabla \alpha) \\
&= \left\{ - \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \right\} \frac{1}{r} \left\{ \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_{rp}) \mathbf{a}_{rp} \right\} + \mathbf{a}_{rp} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_{rp}) \left(-k^2 + j2\frac{k}{r} + \frac{2}{r^2} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \\
&= \left[\left\{ -k^2 + \frac{3}{r} \left(jk + \frac{1}{r} \right) \right\} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_{rp}) \mathbf{a}_{rp} - \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{\mathbf{J}}{r} \right] \frac{e^{-jkr}}{r}
\end{aligned} \tag{2.116}$$

さらに, $\mathbf{a}_{rp} = -\mathbf{a}_r$ より,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{J} \cdot \nabla) \nabla \psi &= (\mathbf{J} \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \\
&= \left\{ -k^2 (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r + \frac{3}{r} \left(jk + \frac{1}{r} \right) (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r - \frac{\mathbf{J}}{r} \left(jk + \frac{1}{r} \right) \right\} \frac{e^{-jkr}}{r}
\end{aligned} \tag{2.117}$$

2.5.2 類似のベクトル演算

参考までに、このような演算とよく似たベクトル演算として、次のようなものもある。

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{J} \cdot \nabla) \phi &= \left[(J_x \mathbf{a}_x + J_y \mathbf{a}_y + J_z \mathbf{a}_z) \cdot \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \phi \\
 &= J_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + J_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + J_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \\
 &= \mathbf{J} \cdot \nabla \phi
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

2.5.3 一般的な電磁界の積分表示式

得られた結果を用いれば、電界 \mathbf{E}_p は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_p &= -\frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \iiint_V \left\{ (\mathbf{J} \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + k^2 \mathbf{J} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - j\omega\epsilon \mathbf{J}_m \times \nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right\} dV \\
 &= -\frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \iiint_V \left\{ -k^2 (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r + \frac{3}{r} \left(jk + \frac{1}{r} \right) (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\mathbf{J}}{r} \left(jk + \frac{1}{r} \right) + k^2 \mathbf{J} - j\omega\epsilon \mathbf{J}_m \times \mathbf{a}_r \left(jk + \frac{1}{r} \right) \right\} \frac{e^{-jkr}}{r} dV
 \end{aligned} \tag{2.119}$$

上式を r について整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_p &= -\frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \left(\iiint_V \left[k^2 \{ \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r \} + \omega\epsilon k \mathbf{J}_m \times \mathbf{a}_r \right] \frac{e^{-jkr}}{r} dV \right. \\
 &\quad + jk \iiint_V \left\{ 3(\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r - \mathbf{J} - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{J}_m \times \mathbf{a}_r \right\} \frac{e^{-jkr}}{r^2} dV \\
 &\quad \left. + \iiint_V \{ 3(\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r - \mathbf{J} \} \frac{e^{-jkr}}{r^3} dV \right)
 \end{aligned} \tag{2.120}$$

2.5.4 放射界近似

波源が原点近傍にある場合、原点から観測点までの距離を R とおくと、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_p &= -\frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \iiint_V [k^2 \{ \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r \} + \omega\epsilon k \mathbf{J}_m \times \mathbf{a}_r] \frac{R}{r} e^{-jk(r-R)} dV \right. \\
 &\quad + jk \frac{e^{-jkR}}{R^2} \iiint_V \left\{ 3(\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r - \mathbf{J} - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{J}_m \times \mathbf{a}_r \right\} \left(\frac{R}{r} \right)^2 e^{-jk(r-R)} dV \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-jkR}}{R^3} \iiint_V \{ 3(\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r - \mathbf{J} \} \left(\frac{R}{r} \right)^3 e^{-jk(r-R)} dV \right)
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

上式の第1項は放射電界を表し, $1/R^2$, $1/R^3$ が十分小さい場合,

$$\mathbf{E}_p = -\frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \iiint_V [k^2 \{\mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_r)\mathbf{a}_r\} + \omega\epsilon k \mathbf{J}_m \times \mathbf{a}_r] \frac{e^{-jkr}}{r} dV + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (2.122)$$

同様にして, 磁界 \mathbf{H}_p については次式が得られる (導出省略).

$$\mathbf{H}_p = -\frac{j}{4\pi\omega\mu} \iiint_V [k^2 \{\mathbf{J}_m - (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{a}_r)\mathbf{a}_r\} - \omega\mu k \mathbf{J} \times \mathbf{a}_r] \frac{e^{-jkr}}{r} dV + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (2.123)$$

2.6 閉曲面上の2次波源による放射電磁界

2.6.1 面電磁流源による放射電磁界

領域 V を囲む球は, 前節と同様に無限に大きいものを考え, ここでは, 領域 V には源がなく, 領域 V の空洞閉曲面 S_i 上に等価波源が分布している場合を考えてみる. このとき, 源は閉曲面 S_i 内部にのみ存在するので, 領域 V における体積積分は値をもたない. したがって, 電磁界は閉曲面 S_i に沿った面積分で表され, 次のようになる.

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_i} \left(-j\omega\mu\psi \mathbf{K} - \mathbf{K}_m \times \nabla\psi + \frac{\eta}{\epsilon} \nabla\psi \right) dS \quad (2.124)$$

$$\mathbf{H}_p = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_i} \left(-j\omega\epsilon\psi \mathbf{K}_m + \mathbf{K} \times \nabla\psi + \frac{\eta_m}{\mu} \nabla\psi \right) dS \quad (2.125)$$

ここで,

$$\nabla\psi = \nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) = \mathbf{a}_r \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2.126)$$

ただし, 観測点 P は, 領域 V におかれるので, 閉曲面 S_i の外側ならどこにおいてもよい. また, r は波源のある点から観測点 P までの距離, \mathbf{a}_r は r に沿う単位ベクトルを示す. これより,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S_i} \left[-j\omega\mu\mathbf{K} - \left(jk + \frac{1}{r} \right) \mathbf{K}_m \times \mathbf{a}_r + \frac{\eta}{\epsilon} \left(jk + \frac{1}{r} \right) \mathbf{a}_r \right] \frac{e^{-jkr}}{r} dS \\ &= -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \oint_{S_i} \left(\mathbf{K} + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{K}_m \times \mathbf{a}_r - \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon\mu}} \mathbf{a}_r \right) \frac{e^{-jkr}}{r} dS + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \\ \mathbf{H}_p &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S_i} \left[-j\omega\epsilon\mathbf{K}_m + \left(jk + \frac{1}{r} \right) \mathbf{K} \times \mathbf{a}_r + \frac{\eta_m}{\mu} \left(jk + \frac{1}{r} \right) \mathbf{a}_r \right] \frac{e^{-jkr}}{r} dS \\ &= -\frac{j\omega\epsilon}{4\pi} \oint_{S_i} \left(\mathbf{K}_m - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{K} \times \mathbf{a}_r - \frac{\eta_m}{\sqrt{\epsilon\mu}} \mathbf{a}_r \right) \frac{e^{-jkr}}{r} dS + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \end{aligned}$$

ただし、 R は座標原点から観測点 P までの距離を示す。これより、放射界は、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_p &= -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_{S_i} \left(\mathbf{K} + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{K}_m \times \mathbf{a}_r - \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon\mu}} \mathbf{a}_r \right) \frac{R}{r} e^{-jk(r-R)} dS \\ \mathbf{H}_p &= -\frac{j\omega\epsilon}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_{S_i} \left(\mathbf{K}_m - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{K} \times \mathbf{a}_r - \frac{\eta_m}{\sqrt{\epsilon\mu}} \mathbf{a}_r \right) \frac{R}{r} e^{-jk(r-R)} dS\end{aligned}$$

閉曲面 S_i 上の等価波源を電界 \mathbf{E} および磁界 \mathbf{H} を用いて、

$$\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (2.127)$$

$$\mathbf{K}_m = -(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \quad (2.128)$$

$$\eta = \epsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \quad (2.129)$$

$$\eta_m = \mu(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \quad (2.130)$$

とおくと、閉曲面 S_i 上の電磁界 \mathbf{E} , \mathbf{H} を用いて表せば、次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_p &= -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_{S_i} \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (-\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{a}_r - \frac{\epsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})}{\sqrt{\epsilon\mu}} \mathbf{a}_r \right] \frac{R}{r} e^{j\psi_1} dS \\ &= -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_{S_i} \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \{(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{a}_r - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{a}_r\} \right] \frac{R}{r} e^{j\psi_1} dS \\ &= \frac{jk}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_{S_i} \left[-\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{a}_r + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{a}_r \right] \frac{R}{r} e^{j\psi_1} dS \quad (2.131)\end{aligned}$$

ただし、

$$\psi_1 \equiv -k(r - R) \quad (2.132)$$

$$\omega\mu = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = k\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2.133)$$

同様にして、

$$\mathbf{H}_p = \frac{jk}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_{S_i} \left[\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{a}_r + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{a}_r \right] \frac{R}{r} e^{j\psi_1} dS$$

ただし、

$$\omega\epsilon = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = k\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad (2.134)$$

2.6.2 面電磁流源による遠方界領域の放射電磁界

遠方界領域において、 $R/r \simeq 1$, $\mathbf{a}_r \simeq \mathbf{a}_R$ と近似すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_p &\simeq \frac{jk}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_{S_i} \left[-\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{a}_R + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{a}_R \right] e^{j\psi_1} dS \\ \mathbf{H}_p &\simeq \frac{jk}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_{S_i} \left[\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{a}_R + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{a}_R \right] e^{j\psi_1} dS\end{aligned}$$

このような遠方の放射電磁界は、TEM波で表されるので、 \mathbf{a}_R 成分は存在しない。ここで、ベクトル公式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (2.135)$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_R \times (\mathbf{a}_R \times \mathbf{K}) &= (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{K})\mathbf{a}_R - (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{a}_R)\mathbf{K} \\ &= (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{K})\mathbf{a}_R - \mathbf{K} \end{aligned} \quad (2.136)$$

より、

$$\mathbf{K} = (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{K})\mathbf{a}_R - \mathbf{a}_R \times (\mathbf{a}_R \times \mathbf{K}) \quad (2.137)$$

これに $\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ を代入して、

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \{\mathbf{a}_R \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H})\}\mathbf{a}_R - \mathbf{a}_R \times \{\mathbf{a}_R \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})\} \quad (2.138)$$

したがって、電界 \mathbf{E}_p は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= \frac{jk}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_{S_i} \left[-\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \{\mathbf{a}_R \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H})\}\mathbf{a}_R \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{a}_R \times \{\mathbf{a}_R \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})\} + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{a}_R + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{a}_R \right] e^{j\psi_1} dS \end{aligned} \quad (2.139)$$

ここで、観測点 P の座標を (R, Θ, Φ) とおく。電界 \mathbf{E}_p は \mathbf{a}_R 成分をもたないから、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= E_\Theta \mathbf{a}_\Theta + E_\Phi \mathbf{a}_\Phi \\ &\simeq \frac{jk}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_{S_i} \left[\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{a}_R \times \{\mathbf{a}_R \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})\} + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{a}_R \right] e^{j\psi_1} dS \\ &= \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \iint_{S_i} \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \{\mathbf{a}_R \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})\} \right] e^{j\psi_1} dS \end{aligned} \quad (2.140)$$

ただし、

$$\psi_1 \equiv -k(r - R) \quad (2.141)$$

同様にして、磁界 \mathbf{H}_p は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p &= H_\Theta \mathbf{a}_\Theta + H_\Phi \mathbf{a}_\Phi \\ &\simeq \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \iint_{S_i} \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \{\mathbf{a}_R \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})\} \right] e^{j\psi_1} dS \end{aligned} \quad (2.142)$$

2.7 境界線上の連続条件

有限曲面上に分布している 2 次波源の満たすべき連続条件について説明する^{*5}.

2.7.1 電荷の保存則（連続の式）

電流密度を \mathbf{J} , 電荷密度を ρ とすると, 電荷の保存則は,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho \quad (2.143)$$

微小な領域において体積積分して, ガウスの発散定理より,

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{J} dV = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -j\omega \iiint \rho dV \quad (2.144)$$

面 S 上の面電流密度を \mathbf{J}_s , 面電荷密度を ρ_s とすると,

$$\nabla_s \cdot \mathbf{J}_s = -j\omega\rho_s \quad (2.145)$$

ただし, ∇_s は面 S 上の 2 次元微分演算子を示す. 微小な面上の領域において面積積分して, 2 次元のガウスの発散定理より,

$$\iint \nabla_s \cdot \mathbf{J}_s dS = \oint \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n}_s dl = -j\omega \iint \rho_s dS \quad (2.146)$$

2.7.2 面電流分布の不連続

面 S 上において領域 1,2 が接している境界線上周辺に面積積分の積分範囲をとる. いま, 境界線に沿う微小長さを dl , 境界線に垂直な微小幅を h とおくと,

$$(\mathbf{J}_s^{(2)} - \mathbf{J}_s^{(1)}) \cdot \mathbf{n}_1 dl = -\lim_{h \rightarrow 0} j\omega\rho_s h dl = -j\omega\sigma dl \quad (2.147)$$

ただし, \mathbf{n}_1 は面 S 上の領域 1 から 2 に向く法線ベクトル, σ は境界線上の線電荷密度を示し, $\sigma \equiv \lim_{h \rightarrow 0} h\rho_s$. また, $\mathbf{J}_s^{(1)}, \mathbf{J}_s^{(2)}$ は, 領域 1,2 の境界線での等価的な面電流密度を各々示し, 面 S 上の磁界を $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ とおくと,

$$\mathbf{J}_s^{(i)} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.148)$$

^{*5} Julius Adams Stratton, "Electromagnetic Theory," 8.16. Discontinuous Surface Distributions, p.468, McGraw-Hill, New York (1941), Wiley-IEEE Press (2007), ISBN-13: 978-0470131534, Kindle Edition (2013).

境界線に沿う単位ベクトルを τ とおき, $\tau = \mathbf{n} \times \mathbf{n}_1$ とすると, 不連続な面電流分布に対する境界条件の式が得られる.

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s^{(2)} - \mathbf{J}_s^{(1)}) \cdot \mathbf{n}_1 &= (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{n}_1 = (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \\ &= -\tau \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \tau \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \\ &= -j\omega\sigma \end{aligned} \quad (2.149)$$

2.7.3 線電荷, 線磁荷の周回積分による電磁界

領域 1 を閉じていない面と考え, 境界線上の領域 1 の面上の磁界を \mathbf{H} とし ($\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$, $\mathbf{H}_2 = 0$),

$$\tau \cdot \mathbf{H}_1 = \tau \cdot \mathbf{H} = -j\omega\sigma \quad (2.150)$$

よって,

$$\sigma = -\frac{\tau \cdot \mathbf{H}}{j\omega} \quad (2.151)$$

領域 1 の周囲の線電荷密度 σ による電界 \mathbf{E}_C は, 面電荷のみがある場合を考え,

$$\mathbf{E}_C = \frac{1}{4\pi} \oint_C \frac{\sigma}{\epsilon} \nabla \psi ds = -\frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \oint_C \nabla \psi (\tau \cdot \mathbf{H}) ds \quad (2.152)$$

領域 1 の電界を \mathbf{E} とし ($\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}$, $\mathbf{E}_2 = 0$), 双対性より, 境界線上の線磁荷密度 σ_m は,

$$\sigma_m = \frac{\tau \cdot \mathbf{E}}{j\omega} \quad (2.153)$$

この線磁荷による磁界 \mathbf{H}_C は,

$$\mathbf{H}_C = \frac{1}{4\pi} \oint_C \frac{\sigma_m}{\mu} \nabla \psi ds = \frac{1}{4\pi j\omega\mu} \oint_C \nabla \psi (\tau \cdot \mathbf{E}) ds \quad (2.154)$$

2.8 開口面法

有限曲面上に分布している 2 次波源によって放射が生じているとき, その面上の電磁界分布を開口面分布 (aperture-field distribution) といい, ここでは, 開口面分布から電磁界を求める詳細な式の導出を行い説明していく^{*6}.

^{*6} Samuel Silver, "Microwave Antenna Theory and Design," 5.11. The Aperture-field Method, McGraw Hill (1949), IEE, reprint (1984), ISBN-13: 978-0863410178.

2.8.1 有限の開口面分布による電磁界の積分表示式

開口面分布の面積分の項に加えて、開口面の内部と外部とで連続の式を満足するように開口面の周囲の線電荷・線磁荷の周回積分の項を加え、開口面分布によって生じる電界 \mathbf{E}_p 、磁界 \mathbf{H}_p は次式によって求めることができる

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_p &= -\frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \oint_C \nabla\psi(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}) ds \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_A \{-j\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H})\psi + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\nabla\psi\} dS\end{aligned}\quad (2.155)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_p &= \frac{1}{4\pi j\omega\mu} \oint_C \nabla\psi(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}) ds \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_A \{-j\omega\epsilon(\mathbf{n} \times \mathbf{E})\psi + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla\psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\nabla\psi\} dS\end{aligned}\quad (2.156)$$

式 (2.155) の周回積分の項について、直角座標系 (x_1, x_2, x_3) を考え、 x_i ($i = 1, 2, 3$) 方向の単位ベクトルを \mathbf{i}_i とすると、

$$\oint_C \nabla\psi(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}) ds = \oint_C \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \mathbf{i}_i \right) (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}) ds = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \oint_C \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} ds \quad (2.157)$$

ただし、 $\boldsymbol{\tau}$ は周回積分路に沿う方向の単位ベクトルを示す。上式の周回積分は、次のようにストークスの定理より、周回積分路 C に囲まれた面 A の面積分に変換できる。

$$\oint_C \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \iint_A \left\{ \nabla \times \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \mathbf{H} \right) \right\} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.158)$$

上式右辺の被積分関数は、

$$\begin{aligned}\left\{ \nabla \times \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \mathbf{H} \right) \right\} \cdot \mathbf{n} &= \left\{ \left(\nabla \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right) \times \mathbf{H} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i} (\nabla \times \mathbf{H}) \right\} \cdot \mathbf{n} \\ &= \left\{ \left(\nabla \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right) \times \mathbf{H} \right\} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \\ &= (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \left(\nabla \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial\psi}{\partial x_i} (j\omega\epsilon\mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \\ &= -(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \left(\nabla \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right) + j\omega\epsilon \frac{\partial\psi}{\partial x_i} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\end{aligned}\quad (2.159)$$

電流源 $\mathbf{J}_0 = 0$ 、導電率 $\sigma = 0$ として、

$$\nabla \times \mathbf{H} = (j\omega\epsilon + \sigma)\mathbf{E} + \mathbf{J}_0 = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (2.160)$$

よって、周回積分項は、

$$\begin{aligned}
\oint_C \nabla \psi (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}) ds &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \oint_C \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \iint_A \left\{ \nabla \times \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \mathbf{H} \right) \right\} \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \iint_A \left\{ j\omega\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_i} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \left(\nabla \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right\} dS \\
&= \iint_A \left[j\omega\epsilon (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \left\{ (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \left(\nabla \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right\} \right] dS \\
&= \iint_A \left\{ j\omega\epsilon (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla \psi - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla(\nabla \psi) \right\} dS
\end{aligned} \tag{2.161}$$

ここで、

$$\nabla \psi = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \tag{2.162}$$

2.8.2 ベクトルの勾配

ベクトル関数 \mathbf{F} の勾配 (gradient) $\nabla \mathbf{F}$ は、

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{F} &= \nabla \left(\sum_{j=1}^3 F_j \mathbf{i}_j \right) = \left(\sum_{j=1}^3 \nabla F_j \right) \mathbf{i}_j = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial F_j}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial F_j}{\partial x_3} \mathbf{i}_3 \right) \mathbf{i}_j \\
&= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \mathbf{i}_i \right) \mathbf{i}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j
\end{aligned} \tag{2.163}$$

となり、ダイアディック関数で表される。これより、

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^3 F_j \mathbf{i}_j = \nabla \psi = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \mathbf{i}_j \tag{2.164}$$

とおくと、スカラ関数 ψ の勾配の勾配 $\nabla(\nabla \psi)$ は、

$$\nabla(\nabla \psi) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \tag{2.165}$$

いま、

$$\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad \psi'_j = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \tag{2.166}$$

とおいて、周回積分の第2項の被積分関数を計算していくと、

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j \left\{ (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \left(\nabla \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \right\} &= \sum_{j=1}^3 (\mathbf{J} \cdot \nabla \psi'_j) \mathbf{i}_j = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 J_i \frac{\partial \psi'_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{i}_j \\
&= \sum_{i=1}^3 J_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 \psi'_j \mathbf{i}_j \right) = \sum_{i=1}^3 J_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \mathbf{i}_j \right) \\
&= \mathbf{J} \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \right) \\
&= \mathbf{J} \cdot \nabla(\nabla \psi) = (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla(\nabla \psi)
\end{aligned} \tag{2.167}$$

よって、 \mathbf{E}_C は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_C &= -\frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \oint_C \nabla \psi (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}) ds \\
&= \frac{1}{4\pi} \iint_A \left\{ -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla \psi + \frac{1}{j\omega\epsilon} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla(\nabla \psi) \right\} dS
\end{aligned} \tag{2.168}$$

一方、面積分で求められる電界 \mathbf{E}_S は、

$$\mathbf{E}_S = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left\{ -j\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H})\psi + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla \psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla \psi \right\} dS$$

領域 1 の面 A の開口面分布によって生じる電界 \mathbf{E}_p は、両者の和より、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_p &= \mathbf{E}_S + \mathbf{E}_C \\
&= \frac{1}{4\pi} \iint_A \left\{ -j\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H})\psi + \frac{1}{j\omega\epsilon} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla(\nabla \psi) + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla \psi \right\} dS
\end{aligned} \tag{2.169}$$

2.8.3 開口面法（任意の曲面）

開口面の電磁界を \mathbf{E}_a , \mathbf{H}_a , 観測点 P での電磁界を \mathbf{E}_p , \mathbf{H}_p とするとき, $k^2 = \omega^2\epsilon\mu$ より、

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \iint_A \left\{ k^2(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)\psi + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) \cdot \nabla(\nabla \psi) + j\omega\epsilon(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) \times \nabla \psi \right\} dS \tag{2.170}$$

同様にして、磁界 \mathbf{H}_p は（導出省略）、

$$\mathbf{H}_p = -\frac{1}{4\pi j\omega\mu} \iint_A \left\{ k^2(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a)\psi + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) \cdot \nabla(\nabla \psi) - j\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) \times \nabla \psi \right\} dS \tag{2.171}$$

このような方法を **開口面法** (aperture-field method) という。開口面のある点から観測点 P までの距離および単位ベクトルを r , \mathbf{a}_r すると、開口面の座標に関わる微分演算子 ∇ の

勾配は,

$$\nabla\psi = \nabla\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) = (-\mathbf{a}_r)\left(-jk - \frac{1}{r}\right)\frac{e^{-jkr}}{r} = jk\left(1 + \frac{1}{jkr}\right)\psi\mathbf{a}_r \quad (2.172)$$

$$\nabla(\nabla\psi) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \quad (2.173)$$

放射波 ($1/r$ に比例する項) を求めることにすると, $kr \gg 1$ とみなして次のように近似できる.

$$\nabla\psi \simeq jk\psi\mathbf{a}_r \quad (2.174)$$

$$\nabla(\nabla\psi) \simeq (jk)^2\psi\mathbf{a}_r\mathbf{a}_r \quad (2.175)$$

これより, 放射電界 \mathbf{E}_p は次のようになる.

$$\mathbf{E}_p \simeq \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \iint_A \left\{ k^2(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) \cdot (-k^2)\mathbf{a}_r\mathbf{a}_r + j\omega\epsilon(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) \times jk\mathbf{a}_r \right\} \psi dS \quad (2.176)$$

ベクトル公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ を用いれば,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r \times (\mathbf{a}_r \times \mathbf{J}) &= (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{J})\mathbf{a}_r - (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r)\mathbf{J} = (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{J})\mathbf{a}_r - \mathbf{J} \\ \mathbf{J} &= (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{J})\mathbf{a}_r - \mathbf{a}_r \times (\mathbf{a}_r \times \mathbf{J}) \end{aligned} \quad (2.177)$$

上式に $\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_a$ を代入して,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_a &= \{\mathbf{a}_r \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)\}\mathbf{a}_r - \mathbf{a}_r \times \{\mathbf{a}_r \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)\} \\ \therefore \mathbf{n} \times \mathbf{H}_a - \{(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) \cdot \mathbf{a}_r\}\mathbf{a}_r &= -\mathbf{a}_r \times \{\mathbf{a}_r \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)\} \end{aligned} \quad (2.178)$$

したがって,

$$\mathbf{E}_p = \frac{jk}{4\pi} \iint_A \left[\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{a}_r \times \{\mathbf{a}_r \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)\} - \mathbf{a}_r \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) \right] \psi dS \quad (2.179)$$

座標原点から観測点までの距離を R とし, $kR \gg 1$ のとき, 次のように近似できる ($R \simeq r$).

$$\mathbf{E}_p = \frac{-jk}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{R} \iint_A \left(\mathbf{a}_r \times \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \{\mathbf{a}_r \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)\} \right] \right) \cdot \frac{R}{r} e^{-jk(r-R)} dS \quad (2.180)$$

同様にして, 磁界 \mathbf{H} は,

$$\mathbf{H}_p = \frac{-jk}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{R} \iint_A \left(\mathbf{a}_r \times \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \{\mathbf{a}_r \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a)\} \right] \right) \cdot \frac{R}{r} e^{-jk(r-R)} dS \quad (2.181)$$

さらに, $\mathbf{a}_R \simeq \mathbf{a}_r$ のとき,

$$\mathbf{E}_p = \frac{jk}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \mathbf{a}_R \times \iint_A \left[\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \{ \mathbf{a}_R \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) \} + (\mathbf{E}_a \times \mathbf{n}) \right] \cdot e^{-jk(r-R)} dS \quad (2.182)$$

開口面の電界 \mathbf{E}_a , 磁界 \mathbf{H}_a から, 等価的な 2 次波源

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{H}_a \quad (2.183)$$

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{E}_a \times \mathbf{n} \quad (2.184)$$

を定義すれば,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= \frac{jk}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \mathbf{a}_R \times \iint_A \left(\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{a}_R \times \mathbf{J} + \mathbf{M} \right) e^{-jk(r-R)} dS \\ &= jkG_0 \mathbf{a}_R \times \iint_A \left(\mathbf{a}_R \times Z_0 \mathbf{J} + \mathbf{M} \right) e^{-jk(r-R)} dS \end{aligned} \quad (2.185)$$

任意電磁流分布による放射電磁界の積分表示式と同様の結果となる。ここで,

$$G_0 = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2.186)$$

2.9 平面開口面分布と放射界の関係

2.9.1 平面開口面分布

いま, 2 次波源 \mathbf{E}_a , \mathbf{H}_a が, 局所的な平面波とみなせるとき,

$$\mathbf{H}_a = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\mathbf{s} \times \mathbf{E}_a) \quad (2.187)$$

電界 \mathbf{E}_p の式に見られる \mathbf{H}_a の項は, 次のように \mathbf{E}_a を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) &= \mathbf{n} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{E}_a) \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a) \mathbf{s} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{E}_a \end{aligned} \quad (2.188)$$

これより, 電界 \mathbf{E}_p は 2 次波源の磁界 \mathbf{H}_a を消去して次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \iint_{S_i} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a - \mathbf{a}_R \times \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a) \mathbf{s} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{E}_a\}] e^{j\psi_1} dS \\ &= \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \iint_{S_i} [\{ \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{a}_R \} \times \mathbf{E}_a - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a) \mathbf{a}_R \times \mathbf{s}] e^{j\psi_1} dS \end{aligned} \quad (2.189)$$

ここで,

$$\psi_1 = -r + R \quad (2.190)$$

ただし, k は自由空間波数, R は原点から観測点までの距離, r は開口面から観測点までの距離, \mathbf{a}_R は観測方向の単位ベクトル, \mathbf{E} は開口面 S_i 上の電界, \mathbf{n} は開口面上の法線ベクトル, \mathbf{s} は電磁界に直交する単位ベクトルを示す.

2.9.2 平面開口面分布に対する開口面法

積分領域である曲面を波面上にとれば,

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a = 0 \quad (2.191)$$

が成り立ち, このとき, 放射電界 \mathbf{E}_p は次のようになる.

$$\mathbf{E}_p = \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \iint_A \{(\mathbf{n} + \mathbf{a}_R) \times \mathbf{E}_a\} e^{j\psi_1} dS \quad (2.192)$$

ただし, A は開口面 (aperture) を示し, \mathbf{E}_a を通常, 開口面分布という. さらに, 波面が平面の場合 (\mathbf{n} は積分変数に依らない), 放射電界 \mathbf{E}_p は次のようになる.

$$\mathbf{E}_p = \frac{-jk}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_R \times \{(\mathbf{n} + \mathbf{a}_R) \times \mathbf{N}\} \quad (2.193)$$

ただし,

$$\mathbf{N} = \iint_A \mathbf{E}_a e^{j\psi_1} dS \quad (2.194)$$

直角座標系 (x, y, z) において, $\mathbf{n} = \mathbf{a}_z$ のとき,

$$\mathbf{N} = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_x + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_y = \iint_A \mathbf{E}_a e^{j\psi_1} dS \quad (2.195)$$

ただし, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_z = 0$. ここで, \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , \mathbf{a}_z は, x , y , z に沿う単位ベクトルを各々示す.

図に示す球座標系 (R, Θ, Φ) において, Θ , Φ に沿う単位ベクトル \mathbf{a}_Θ , \mathbf{a}_Φ は,

$$\mathbf{a}_\Theta = \cos \Theta (\cos \Phi \mathbf{a}_x + \sin \Phi \mathbf{a}_y) - \sin \Theta \mathbf{a}_z \quad (2.196)$$

$$\mathbf{a}_\Phi = -\sin \Phi \mathbf{a}_x + \cos \Phi \mathbf{a}_y \quad (2.197)$$

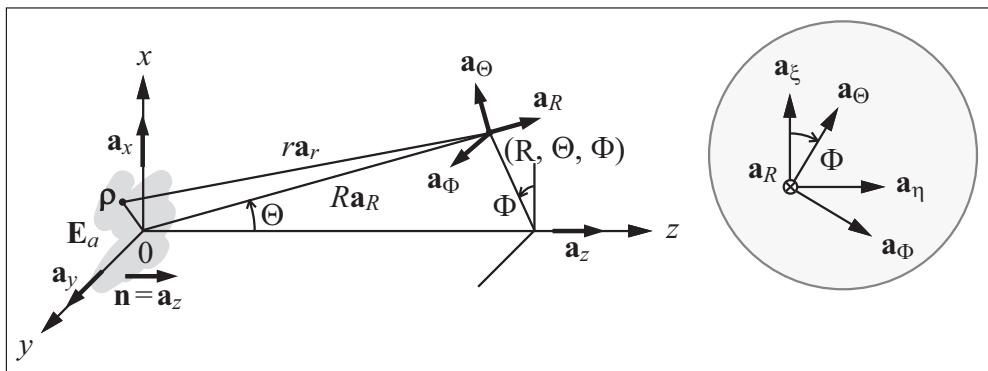


図 2.3. 開口面法に関する座標系の定義

2.9.3 主偏波成分、交差偏波成分

球座標系 (R, Θ, Φ) の単位ベクトル $\mathbf{a}_R, \mathbf{a}_\Theta, \mathbf{a}_\Phi$ は,

$$\mathbf{a}_R = \sin \Theta (\cos \Phi \mathbf{a}_x + \sin \Phi \mathbf{a}_y) + \cos \Theta \mathbf{a}_z \quad (2.198)$$

$$\mathbf{a}_\Theta = \cos \Theta (\cos \Phi \mathbf{a}_x + \sin \Phi \mathbf{a}_y) - \sin \Theta \mathbf{a}_z \quad (2.199)$$

$$\mathbf{a}_\Phi = -\sin \Phi \mathbf{a}_x + \cos \Phi \mathbf{a}_y \quad (2.200)$$

ここで,

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{a}_\Theta \times \mathbf{a}_\Phi \quad (2.201)$$

$$\mathbf{a}_\Theta = \mathbf{a}_\Phi \times \mathbf{a}_R \quad (2.202)$$

$$\mathbf{a}_\Phi = \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_\Theta \quad (2.203)$$

逆に,

$$\mathbf{a}_x = \cos \Phi (\sin \Theta \mathbf{a}_R + \cos \Theta \mathbf{a}_\Theta) - \sin \Phi \mathbf{a}_\Phi \quad (2.204)$$

$$\mathbf{a}_y = \sin \Phi (\sin \Theta \mathbf{a}_R + \cos \Theta \mathbf{a}_\Theta) + \cos \Phi \mathbf{a}_\Phi \quad (2.205)$$

$$\mathbf{a}_z = \cos \Theta \mathbf{a}_R - \sin \Theta \mathbf{a}_\Theta \quad (2.206)$$

これより,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_x &= \mathbf{a}_R \times \left\{ \cos \Phi (\sin \Theta \mathbf{a}_R + \cos \Theta \mathbf{a}_\Theta) - \sin \Phi \mathbf{a}_\Phi \right\} \\ &= \cos \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Phi + \sin \Phi \mathbf{a}_\Theta \end{aligned} \quad (2.207)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_R \times \left\{ \sin \Phi (\sin \Theta \mathbf{a}_R + \cos \Theta \mathbf{a}_\Theta) + \cos \Phi \mathbf{a}_\Phi \right\} \\ &= \sin \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Phi - \cos \Phi \mathbf{a}_\Theta \end{aligned} \quad (2.208)$$

式 (2.215) の左辺は,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{a}_R \times \{(\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_R) \times \mathbf{N}\} \\
&= \mathbf{a}_R \times \{(\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_R) \times (N_x \mathbf{a}_x + N_y \mathbf{a}_y)\} \\
&= \mathbf{a}_R \times \{N_x(\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_x) + N_y(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_y)\} \\
&= N_x \{ \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_R \times (\cos \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Phi + \sin \Phi \mathbf{a}_\Theta) \} \\
&\quad + N_y \{ -\mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_R \times (\sin \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Phi - \cos \Phi \mathbf{a}_\Theta) \} \\
&= N_x \{ (\sin \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Phi - \cos \Phi \mathbf{a}_\Theta) + (-\cos \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Theta + \sin \Phi \mathbf{a}_\Phi) \} \\
&\quad + N_y \{ -(\cos \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Phi + \sin \Phi \mathbf{a}_\Theta) + (-\sin \Phi \cos \Theta \mathbf{a}_\Theta - \cos \Phi \mathbf{a}_\Phi) \} \\
&= N_x \{ -\cos \Phi(1 + \cos \Theta) \mathbf{a}_\Theta + \sin \Phi(\cos \Theta + 1) \mathbf{a}_\Phi \} \\
&\quad + N_y \{ -\sin \Phi(1 + \cos \Theta) \mathbf{a}_\Theta - \cos \Phi(\cos \Theta + 1) \mathbf{a}_\Phi \} \\
&= -(1 + \cos \Theta) \{ N_x(\cos \Phi \mathbf{a}_\Theta - \sin \Phi \mathbf{a}_\phi) + N_y(\sin \Phi \mathbf{a}_\Theta + \cos \Phi \mathbf{a}_\phi) \} \tag{2.209}
\end{aligned}$$

新たに単位ベクトルを,

$$\mathbf{a}_\xi \equiv \cos \Phi \mathbf{a}_\Theta - \sin \Phi \mathbf{a}_\Phi \tag{2.210}$$

$$\mathbf{a}_\eta \equiv \sin \Phi \mathbf{a}_\Theta + \cos \Phi \mathbf{a}_\Phi \tag{2.211}$$

とおくと,

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{a}_\xi \times \mathbf{a}_\eta \tag{2.212}$$

$$\mathbf{a}_\xi = \mathbf{a}_\eta \times \mathbf{a}_R \tag{2.213}$$

$$\mathbf{a}_\eta = \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_\xi \tag{2.214}$$

これより, 式 (2.209) は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_R \times \{(\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_R) \times \mathbf{N}\} &= -(1 + \cos \Theta) (N_x \mathbf{a}_\xi + N_y \mathbf{a}_\eta) \\
&= -(1 + \cos \Theta) \{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_\xi + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_\eta\} \tag{2.215}
\end{aligned}$$

よって m 開口面分布 $\mathbf{E}_a (\equiv E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y)$ による放射電界 \mathbf{E}_p は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_p &= \frac{jk}{4\pi R} e^{-jkR} (1 + \cos \Theta) \{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_\xi + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_\eta\} \\
&= j \frac{1 + \cos \Theta}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} (N_x \mathbf{a}_\xi + N_y \mathbf{a}_\eta) \\
&\equiv E_\xi \mathbf{a}_\xi + E_\eta \mathbf{a}_\eta \tag{2.216}
\end{aligned}$$

ここで,

$$N_x = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_x = \iint_A (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{a}_x) e^{j\psi_1} dS = \iint_A E_x e^{j\psi_1} dS \tag{2.217}$$

$$N_y = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_y = \iint_A (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{a}_y) e^{j\psi_1} dS = \iint_A E_y e^{j\psi_1} dS \tag{2.218}$$

ただし, $\psi_1 \equiv -k(r - R)$. したがって, 電界ベクトル \mathbf{E}_p の直交する成分 E_ξ , E_η は,

$$E_{(\xi)}(R, \Theta, \Phi) = j \frac{1 + \cos \Theta}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} \iint_A E_{(x)}(x, y) e^{-jk(r-R)} dS \quad (2.219)$$

これより, 開口面電界分布 \mathbf{E}_a が x 成分のみ ($\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{a}_y = 0$) の場合, 放射電界 \mathbf{E}_p は \mathbf{a}_ξ 方向成分のみ ($\mathbf{E}_p \cdot \mathbf{a}_\eta = 0$) で表され, 逆に開口面電界分布 \mathbf{E}_a が y 成分のみ ($\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{a}_x = 0$) の場合, 放射電界 \mathbf{E}_p は \mathbf{a}_η 方向成分のみ ($\mathbf{E}_p \cdot \mathbf{a}_\xi = 0$) で表される. このようにして各々の成分は独立な式で扱うことができ, 開口面分布のスカラ成分に対して放射特性を解析すればよい.

2.10 フラウンホーファ領域とフレネル領域

2.10.1 フラウンホーファ領域放射電界

観測点が十分遠方の場合, 位相項の $(r - R)$ を次のように近似する.

$$r - R \simeq -\rho (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{a}_\rho) \quad (2.220)$$

ここで,

$$\mathbf{a}_R = \sin \Theta (\cos \Phi \mathbf{a}_x + \sin \Phi \mathbf{a}_y) + \cos \Theta \mathbf{a}_z \quad (2.221)$$

$$\mathbf{a}_\rho = \cos \varphi \mathbf{a}_x + \sin \varphi \mathbf{a}_y \quad (2.222)$$

ただし, \mathbf{a}_R は観測点を表す極座標系 (R, Θ, Φ) の R 方向に沿う単位ベクトル, \mathbf{a}_ρ は開口面を表す円筒座標系 (ρ, φ, z) の ρ 方向に沿う単位ベクトル, \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , \mathbf{a}_z は直角座標系 (x, y, z) の直交単位ベクトルを示す. 波数ベクトル \mathbf{k} より, 横断面内波数ベクトル \mathbf{k}_t を

$$\mathbf{k} = k \mathbf{a}_R = k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y + k_z \mathbf{a}_z = \mathbf{k}_t + k_z \mathbf{a}_z \quad (2.223)$$

で定義すると,

$$k \rho (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{a}_\rho) = (k \mathbf{a}_R) \cdot (\rho \mathbf{a}_\rho) = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} = \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho} = k_x x + k_y y \quad (2.224)$$

放射電界 E_p と開口面分布 E_a との関係は, **逆フーリエ変換** (inverse Fourier transform) によって, 次のように表される.

$$E_p = j \frac{1 + \cos \Theta}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} g(k_x, k_y) \quad (2.225)$$

$$g(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dx dy \quad (2.226)$$

$$u(x, y) = \begin{cases} E_a(x, y) & (\text{inside A}) \\ 0 & (\text{outside A}) \end{cases} \quad (2.227)$$

ただし、 \mathbf{k}_t は横断面内波数ベクトルを示し、次のように定義される。

$$\mathbf{k}_t = k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y \quad (2.228)$$

ここで、

$$k_x = k \sin \Theta \cos \Phi \quad (2.229)$$

$$k_y = k \sin \Theta \sin \Phi \quad (2.230)$$

さらに、フーリエ変換より、

$$u(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g(k_x, k_y) e^{-jk_t \cdot \rho} dk_x dk_y \quad (2.231)$$

が成り立ち、放射特性を表す $g(k_x, k_y)$ がわかれば、逆に開口面分布を表す $u(x, y)$ が得られることになる。このような連続フーリエ変換対は、実際の測定データを基にした計測においては、通常、**離散フーリエ変換対** (discrete Fourier transform pair) として扱われるので、**高速フーリエ変換** (fast Fourier transform: FFT) で計算できる。

2.10.2 フレネル領域放射電界

近似の次数を上げて、次のように展開する。

$$r - R \simeq -\rho (\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{a}_\rho) + \frac{\rho^2}{2R} \quad (2.232)$$

これより、

$$e^{-jk(r-R)} \simeq e^{jk_t \cdot \rho} e^{-jk \frac{\rho^2}{2R}} \quad (2.233)$$

と近似すると、放射電界 E_p は次のようになり、このような領域を**フレネル領域** (Fresnel region) という。

$$E_p = j \frac{1 + \cos \Theta}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} g_r(k_x, k_y, R) \quad (2.234)$$

$$g_r(k_x, k_y, R) = \iint_{-\infty}^{\infty} u_r(x, y, R) e^{jk_t \cdot \rho} dx dy \quad (2.235)$$

$$u_r(x, y, R) = \begin{cases} E_a(x, y) e^{-jk \frac{\rho^2}{2R}} & (\text{inside A}) \\ 0 & (\text{outside A}) \end{cases} \quad (2.236)$$

このときも開口面分布はフーリエ変換によって求めることができ、

$$u_r(x, y, R) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g_r(k_x, k_y, R) e^{-jk_t \cdot \rho} dk_x dk_y \quad (2.237)$$

この場合も離散フーリエ変換対によって表され、高速フーリエ変換を用いて計算できる。フレネル領域の距離 R の下限については、はつきりとした定義がないが、一つの目安として、無視した位相の第3項が $\lambda/16$ 以下として、

$$\frac{(D/2)^4}{8R^3} < \frac{\lambda}{16} \quad (2.238)$$

の条件より求めると、

$$\frac{2D^2}{\lambda} > R > \frac{D}{2} \left(\frac{D}{\lambda} \right)^{1/3} \quad (2.239)$$

を満たす範囲となる^{*7}。

^{*7} R.C.Hansen, "Microwave Scanning Antennas," Peninsula Pub. (1986), ISBN-13: 978-0932146120.

CHAPTER 3

スカラー・グリーン関数

電磁波工学における境界値問題の解法として、グリーン関数法を取り上げて解説する。まず、ベクトルポテンシャルに関するスカラー・グリーン関数について、Sturm-Liouville型方程式に対する固有関数展開法および区間分割法を用いて、グリーン関数の導出過程を示す。さらに、これらの手法で得られたグリーン関数が複素積分と密接に関係していることに言及し、一次元グリーン関数を出発点として、二次元および三次元グリーン関数を構築する手法にも触れる、これにより、グリーン関数の理論的枠組みから実際の応用に至るまでを体系的に説明する。

3.1 Sturm-Liouville 方程式

Sturm-Liouville 方程式に関するスカラー・グリーン関数について、区間を分割して求める方法、および固有関数展開して求める方法について示し、さらに複素積分を用いて求める方法についても取り上げ説明する^{*1}。^s

3.1.1 固有値、固有関数

電磁波工学における境界値問題は、次の Sturm-Liouville 方程式（同次形）に関係する問題が多い。

$$\frac{d}{dx} p(x) \frac{d\psi(x)}{dx} + [q(x) + \lambda\sigma(x)]\psi(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (3.1)$$

^{*1} Robert E. Collin, “Field Theory of Guided Waves,” 2nd ed., IEEE Press (1991), ISBN-13: 978-0879422370.

ただし, λ は定数, p, σ は通常, 正にとり, x に関する連続関数を示す. 境界条件の例としては, 次のいずれかが考えられる.

- $\psi = 0$ at $x = 0, a$
- $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ at $x = 0, a$
- $\psi + K \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ at $x = 0, a$ (ただし, K は定数)

上の境界条件のいずれかが与えられれば, Sturm-Liouville 方程式を満たす**固有値** (eigenvalues) $\lambda = \lambda_n$, **固有関数** (eigenfunctions) $\psi = \psi_n$ を無限個求めることができる. いま, 2つの固有関数を ψ_n, ψ_m (固有値は各々 λ_n, λ_m) とおくと,

$$\frac{d}{dx} p \frac{d\psi_n}{dx} + [q + \lambda_n \sigma] \psi_n = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dx} p \frac{d\psi_m}{dx} + [q + \lambda_m \sigma] \psi_m = 0 \quad (3.3)$$

が成り立ち, 上の第1式に ψ_m , 第2式に ψ_n を各々乗じて, 邊々引くと,

$$\psi_m \frac{d}{dx} p \frac{d\psi_n}{dx} - \psi_n \frac{d}{dx} p \frac{d\psi_m}{dx} + (\lambda_n - \lambda_m) \sigma \psi_n \psi_m = 0 \quad (3.4)$$

そして, 両辺を x について区間 $[0, a]$ にわたって積分すると,

$$\int_0^a \left(\psi_n \frac{d}{dx} p \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d}{dx} p \frac{d\psi_n}{dx} \right) dx = \int_0^a (\lambda_n - \lambda_m) \sigma \psi_n \psi_m dx \quad (3.5)$$

上式の左辺は, 次のように部分積分できる.

$$\begin{aligned} & \left[\psi_n p \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m p \frac{d\psi_n}{dx} \right]_0^a - \int_0^a \left(\frac{d\psi_n}{dx} p \frac{d\psi_m}{dx} - \frac{d\psi_m}{dx} p \frac{d\psi_n}{dx} \right) dx \\ &= \left[p \left(\psi_n \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dx} \right) \right]_0^a \end{aligned} \quad (3.6)$$

よって,

$$\left[p \left(\psi_n \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dx} \right) \right]_0^a = (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^a \sigma \psi_n \psi_m dx \quad (3.7)$$

左辺については, さらに境界条件を適用し, 次のようになる.

- $\psi_n = \psi_m = 0$ at $x = 0, a$ の場合, (左辺) = 0
- $\frac{\partial \psi_n}{\partial x} = \frac{\partial \psi_m}{\partial x} = 0$ at $x = 0, a$ の場合, (左辺) = 0

- $\psi_n + K \frac{\partial \psi_n}{\partial x} = \psi_m + K \frac{\partial \psi_m}{\partial x} = 0$ at $x = 0, a$ の場合,

$$\begin{aligned} \psi_n \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dx} &= \psi_n \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dx} + K \frac{d\psi_n}{dx} \frac{d\psi_m}{dx} - K \frac{d\psi_n}{dx} \frac{d\psi_m}{dx} \\ &= \left(\psi_n + K \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right) \frac{d\psi_m}{dx} - \left(\psi_m + K \frac{\partial \psi_m}{\partial x} \right) \frac{d\psi_n}{dx} \end{aligned} \quad (3.8)$$

と変形できるので, (左辺) = 0 となる.

したがって, 上のいずれの境界条件でも, 次式が成り立つ.

$$0 = (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^a \sigma \psi_n \psi_m dx \quad (3.9)$$

3.1.2 直交性

$\lambda_n \neq \lambda_m$ のとき,

$$\int_0^a \sigma \psi_n \psi_m dx = 0 \quad (3.10)$$

上式は, σ を荷重関数とみなすと, ψ_n , ψ_m が $0 \leq x \leq a$ において直交性をもつことを表している. そして, 次の正規化条件を満足しているものとする.

$$\int_0^a \sigma(x) \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} = \delta_{nm} \quad (3.11)$$

ただし, δ_{nm} はクロネッカデルタの記号を示す. このような正規化直交関数 ψ_n を用いれば, 関数 $h(x)$ を次のように展開することができる.

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \quad (3.12)$$

いま, $h(x)$ の式の両辺に $\sigma(x) \psi_m(x)$ を乗じ, 区間 $[0, a]$ で x について積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^a h(x) \sigma(x) \psi_m(x) dx &= \int_0^a \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \right) \sigma(x) \psi_m(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^a \sigma(x) \psi_n(x) \psi_m(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{nm} = a_m \end{aligned} \quad (3.13)$$

よって, a_n は ($x \rightarrow x'$),

$$a_n = \int_0^a h(x') \sigma(x') \psi_n(x') dx' \quad (3.14)$$

これより、関数 $h(x)$ は、

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^a h(x') \sigma(x') \psi_n(x') dx' \right) \psi_n(x) \\ &= \int_0^a h(x') \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x') \psi_n(x') \psi_n(x) \right] dx' \end{aligned} \quad (3.15)$$

ところで、デルタ関数 $\delta(x - x')$ を用いれば次式が成り立つ。

$$h(x) = \int_0^a h(x') \delta(x - x') dx' \quad (3.16)$$

両者の $h(x)$ に関する式を比較すると、次の関係（オペレータ）が得られる。

$$\delta(x - x') = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x') \psi_n(x') \psi_n(x) \quad (3.17)$$

3.2 グリーン関数の求め方

グリーン関数は、線形システムにおける単位強度の点波源による応答を表すもので、点 x' の波源はディラックのデルタ関数 $\delta(x - x')$ によって表される。つまり、Sturm-Liouville 方程式に対するグリーン関数 $G(x, x')$ は、デルタ関数を用いた次式を満足する。

$$\frac{d}{dx} p \frac{dG}{dx} + [q + \lambda \sigma] G = -\delta(x - x') \quad (3.18)$$

3.2.1 グリーン関数を求める方法 I (固有関数による展開)

まず、固有値 λ_n 、固有関数 ψ_n より、

$$\frac{d}{dx} p \frac{d\psi_n}{dx} + [q + \lambda_n \sigma] \psi_n = 0 \quad (3.19)$$

グリーン関数 G を固有関数 ψ_n を用いて展開すると、

$$G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \quad (3.20)$$

このように展開したグリーン関数 G も、 ψ_n と同じ境界条件を満足する。この G を式 (3.18) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \right) + [q + \lambda \sigma] \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \right) &= -\delta(x - x') \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{d}{dx} p \frac{d\psi_n}{dx} + [q + \lambda \sigma] \psi_n \right) &= -\delta(x - x') \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここで,

$$\frac{d}{dx} p \frac{d\psi_n}{dx} + q\psi_n = -\lambda_n \sigma \psi_n \quad (3.22)$$

より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_n) \sigma \psi_n = -\delta(x - x') \quad (3.23)$$

上式の両辺に $\psi_m(x)$ を乗じ, $[0, a]$ にわたって積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_n) \sigma(x) \psi_n(x) \psi_m(x) dx &= - \int_0^a \delta(x - x') \psi_m(x) dx \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_n) \int_0^a \sigma(x) \psi_n(x) \psi_m(x) dx &= -\psi_m(x') \end{aligned} \quad (3.24)$$

固有関数の正規化直交条件より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_n) \delta_{nm} = a_m (\lambda - \lambda_m) = -\psi_m(x') \quad (3.25)$$

よって, 係数 a_n は次のようになる.

$$a_n = -\frac{\psi_n(x')}{\lambda - \lambda_n} \quad (3.26)$$

これにより,

$$G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\psi_n(x')}{\lambda - \lambda_n} \right) \psi_n(x) \quad (3.27)$$

したがって, グリーン関数 $G(x, x')$ は次のようになる.

$$G(x, x') = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x) \psi_n(x')}{\lambda - \lambda_n} \quad (3.28)$$

3.2.2 グリーン関数を求める方法 II (区間の分割)

点波源以外のところ, つまり $x \neq x'$ では, グリーン関数 G の満たすべき式は, 単なる同次形となって次のようになる.

$$\frac{d}{dx} p \frac{dG}{dx} + [q + \lambda \sigma] G = 0 \quad (x \neq x') \quad (3.29)$$

このとき, G を x の区間 $[0, a]$ において次のように定義する.

$$G = \begin{cases} A\Phi_1(x) & (x \leq x') \\ B\Phi_2(x) & (x \geq x') \end{cases} \quad (3.30)$$

ただし, $x = x'$ では G は連続ゆえ,

$$A\Phi_1(x') = B\Phi_2(x') \quad (3.31)$$

一方, $x = x'$ 近傍では,

$$\frac{d}{dx}p \frac{dG}{dx} + [q + \lambda\sigma]G = -\delta(x - x') \quad (3.32)$$

が成り立つ. そこで, 両辺を x について区間 $[x' - \tau, x' + \tau]$ で積分し, その後, $\tau \rightarrow 0$ の極限をとると,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{x' - \tau}^{x' + \tau} \left(\frac{d}{dx}p \frac{dG}{dx} + [q + \lambda\sigma]G \right) dx = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{x' - \tau}^{x' + \tau} -\delta(x - x') dx \quad (3.33)$$

上式の左辺第 1 項は,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{x' - \tau}^{x' + \tau} \frac{d}{dx}p \frac{dG}{dx} dx = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[p \frac{dG}{dx} \right]_{x' - \tau}^{x' + \tau} = \left[p \frac{dG}{dx} \right]_{x'_-}^{x'_+} = p(x') \left[\frac{dG}{dx} \right]_{x'_-}^{x'_+} \quad (3.34)$$

上式の最後の項は, G の導関数は $x = x'$ で不連続, $p(x)$ は $x = x'$ で連続であることを用いて求めている. また, 左辺第 2 項は, $q(x)$, $\sigma(x)$, および $G(x)$ がいずれも $x = x'$ で連続ゆえ,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{x' - \tau}^{x' + \tau} [q(x) + \lambda\sigma(x)]G(x, x') dx = 0 \quad (3.35)$$

一方, 右辺は, デルタ関数の性質より,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{x' - \tau}^{x' + \tau} -\delta(x - x') dx = -1 \quad (3.36)$$

よって,

$$p(x') \left[\frac{dG}{dx} \right]_{x'_-}^{x'_+} = -1 \quad (3.37)$$

さらに, 先に定義した G を代入すると,

$$\begin{aligned} \left[\frac{dG}{dx} \right]_{x'_-}^{x'_+} &= \frac{dG}{dx} \Big|_{x'_+} - \frac{dG}{dx} \Big|_{x'_-} = \frac{d}{dx}(B\Phi_2(x)) \Big|_{x'_+} - \frac{d}{dx}(A\Phi_1(x)) \Big|_{x'_-} \\ &= B \frac{d\Phi_2}{dx} \Big|_{x'_+} - A \frac{d\Phi_1}{dx} \Big|_{x'_-} = B\Phi'_2(x') - A\Phi'_1(x') \end{aligned} \quad (3.38)$$

よって,

$$p(x') \{B\Phi'_2(x') - A\Phi'_1(x')\} = -1 \quad (3.39)$$

式 (3.31) と上式を連立させると、係数 A, B は次のようになる（導出省略）。

$$A = -\frac{\Phi_2(x')}{p(x')[\Phi_1(x')\Phi'_2(x') - \Phi'_1(x')\Phi_2(x')]} \quad (3.40)$$

$$B = A \frac{\Phi_1(x')}{\Phi_2(x')} \quad (3.41)$$

ここで、

$$W(x') \equiv \Phi_1(x')\Phi'_2(x') - \Phi'_1(x')\Phi_2(x') \quad (3.42)$$

とおくと、

$$A = -\frac{\Phi_2(x')}{p(x')W(x')} \quad (3.43)$$

$$B = -\frac{\Phi_1(x')}{p(x')W(x')} \quad (3.44)$$

これにより、 G は次のようになる。

$$G(x, x') = \begin{cases} A\Phi_1(x) = -\frac{\Phi_1(x)\Phi_2(x')}{p(x')W(x')} & (0 \leq x \leq x') \\ B\Phi_2(x) = -\frac{\Phi_1(x')\Phi_2(x)}{p(x')W(x')} & (x' \leq x \leq a) \end{cases} \quad (3.45)$$

さらに、 x' と x の大きい方を $x_>$ 、小さい方を $x_<$ で表すと $G(x, x')$ は、次のように一つの式にまとめて表すことができる。

$$G(x, x') = -\frac{\Phi_1(x_<)\Phi_2(x_>) - \Phi_1(x_>)\Phi_2(x_<)}{p(x')W(x')} \quad (3.46)$$

ここで、上式の W は λ の関数であり、 $\lambda = \lambda_n$ のとき $W = 0$ となり、上式（方法 II）も式 (3.28)（方法 I）と同様に極をもつ。

3.3 境界値問題の解

次の非同次形の方程式の解を求めるを考える。

$$\frac{d}{dx} p \frac{d\psi}{dx} + [q + \lambda\sigma]\psi = -f(x) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (3.47)$$

ただし、境界条件としては、次のいずれかが与えられているものとする。

- ψ at $x = 0, a$
- $\frac{d\psi}{dx}$ at $x = 0, a$
- $\psi + K\frac{d\psi}{dx}$ at $x = 0, a$ (ただし、 K は定数)

そして、この問題に対するグリーン関数 G は、次式を満足するものである。

$$\frac{d}{dx} p \frac{dG}{dx} + [q + \lambda\sigma]G = -\delta(x - x') \quad (3.48)$$

後の計算で都合の良いように、 x と x' を入れ替えると、

$$\frac{d}{dx'} p(x') \frac{d\psi(x')}{dx'} + [q(x') + \lambda\sigma(x')] \psi(x') = -f(x') \quad (3.49)$$

$$\frac{d}{dx'} p(x') \frac{dG(x', x)}{dx'} + [q(x') + \lambda\sigma(x')] G(x', x) = -\delta(x' - x) \quad (3.50)$$

上の第 1 式に $G(x', x)$ を乗じ、第 2 式に $\psi(x')$ を乗じて、辺々引いて、 $[0, a]$ で x' について積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_0^a \left\{ G(x', x) \frac{d}{dx'} \left(p(x') \frac{d\psi(x')}{dx'} \right) - \psi(x') \frac{d}{dx'} \left(p(x') \frac{dG(x', x)}{dx'} \right) \right\} dx' \\ &= \int_0^a -f(x') G(x', x) dx' + \int_0^a \delta(x' - x) \psi(x') dx' \end{aligned} \quad (3.51)$$

上式左辺については部分積分を行い、右辺第 2 項についてはデルタ関数の性質より、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_0^a G(x', x) f(x') dx' + \left[G(x', x) \left(p(x') \frac{d\psi(x')}{dx'} \right) - \psi(x') \left(p(x') \frac{dG(x', x)}{dx'} \right) \right]_0^a \\ &+ \int_0^a \left\{ \frac{dG(x', x)}{dx'} \left(p(x') \frac{d\psi(x')}{dx'} \right) - \frac{d\psi(x')}{dx'} \left(p(x') \frac{dG(x', x)}{dx'} \right) \right\} dx' \\ &= \int_0^a G(x', x) f(x') dx' + \left[p(x') \left(G(x', x) \frac{d\psi(x')}{dx'} - \psi(x') \frac{dG(x', x)}{dx'} \right) \right]_0^a \end{aligned} \quad (3.52)$$

いま、簡単なケースとして、境界条件が、

- $\psi = 0$ at $x = 0, a$
- $\frac{d\psi}{dx} = 0$ at $x = 0, a$
- $\psi + K \frac{d\psi}{dx} = 0$ at $x = 0, a$ (ただし、 K は定数)

のいずれかで与えられている場合、グリーン関数 G も同じ境界条件とすると、上式の $[\]_0^a$ の項（境界条件に関する項）が 0 になり、 $\psi(x)$ は次のようになる。

$$\psi(x) = \int_0^a G(x', x) f(x') dx' \quad (3.53)$$

また、 ψ の境界条件が 0 ではなく、ある値をもつ場合も考えてみる。すでに示した 3 通りの ψ の境界条件を一般化した形で表すと、次のようになる。

$$K_1 \psi + K_2 \frac{d\psi}{dx} = K_3 \quad \text{at } x = 0, a \quad (3.54)$$

ただし、グリーン関数 G の境界条件は、上と同様に 0 としておく。例えば、

- $K_2 = 0$ のとき, つまり, $\psi = \frac{K_3}{K_1}$ (at $x = 0, a$) が与えられている場合, $G = 0$ (at $x = 0, a$) とする.
- $K_1 = 0$ のとき, つまり, $\frac{d\psi}{dx} = \frac{K_3}{K_2}$ (at $x = 0, a$) が与えられている場合, $\frac{dG}{dx} = 0$ (at $x = 0, a$) とする.
- $K_1 \neq 0, K_2 \neq 0$ のとき, つまり, $K_3(\neq 0)$ (at $x = 0, a$) が与えられているとき, $K_1 G + K_2 \frac{dG}{dx} = 0$ (at $x = 0, a$) とする.

これにより, 境界条件の項は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 & \left[p(x') \left(G(x', x) \frac{d\psi(x')}{dx'} - \psi(x') \frac{dG(x', x)}{dx'} \right) \right]_0^a \\
 &= \left[p(x') \left\{ \frac{G(x', x)}{K_2} \left(K_1 \psi(x') + K_2 \frac{d\psi(x')}{dx'} \right) - \frac{\psi(x')}{K_2} \left(K_1 G(x', x) + K_2 \frac{dG(x', x)}{dx'} \right) \right\} \right]_0^a \\
 &= \left[p(x') \frac{G(x', x)}{K_2} K_3 \right]_0^a \\
 &= \frac{K_3}{K_2} \left[p(x') G(x', x) \right]_0^a
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

したがって, $\psi(x)$ は次のようになる.

$$\psi(x) = \int_0^a G(x', x) f(x') dx' + \frac{K_3}{K_2} \left[p(x') G(x', x) \right]_0^a \tag{3.56}$$

3.4 グリーン関数の導出例

3.4.1 固有関数

Sturm-Liouville 方程式 (同次形)

$$\frac{d}{dx} p(x) \frac{d\psi(x)}{dx} + [q(x) + \lambda \sigma(x)] \psi(x) = 0 \tag{3.57}$$

において, $p = \sigma = 1, q = 0$ とおいた次の同次方程式を考える.

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \lambda \psi(x) = 0 \tag{3.58}$$

このとき, 境界条件は,

$$\psi = 0 \quad (\text{at } x = 0, a) \tag{3.59}$$

これを解くため, まず $\psi \equiv e^{\alpha x}$ とおいて, 与式に代入すると,

$$\frac{d^2}{dx^2} (e^{\alpha x}) + \lambda e^{\alpha x} = (\alpha^2 + \lambda) e^{\alpha x} = 0 \tag{3.60}$$

これより、特性方程式は、

$$\alpha^2 + \lambda = 0 \quad (3.61)$$

よって、

$$\alpha = \pm j\sqrt{\lambda} \quad (3.62)$$

ここで、 \sin , \cos を選ぶと一般解は次のようになる。

$$\psi = A \sin \sqrt{\lambda}x + B \cos \sqrt{\lambda}x \quad (3.63)$$

次に、 $x = 0$ における境界条件より、

$$\psi \Big|_{x=0} = B = 0 \quad (3.64)$$

また、 $x = a$ における境界条件より、

$$\psi \Big|_{x=a} = A \sin \sqrt{\lambda}a = 0 \quad (A \neq 0) \quad (3.65)$$

よって、

$$\sqrt{\lambda}a = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.66)$$

これより、固有値 λ_n は、

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \equiv \lambda_n \quad (3.67)$$

また、固有関数は、

$$\sin \sqrt{\lambda_n}x = \sin \left(\frac{n\pi}{a}x \right) \quad (3.68)$$

さらに、正規化直交条件

$$\int_0^a \psi_n \psi_m dx = \delta_{nm} \quad (3.69)$$

を満足するように係数を決めるとき、

$$\int_0^a \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a}x \right) dx = \frac{a}{2} \quad (3.70)$$

より、

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \sqrt{\lambda_n}x = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.71)$$

3.4.2 固有関数展開によるグリーン関数（方法 I）

グリーン関数 G は固有関数展開より次のようになる。

$$G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.72)$$

ここで、

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (3.73)$$

これより、グリーン関数 $G(x, x')$ の表示式は次のようになる。

$$G(x, x') = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)\psi_n(x')}{\lambda - \lambda_n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x'}{a}}{\lambda - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \quad (3.74)$$

問題

式 (3.74) を導出せよ。

解答

グリーン関数 G の満たすべき方程式

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \lambda G = -\delta(x - x') \quad (3.75)$$

に、固有関数展開した式を代入すると、

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \right) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} + \lambda \psi_n \right) = -\delta(x - x') \quad (3.76)$$

ここで、固有関数 ψ_n は、

$$\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} + \lambda_n \psi_n = 0 \quad (3.77)$$

を満足するので、

$$\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} = -\lambda_n \psi_n \quad (3.78)$$

より、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_n) \psi_n = -\delta(x - x') \quad (3.79)$$

固有値 λ_n , および固有関数 ψ_n を代入すると,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ \lambda - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right\} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} = -\delta(x - x') \quad (3.80)$$

上式の両辺に $\psi_m(x)$ を乗じ, 区間 $[0, a]$ にわたって x について積分すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ \lambda - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right\} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} dx \\ &= - \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a} \delta(x - x') dx \end{aligned} \quad (3.81)$$

整理して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ \lambda - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right\} \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = -\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi x'}{a} \quad (3.82)$$

固有関数の正規化直交条件より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ \lambda - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right\} \delta_{nm} = a_m \left\{ \lambda - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right\} = -\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi x'}{a} \quad (3.83)$$

よって, 係数 a_n は次のようになる.

$$a_n = \frac{-\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x'}{a}}{\lambda - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2} \quad (3.84)$$

これをグリーン関数 $G(x, x')$ の式に代入すれば, 式 (3.74) が得られる.

3.4.3 方法 II によるグリーン関数の導出

方法 II では, 2つの領域 $0 \leq x < x'$, $x' < x \leq a$ で別々に G を定義する. まず, $0 \leq x < x'$ のとき,

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \lambda G = 0 \quad (0 \leq x < x') \quad (3.85)$$

これより, G は,

$$G = A_1 \sin \sqrt{\lambda} x + B_1 \cos \sqrt{\lambda} x \quad (3.86)$$

この領域の境界条件 ($G = 0$ at $x = 0$) より,

$$G \Big|_{x=0} = B_1 = 0 \quad (3.87)$$

よって,

$$G = A_1 \sin \sqrt{\lambda}x \equiv A_1 \Phi_1(x) \quad (3.88)$$

ただし,

$$\Phi_1(x) = \sin \sqrt{\lambda}x \quad (3.89)$$

また, $x' < x \leq a$ のとき,

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \lambda G = 0 \quad (x' < x \leq a) \quad (3.90)$$

これより, G は,

$$G = A_2 \sin \sqrt{\lambda}(a - x) + B_2 \cos \sqrt{\lambda}(a - x) \quad (3.91)$$

この領域の境界条件 ($G = 0$ at $x = a$) より,

$$G \Big|_{x=a} = B_2 = 0 \quad (3.92)$$

よって,

$$G = A_2 \sin \sqrt{\lambda}(a - x) \equiv A_2 \Phi_2(x) \quad (3.93)$$

ただし,

$$\Phi_2(x) = \sin \sqrt{\lambda}(a - x) \quad (3.94)$$

そして, 導関数 $\Phi'_1(x)$, $\Phi'_2(x)$ は,

$$\Phi'_1(x) = \frac{d}{dx} (\sin \sqrt{\lambda}x) = \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x \quad (3.95)$$

$$\Phi'_2(x) = \frac{d}{dx} (\sin \sqrt{\lambda}(a - x)) = -\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}(a - x) \quad (3.96)$$

よって, $W(x')$ は,

$$\begin{aligned} W(x') &= \Phi_1(x')\Phi'_2(x') - \Phi'_1(x')\Phi_2(x') \\ &= (\sin \sqrt{\lambda}x')(-\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}(a - x')) - (\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x')(\sin \sqrt{\lambda}(a - x')) \\ &= -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a \end{aligned} \quad (3.97)$$

また, $x_<$, $x_>$ を用いると,

$$\Phi_1(x) = \sin \sqrt{\lambda}x = \sin \sqrt{\lambda}x_< = \Phi_1(x_<) \quad (x \leq x') \quad (3.98)$$

$$\Phi_2(x) = \sin \sqrt{\lambda}(a - x) = \sin \sqrt{\lambda}(a - x_>) = \Phi_2(x_>) \quad (x' \leq x) \quad (3.99)$$

したがって, グリーン関数 G は次のようになる ($p = 1$).

$$G(x, x') = -\frac{\Phi_1(x_<)\Phi_2(x_>)}{p(x')W(x')} = \frac{\sin \sqrt{\lambda}x_<\sin \sqrt{\lambda}(a - x_>)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a} \quad (3.100)$$

3.5 グリーン関数の複素積分

3.5.1 固有関数展開したグリーン関数（方法 I）の複素積分

固有関数展開したグリーン関数 G （方法 I）は次式で与えられる。

$$G(x, x', \lambda) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)\psi_n(x')}{\lambda - \lambda_n} \quad (3.101)$$

上式の複素積分を行うため、次の **Cauchy の積分表示式**を用いる。

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\psi_n(x)\psi_n(x')}{\lambda - \lambda_n} d\lambda = \psi_n(x)\psi_n(x') \quad (3.102)$$

ただし、 C は複素平面の閉曲線に沿った積分路を示し、1位の極を囲むようにとったものである。さらに、 $n = 1$ から $n \rightarrow \infty$ までの和をとり、 $-$ 符号をつけると次のようになる。

$$-\frac{1}{2\pi j} \sum_{n=1}^{\infty} \oint_C \frac{\psi_n(x)\psi_n(x')}{\lambda - \lambda_n} d\lambda = - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\psi_n(x') \quad (3.103)$$

上式の左辺はグリーン関数 G を用いて表すことができ、

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C G(x, x', \lambda) d\lambda = - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\psi_n(x') \quad (3.104)$$

一方、先に求めたように、

$$\frac{\delta(x - x')}{\sigma(x')} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x')\psi_n(x) \quad (3.105)$$

よって、

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C G(x, x', \lambda) d\lambda = - \frac{\delta(x - x')}{\sigma(x')} \quad (3.106)$$

ただし、積分路 C はグリーン関数 $G(\lambda)$ の1位の極を全て囲むようにとったものである。

3.5.2 グリーン関数（方法 II）の複素積分

方法 II では、まず、

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \lambda G = -\delta(x - x') \quad (3.107)$$

を考え、このときの境界条件は、

$$G = 0 \quad (\text{at } x = 0, a) \quad (3.108)$$

グリーン関数 G (方法 II) は,

$$G(x, x', \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x_< \sin \sqrt{\lambda}(a - x_>) }{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a} \quad (3.109)$$

上式の $G(\lambda)$ は $\sqrt{\lambda}a = n\pi$ のとき, $\sin \sqrt{\lambda}a = 0$ であるので,

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \equiv \lambda_n \quad (3.110)$$

において極をもつ. そこで, 1位の極であるかどうか評価するため, $\lambda = \lambda_n$ 近傍における $\sin \sqrt{\lambda}a$ のふるまいを調べよう.

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{\lambda}a &= \sin \left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_n} \right) a = \sin \left\{ \left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_n} \right) a + \left(\frac{n\pi}{a} a \right) \right\} \\ &= \sin \left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_n} \right) a \cos n\pi + \cos \left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_n} \right) a \sin n\pi \\ &= \sin \left(\frac{\lambda - \lambda_n}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_n}} a \right) \cos n\pi \end{aligned} \quad (3.111)$$

ここで, $\lambda \simeq \lambda_n$ のとき,

$$\sin \sqrt{\lambda}a \rightarrow \frac{\lambda - \lambda_n}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_n}} a \cdot \cos n\pi \quad (3.112)$$

つまり,

$$\frac{1}{\sin \sqrt{\lambda}a} \rightarrow \frac{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_n}}{(\lambda - \lambda_n) a \cdot \cos n\pi} \quad (3.113)$$

これより, λ_n 近傍では, G は次のようになる.

$$\begin{aligned} G(\lambda) &\rightarrow \frac{\sin \sqrt{\lambda}x_< \sin \sqrt{\lambda}(a - x_>)}{\sqrt{\lambda} \cdot \frac{\lambda - \lambda_n}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_n}} a \cdot \cos n\pi} \\ &= \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \frac{(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_n}) \sin \sqrt{\lambda}x_< \sin \sqrt{\lambda}(a - x_>)}{\sqrt{\lambda}a \cos n\pi} \end{aligned} \quad (3.114)$$

よって, G は $\lambda = \lambda_n$ において 1位の極をもつことがわかる. 留数は,

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a}, \lambda_n \right] &= \frac{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda}a \cdot \cos n\pi} \Big|_{\lambda=\lambda_n} = \frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}a \cdot \cos n\pi} = \frac{2}{a \cos n\pi} \\ &= (-1)^n \frac{2}{a} \end{aligned} \quad (3.115)$$

したがって、 G の複素積分は、積分路 C 内部の 1 位の極による寄与から、次のようにして求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_C G(\lambda) d\lambda &= \operatorname{Res}[G, \lambda_1] + \operatorname{Res}[G, \lambda_2] + \cdots + \operatorname{Res}[G, \lambda_n] + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}[G, \lambda_n] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{a} \sin \sqrt{\lambda_n} x_{<} \sin \sqrt{\lambda_n} (a - x_{>}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{a} \sin \left(\frac{n\pi x_{<}}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi(a - x_{>})}{a} \right) \end{aligned} \quad (3.116)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{n\pi(a - x_{>})}{a} \right) &= \sin n\pi \cos \left(\frac{n\pi x_{>}}{a} \right) - \cos n\pi \sin \left(\frac{n\pi x_{>}}{a} \right) \\ &= -(-1)^n \sin \left(\frac{n\pi x_{>}}{a} \right) \end{aligned} \quad (3.117)$$

これより、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_C G(\lambda) d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{a} \sin \left(\frac{n\pi x_{<}}{a} \right) \left\{ -(-1)^n \sin \left(\frac{n\pi x_{>}}{a} \right) \right\} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \sin \left(\frac{n\pi x_{<}}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi x_{>}}{a} \right) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi x'}{a} \right) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x') \psi_n(x) \end{aligned} \quad (3.118)$$

方法 II を用いて得られたグリーン関数は、方法 I で求めたものと式の形は異なるが、複素積分すれば両者は同様の結果が得られることがわかる。

3.6 1 次元グリーン関数の複素積分による 3 次元グリーン関数

直角座標系 (x, y, z) の 3 次元のグリーン関数 G は次式を満足する。

$$(\nabla^2 + k_0^2) G = -\delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (3.119)$$

この方程式の同次形

$$(\nabla^2 + k_0^2) \psi(x, y, z) = 0 \quad (3.120)$$

の解 $\psi(x, y, z)$ が変数分離形で、 $\psi(x, y, z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$ で表されるとするとき、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \psi_x(x)}{\partial x^2} + \lambda_x \psi_x(x) = 0 \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_y(y)}{\partial y^2} + \lambda_y \psi_y(y) = 0 \quad (3.122)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_z(z)}{\partial z^2} + \lambda_z \psi_z(z) = 0 \quad (3.123)$$

ただし、

$$\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = k_0^2 \quad (3.124)$$

これらの各々の式に対する 1 次元グリーン関数 G_x , G_y , G_z は次式を満足する。

$$\frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + \lambda_x G_x = -\delta(x - x') \quad (3.125)$$

$$\frac{\partial^2 G_y}{\partial y^2} + \lambda_y G_y = -\delta(y - y') \quad (3.126)$$

$$\frac{\partial^2 G_z}{\partial z^2} + \lambda_z G_z = -\delta(z - z') \quad (3.127)$$

ここで、次の複素積分 I を考える。

$$I = -\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} \left(\nabla^2 + k_0^2 \right) G_x G_y G_z d\lambda_x \quad (3.128)$$

ただし、 C_x は $G_x(\lambda_x)$ の 1 位の極を囲むようにとった積分路である。まず、 $\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = k_0^2$ より、

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \lambda_z \right) [G_x G_y G_z] d\lambda_x \\ &= -\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} \left[\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_x \right) G_x \right\} G_y G_z + \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_y \right) G_y \right\} G_x G_z \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \lambda_z \right) G_z \right\} G_x G_y \right] d\lambda_x \\ &= -\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} \left\{ -\delta(x - x') G_y G_z - \delta(y - y') G_x G_z - \delta(z - z') G_x G_y \right\} d\lambda_x \\ &= \delta(x - x') \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_y G_z d\lambda_x \right\} + \delta(y - y') \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_x G_z d\lambda_x \right\} \\ &\quad + \delta(z - z') \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_x G_y d\lambda_x \right\} \end{aligned} \quad (3.129)$$

上式第1項は、積分路 C_x 内部に $G_y G_z$ の1位の極がないのでゼロである。

$$I = \delta(y - y') \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_x G_z d\lambda_x \right\} + \delta(z - z') \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_x G_y d\lambda_x \right\} \quad (3.130)$$

さらに、 $-\frac{1}{2\pi j}$ を乗じ、 λ_y について積分路 C_y で複素積分すると、

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} I d\lambda_y \\ &= -\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} \left[\delta(y - y') \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_x G_z d\lambda_x \right\} + \delta(z - z') \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_x G_y d\lambda_x \right\} \right] d\lambda_y \\ &= -\delta(y - y') \left(\frac{1}{2\pi j} \right)^2 \oint_{C_y} \oint_{C_x} G_x G_z d\lambda_x d\lambda_y \\ &\quad - \delta(z - z') \left(\frac{1}{2\pi j} \right)^2 \oint_{C_y} \oint_{C_x} G_x G_y d\lambda_x d\lambda_y \end{aligned} \quad (3.131)$$

ただし、 C_y は $G_y(\lambda_y)$ の1位の極を囲むようにとった積分路である。上式の第1項は、積分路 C_y の内部に $G_x G_z$ の1位の極がないのでゼロになる。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} I d\lambda_y = -\delta(z - z') \left(\frac{1}{2\pi j} \right)^2 \oint_{C_y} \oint_{C_x} G_x G_y d\lambda_x d\lambda_y \\ &= -\delta(z - z') \left(\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_x d\lambda_x \right) \left(\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} G_y d\lambda_y \right) \end{aligned} \quad (3.132)$$

さらに、

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_x(\lambda_x) d\lambda_x = -\delta(x - x') \quad (3.133)$$

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} G_y(\lambda_y) d\lambda_y = -\delta(y - y') \quad (3.134)$$

より、

$$-\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} I d\lambda_y = -\delta(z - z') \delta(y - y') \delta(x - x') = (\nabla^2 + k_0^2) G \quad (3.135)$$

よって、次式が得られる。

$$(\nabla^2 + k_0^2) G = \left(-\frac{1}{2\pi j} \right)^2 \oint_{C_y} \oint_{C_x} (\nabla^2 + k_0^2) [G_x G_y G_z] d\lambda_x d\lambda_y \quad (3.136)$$

これより、3次元グリーン関数 G は、

$$G = \left(-\frac{1}{2\pi j} \right)^2 \oint_{C_y} \oint_{C_x} G_x(\lambda_x) G_y(\lambda_y) G_z(k_0^2 - \lambda_x - \lambda_y) d\lambda_x d\lambda_y \quad (3.137)$$

つまり、3次元の方程式から変数分離して得られる1次元の方程式に対するグリーン関数 G_x , G_y , G_z がわかれば、複素積分によって3次元の方程式に対するグリーン関数 G を得られることになる。同様にして、 y , z について複素積分した場合、 z , x について複素積分した場合も求められ、次のようになる（導出省略）。

$$\begin{aligned} G &= \left(-\frac{1}{2\pi j}\right)^2 \oint_{C_z} \oint_{C_y} G_x(k_0^2 - \lambda_y - \lambda_z) G_y(\lambda_y) G_z(\lambda_z) d\lambda_y d\lambda_z \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi j}\right)^2 \oint_{C_x} \oint_{C_z} G_x(\lambda_x) G_y(k_0^2 - \lambda_x - \lambda_z) G_z(\lambda_z) d\lambda_z d\lambda_x \end{aligned} \quad (3.138)$$

問題

1次元グリーン関数を基にして2次元グリーン関数を複素積分によって求める式を導出せよ。

解答

次の複素積分を考える。

$$I = -\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} (\nabla^2 + k_0^2) [G_x(x, x', \lambda_x) G_y(y, y', \lambda_y)] d\lambda_x \quad (3.139)$$

ただし、 C_x は $G_x(\lambda_x)$ の1位の極を囲む積分路である。まず、 $\lambda_x + \lambda_y = k_0^2$ より、

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_y \right) [G_x G_y] d\lambda_x \\ &= -\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} \left[\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_x \right) G_x \right\} G_y + \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_y \right) G_y \right\} G_x \right] d\lambda_x \\ &= -\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} \left\{ -\delta(x - x') G_y(y, y', k_0^2 - \lambda_x) - \delta(y - y') G_x(x, x', \lambda_x) \right\} d\lambda_x \\ &= \delta(x - x') \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_y(y, y', k_0^2 - \lambda_x) d\lambda_x \right\} \\ &\quad + \delta(y - y') \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_x(x, x', \lambda_x) d\lambda_x \right\} \end{aligned} \quad (3.140)$$

上式の第1項は、積分路 C_x の内部に G_y の1位の極がないのでゼロになる。また、第2項は、

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_x(x, x', \lambda_x) d\lambda_x = -\delta(x - x') \quad (3.141)$$

となるので、積分 I は次のようになる。

$$I = -\delta(x - x') \delta(y - y') = (\nabla^2 + k_0^2) G \quad (3.142)$$

つまり,

$$(\nabla^2 + k_0^2) G = -\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} (\nabla^2 + k_0^2) [G_x(x, x', \lambda_x) G_y(y, y', k_0^2 - \lambda_x)] d\lambda_x \quad (3.143)$$

したがって、次のように 1 次元グリーン関数の複素積分によって 2 次元グリーン関数を求めることができる。

$$G = -\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} G_x(x, x', \lambda_x) G_y(y, y', k_0^2 - \lambda_x) d\lambda_x \quad (3.144)$$

CHAPTER 4

ダイアディック・グリーン関数

電磁波理論におけるダイアディック・グリーン関数について詳細に解説する。まず、ダイアディックの定義、基本的性質、ならびに微分演算に関する取り扱いについて述べ、電磁界解析への応用例を示す。次に、各種のダイアディック・グリーン関数（電界型、磁界型、自由空間におけるもの、第1種・第2種・第3種）を定義し、それぞれが満たすべき支配方程式および境界条件を導出する。さらに、これらのグリーン関数を用いた電磁界の積分表示式を示し、その構造的特徴や対称性について議論する。最後に、異なる媒質に対するダイアディック・グリーン関数の定式化を示し、その物理的意味について解説する。

4.1 ダイアディック関数

ダイアディック・グリーン関数について説明するため、まず最初にダイアディックの定義、基本特性、ダイアディックの微分などを述べ、それから電磁界解析においてダイアディックを用いる方法を示し、各種ダイアディック・グリーン関数^{*1}について詳細に説明していく。

4.1.1 ダイアディックとは

直角座標系の単位ベクトルを $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ とおくと、ベクトル \mathbf{F} は、

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i}_1 + F_2 \mathbf{i}_2 + F_3 \mathbf{i}_3 = \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{i}_i \quad (4.1)$$

^{*1} C. T. Tai, “Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory,” 2nd ed., IEEE Press, New York (1991), ISBN-13: 978-0780304499.

いま、次のような3つのベクトル \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 を考える。

$$\mathbf{F}_1 = F_{11}\mathbf{i}_1 + F_{21}\mathbf{i}_2 + F_{31}\mathbf{i}_3 = \sum_{i=1}^3 F_{i1}\mathbf{i}_i \quad (4.2)$$

$$\mathbf{F}_2 = F_{12}\mathbf{i}_1 + F_{22}\mathbf{i}_2 + F_{32}\mathbf{i}_3 = \sum_{i=1}^3 F_{i2}\mathbf{i}_i \quad (4.3)$$

$$\mathbf{F}_3 = F_{13}\mathbf{i}_1 + F_{23}\mathbf{i}_2 + F_{33}\mathbf{i}_3 = \sum_{i=1}^3 F_{i3}\mathbf{i}_i \quad (4.4)$$

これより、**ダイアディック** (dyadic) を次のように定義する。

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \mathbf{F}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{F}_2\mathbf{i}_2 + \mathbf{F}_3\mathbf{i}_3 = \sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j\mathbf{i}_j \quad (4.5)$$

ただし、 \mathbf{F}_j と \mathbf{i}_j は一般には交換できない。このダイアディックについて、成分をスカラ表示すると、

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{F}}} &= \sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j\mathbf{i}_j = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 F_{ij}\mathbf{i}_i \right) \mathbf{i}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ij}\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j \\ &= F_{11}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + F_{12}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + F_{13}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_3 \\ &\quad + F_{21}\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 + F_{22}\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + F_{23}\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 \\ &\quad + F_{31}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 + F_{32}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_2 + F_{33}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここで、9つの $\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) を**単位ダイアディクス** (unit dyadics or dyads) という。先に述べたように、ダイアディックのベクトル成分は一般には交換できないので、

$$\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j \neq \mathbf{i}_j\mathbf{i}_i \quad (i \neq j) \quad (4.7)$$

4.1.2 ダイアディックの転置など

ダイアディック $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$ の**転置** (transpose) $\bar{\bar{\mathbf{F}}}^T$ は、ベクトルを交換したもので、次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T &= \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j\mathbf{F}_j = \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j \left(\sum_{i=1}^3 F_{ij}\mathbf{i}_i \right) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 F_{ij}\mathbf{i}_j\mathbf{i}_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ji}\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j \\ &= F_{11}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + F_{21}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + F_{31}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_3 \\ &\quad + F_{12}\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 + F_{22}\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + F_{32}\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 \\ &\quad + F_{13}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 + F_{23}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_2 + F_{33}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (4.8)$$

これより、スカラ成分 F_{ij} を F_{ji} に交換すれば、ダイアディックの転置が得られることがわかる。特別な場合として、 $F_{ij} = F_{ji}$ が成り立つとき、

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}}^T_s = \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s \quad (4.9)$$

これを、**対称ダイアディック** (symmetrical dyadic) という。さらに,

$$F_{ij} = 1 \quad (i = j) \quad (4.10)$$

$$F_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (4.11)$$

つまり,

$$F_{ij} = \delta_{ij} \quad (4.12)$$

のとき (δ_{ij} はクロネッカ・デルタの記号), 対称ダイアディックは, 次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ij} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 \\ &\equiv \bar{\bar{\mathbf{I}}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

この $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ を idem factor (還元因子) という (idem とは同一のものをとるということ)。

4.2 ダイアディック解析

4.2.1 ダイアディック解析におけるスカラ積

ベクトル \mathbf{a} とダイアディック $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$ のスカラ積は,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}} &= \mathbf{a} \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j \mathbf{i}_j \right) = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{F}_j) \mathbf{i}_j \\ &= \sum_{j=1}^3 (a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3) \cdot (F_{1j} \mathbf{i}_1 + F_{2j} \mathbf{i}_2 + F_{3j} \mathbf{i}_3) \mathbf{i}_j \\ &= \sum_{j=1}^3 (a_1 F_{1j} + a_2 F_{2j} + a_3 F_{3j}) \mathbf{i}_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 a_i F_{ij} \mathbf{i}_j \end{aligned} \quad (4.14)$$

スカラ積はベクトルとなる。逆に、ダイアディック $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$ とベクトル \mathbf{a} のスカラ積は、

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{a} &= \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j \mathbf{i}_j \right) \cdot \mathbf{a} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{a}) \\
&= \sum_{j=1}^3 (F_{1j} \mathbf{i}_1 + F_{2j} \mathbf{i}_2 + F_{3j} \mathbf{i}_3) \{ \mathbf{i}_j \cdot (a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3) \} \\
&= \sum_{j=1}^3 (F_{1j} \mathbf{i}_1 + F_{2j} \mathbf{i}_2 + F_{3j} \mathbf{i}_3) a_j \\
&= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 a_j F_{ij} \mathbf{i}_i
\end{aligned} \tag{4.15}$$

これもベクトルとなる。対称ダイアディックの場合、 $\mathbf{a} \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}}$ と $\bar{\bar{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{a}$ は等しいが、一般には、両者は等しくない。上式の最後の項において、 i, j を入れ換えて、

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i F_{ji} \mathbf{i}_j \tag{4.16}$$

先に求めた $\mathbf{a} \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}}$ と比較すると、 F_{ji} の添え字を入れ換えたものとなっているので、

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i F_{ji} \mathbf{i}_j = \bar{\bar{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{a} \tag{4.17}$$

対称ダイアディック $\bar{\bar{\mathbf{F}}}_s$ では、 $\bar{\bar{\mathbf{F}}}_s^T = \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s$ ゆえ、

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s^T = \mathbf{a} \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s = \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s \cdot \mathbf{a} \tag{4.18}$$

つまり、この場合にはスカラ積で交換できる。また、 $\bar{\bar{\mathbf{F}}}_s = \bar{\bar{\mathbf{I}}}$ の場合、 $\bar{\bar{\mathbf{I}}} = \bar{\bar{\mathbf{I}}}^T$ ゆえ、

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\bar{\mathbf{I}}} = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \cdot \mathbf{a} \tag{4.19}$$

上式の左辺について、

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot \bar{\bar{\mathbf{I}}} &= (a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3) \cdot (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3) \\
&= a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3 \\
&= \mathbf{a}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

また、右辺について、

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\mathbf{I}}} \cdot \mathbf{a} &= (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3) \cdot (a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3) \\
&= a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3 \\
&= \mathbf{a}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

したがって、

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\bar{\mathbf{I}}} = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \tag{4.22}$$

4.2.2 ダイアディック解析におけるベクトル積

次に、ベクトル \mathbf{a} とダイアディク $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$ のベクトル積は次のようになる。

$$\mathbf{a} \times \bar{\bar{\mathbf{F}}} = \mathbf{a} \times \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j \mathbf{i}_j \right) = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a} \times \mathbf{F}_j) \mathbf{i}_j \quad (4.23)$$

同様にして、 $\bar{\bar{\mathbf{F}}} \times \mathbf{a}$ は、

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}} \times \mathbf{a} = \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j \mathbf{i}_j \right) \times \mathbf{a} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j (\mathbf{i}_j \times \mathbf{a}) \quad (4.24)$$

上のように、ベクトル積の結果はダイアディクとなる（スカラ積の結果はベクトルである）。

4.2.3 ダイアディック解析における3重積

ベクトル解析において、ベクトルの3重積は、

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (4.25)$$

いま、ベクトル \mathbf{c} に着目して、 \mathbf{c} が式の最後になるよう書くと、

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \quad (4.26)$$

ダイアディクのベクトル成分 $\mathbf{c} = \mathbf{F}_j$ ($j = 1, 2, 3$) を考えると、

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{F}_j) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{F}_j) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{F}_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.27)$$

これらをベクトル成分として、ダイアディクで表すと、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \{ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{F}_j) \} \mathbf{i}_j &= - \sum_{j=1}^3 \{ \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{F}_j) \} \mathbf{i}_j = \sum_{j=1}^3 \{ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{F}_j \} \mathbf{i}_j \\ \mathbf{a} \cdot \left\{ \mathbf{b} \times \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j \mathbf{i}_j \right) \right\} &= -\mathbf{b} \cdot \left\{ \mathbf{a} \times \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j \mathbf{i}_j \right) \right\} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j \mathbf{i}_j \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

よって、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{b} \times \bar{\bar{\mathbf{F}}} \right) &= -\mathbf{b} \cdot \left(\mathbf{a} \times \bar{\bar{\mathbf{F}}} \right) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}} = \left(\mathbf{b} \times \bar{\bar{\mathbf{F}}} \right)^T \cdot \mathbf{a} = -\left(\mathbf{a} \times \bar{\bar{\mathbf{F}}} \right)^T \cdot \mathbf{b} \\ &= \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

ここで、最後の3つの項は、ダイアディクの転置の性質を用いている。さらに、最後の2項については、 $\mathbf{b} = \mathbf{b}_j$ とおくと、

$$-\left(\mathbf{a} \times \bar{\bar{\mathbf{F}}} \right)^T \cdot \mathbf{b}_j = \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_j) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.30)$$

これらをベクトル成分とするダイアディックを考えると,

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^3 \left\{ \left(\mathbf{a} \times \bar{\bar{\mathbf{F}}} \right)^T \cdot \mathbf{b}_j \right\} \mathbf{i}_j &= \sum_{j=1}^3 \left\{ \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_j) \right\} \mathbf{i}_j \\ -\left(\mathbf{a} \times \bar{\bar{\mathbf{F}}} \right)^T \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{b}_j \mathbf{i}_j \right) &= \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \cdot \left\{ \mathbf{a} \times \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{b}_j \mathbf{i}_j \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

よって,

$$-\left(\mathbf{a} \times \bar{\bar{\mathbf{F}}} \right)^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{b}}} = \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \cdot \left(\mathbf{a} \times \bar{\bar{\mathbf{b}}} \right) \quad (4.32)$$

4.2.4 ダイアディックの発散

ダイアディック関数 $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$ の発散 $(\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}})$ は,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}} &= \nabla \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j \mathbf{i}_j \right) = \sum_{j=1}^3 (\nabla \cdot \mathbf{F}_j) \mathbf{i}_j \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{F}_1) \mathbf{i}_1 + (\nabla \cdot \mathbf{F}_2) \mathbf{i}_2 + (\nabla \cdot \mathbf{F}_3) \mathbf{i}_3 \\ &= \left\{ \nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^3 F_{i1} \mathbf{i}_i \right) \right\} \mathbf{i}_1 + \left\{ \nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^3 F_{i2} \mathbf{i}_i \right) \right\} \mathbf{i}_2 + \left\{ \nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^3 F_{i3} \mathbf{i}_i \right) \right\} \mathbf{i}_3 \\ &= \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_{i1}}{\partial x_i} \right) \mathbf{i}_1 + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_{i2}}{\partial x_i} \right) \mathbf{i}_2 + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_{i3}}{\partial x_i} \right) \mathbf{i}_3 \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_i} \mathbf{i}_j \end{aligned} \quad (4.33)$$

となり, ベクトル関数で表される.

4.2.5 ダイアディックの回転

ダイアディック関数 $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$ の回転 $(\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{F}}})$ は,

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{F}}} &= \nabla \times \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j \mathbf{i}_j \right) = \sum_{j=1}^3 (\nabla \times \mathbf{F}_j) \mathbf{i}_j = \sum_{j=1}^3 \left\{ \nabla \times \left(\sum_{i=1}^3 F_{ij} \mathbf{i}_i \right) \right\} \mathbf{i}_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \left\{ \sum_{i=1}^3 (\nabla \times F_{ij} \mathbf{i}_i) \right\} \mathbf{i}_j \end{aligned} \quad (4.34)$$

ここで, ベクトル公式

$$\nabla \times F_{ij} \mathbf{i}_i = \nabla F_{ij} \times \mathbf{i}_i \quad (4.35)$$

を用いると、次式が得られる。

$$\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{F}}} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 (\nabla F_{ij} \times \mathbf{i}_i) \mathbf{i}_j \quad (4.36)$$

ダイアディックの回転は、ダイアディックで表される。

4.2.6 ベクトルの勾配

ベクトル関数 \mathbf{F} の勾配 ($\nabla \mathbf{F}$) は、

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{F} &= \nabla \left(\sum_{j=1}^3 F_j \mathbf{i}_j \right) = \left(\sum_{j=1}^3 \nabla F_j \right) \mathbf{i}_j = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial F_j}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial F_j}{\partial x_3} \mathbf{i}_3 \right) \mathbf{i}_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \mathbf{i}_i \right) \mathbf{i}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \end{aligned} \quad (4.37)$$

となり、ダイアディック関数で表される。いま、ダイアディック関数 $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$ が、 $\bar{\bar{\mathbf{F}}} = f \bar{\bar{\mathbf{I}}}$ で定義されているとき、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}} &= \nabla \cdot \left(f \bar{\bar{\mathbf{I}}} \right) = \nabla \cdot \left(f \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i \right) = \sum_{i=1}^3 \nabla \cdot (f \mathbf{i}_i) \mathbf{i}_i = \sum_{i=1}^3 (\nabla f \cdot \mathbf{i}_i) \mathbf{i}_i \\ &= \nabla f \end{aligned} \quad (4.38)$$

また、

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{F}}} &= \nabla \times \left(f \bar{\bar{\mathbf{I}}} \right) = \nabla \times \left(f \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i \right) = \sum_{i=1}^3 \nabla \times (f \mathbf{i}_i) \mathbf{i}_i = \sum_{i=1}^3 (\nabla f \times \mathbf{i}_i) \mathbf{i}_i \\ &= \nabla f \times \bar{\bar{\mathbf{I}}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

4.3 グリーンの定理の導出

4.3.1 ベクトル形式のグリーンの定理

ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} については、次のような発散に関する関係式がある。

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \quad (4.40)$$

いま、ベクトル \mathbf{a} の代わりに \mathbf{F} 、ベクトル \mathbf{b} の代わりに $\nabla \times \mathbf{G}$ を考えると、

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) \quad (4.41)$$

両辺を交換し、体積積分すると、

$$\iiint_V \{(\nabla \times \mathbf{G}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G})\} dV = \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{G}) dV \quad (4.42)$$

ガウスの発散定理 (divergence theorem) を用いて上式の右辺を面積分で表すと、

$$\iiint_V \{(\nabla \times \mathbf{G}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G})\} dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{G}) dS \quad (4.43)$$

これを**ベクトル形式のグリーンの第一定理** (vector Green's theorem of the first kind) という。

4.3.2 ベクトル・ダイアディック形式のグリーンの定理

ベクトル形式のグリーンの第一定理において、3つのベクトル \mathbf{G}_j ($j = 1, 2, 3$) を考えると、

$$\begin{aligned} & \iiint_V \{(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}_j) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}_j)\} dV \\ &= \oint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{G}_j) dS \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4.44)$$

これらを成分とするダイアディク $\bar{\bar{\mathbf{G}}}$ を、

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{G}_j \mathbf{i}_j \quad (4.45)$$

とおくと、ベクトル・ダイアディック形式のグリーンの第一定理が得られ、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \iiint_V \{(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}})\} dV \\ &= \oint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F} \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}) dS \end{aligned} \quad (4.46)$$

また、 \mathbf{F} と \mathbf{G}_j を入れ換えると、

$$\begin{aligned} & \iiint_V \{(\nabla \times \mathbf{G}_j) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{G}_j \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})\} dV \\ &= \oint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{G}_j \times \nabla \times \mathbf{F}) dS \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4.47)$$

ベクトル \mathbf{G}_j が最後になるように変形すると、

$$\begin{aligned} & \iiint_V [(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}_j) - \{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})\} \cdot \mathbf{G}_j] dV \\ &= - \oint_S \mathbf{n} \cdot \{(\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{G}_j\} dS \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4.48)$$

これより、ベクトル形式のグリーンの第二定理 (vector Green's theorem of the second kind), あるいはストラットンの定理 (Stratton's theorem) は

$$\begin{aligned} & \iiint_V [\mathbf{F} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{G}_j - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G}_j] dV \\ &= - \oint_S \mathbf{n} \cdot \{(\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{G}_j + \mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{G}_j\} dS \\ &= - \oint_S \{(\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G}_j + (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \cdot \nabla \times \mathbf{G}_j\} dS \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4.49)$$

これらを成分とするダイアディック $\bar{\mathbf{G}}$ を用いて、

$$\begin{aligned} & \iiint_V [\mathbf{F} \cdot \nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}} - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \bar{\mathbf{G}}] dV \\ &= - \oint_S \{(\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \bar{\mathbf{G}} + (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{G}}\} dS \end{aligned} \quad (4.50)$$

これは、ベクトル・ダイアディック形式のグリーンの第二定理 (vector-dyadic Green's theorem of the second kind) である。

4.3.3 ダイアディック形式のグリーンの定理

さらに、全てダイアディックの表示式を求める。まず、 \mathbf{F}_j ($j = 1, 2, 3$) が最後になるようダイアディックの転置を用いてベクトル・ダイアディック形式のグリーンの第一定理を変形すると、

$$\begin{aligned} & \iiint_V \{(\nabla \times \bar{\mathbf{G}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}_j)^T - (\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}})^T \cdot \mathbf{F}_j\} dV \\ &= \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{F}_j) \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}) dS = \oint_S (\nabla \times \bar{\mathbf{G}})^T \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{F}_j) dS \end{aligned} \quad (4.51)$$

これらを成分とするダイアディック $\bar{\mathbf{F}}$ を、次のようにおく。

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j \mathbf{i}_j \quad (4.52)$$

これより、ダイアディクス形式のグリーンの第一定理 (the dyadic-dyadic Green's theorem of the first kind) は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \iiint_V \{(\nabla \times \bar{\mathbf{G}}) \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{F}})^T - (\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}})^T \cdot \bar{\mathbf{F}}\} dV \\ &= \oint_S (\nabla \times \bar{\mathbf{G}})^T \cdot (\mathbf{n} \times \bar{\mathbf{F}}) dS \end{aligned} \quad (4.53)$$

また、**ダイアディック形式のグリーンの第二定理** (the dyadic-dyadic Green's theorem of the second kind) は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}})^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}} - \bar{\bar{\mathbf{G}}}^T \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{F}}}) \, dV \\ &= - \oint_S \{ \bar{\bar{\mathbf{G}}}^T \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{F}}}) + (\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}})^T \cdot (\mathbf{n} \times \bar{\bar{\mathbf{F}}}) \} \, dS \end{aligned} \quad (4.54)$$

4.4 ダイアディック・グリーン関数の定義

4.4.1 ダイアディック形式の Maxwell の方程式

Maxwell の方程式を電流源 \mathbf{J}_j ($j = 1, 2, 3$), 電荷 ρ_j について示すと,

$$\nabla \times \mathbf{E}_j = -j\omega\mu\mathbf{H}_j \quad (4.55)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_j = \mathbf{J}_j + j\omega\epsilon\mathbf{E}_j \quad (4.56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_j = 0 \quad (4.57)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_j = \frac{\rho_j}{\epsilon} \quad (4.58)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_j = -j\omega\rho_j \quad (4.59)$$

いま、各々のダイアディックおよびベクトルを次式で定義する。

$$\bar{\bar{\mathbf{E}}} \equiv \sum_{j=1}^3 \mathbf{E}_j \mathbf{i}_j = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 E_{ij} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \quad (4.60)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{H}}} \equiv \sum_{j=1}^3 \mathbf{H}_j \mathbf{i}_j = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 H_{ij} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \quad (4.61)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{J}}} \equiv \sum_{j=1}^3 \mathbf{J}_j \mathbf{i}_j = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 J_{ij} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \quad (4.62)$$

$$\boldsymbol{\rho} \equiv \sum_{j=1}^3 \rho_j \mathbf{i}_j \quad (4.63)$$

ただし、 $\boldsymbol{\rho}$ は形式的なベクトル表示である。これより、

$$\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{E}}} = -j\omega\mu\bar{\bar{\mathbf{H}}} \quad (4.64)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{H}}} = \bar{\bar{\mathbf{J}}} + j\omega\epsilon\bar{\bar{\mathbf{E}}} \quad (4.65)$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{H}}} = 0 \quad (4.66)$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{E}}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\epsilon} \quad (4.67)$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{J}}} = -j\omega\boldsymbol{\rho} \quad (4.68)$$

4.4.2 ダイアディック・グリーン関数の定義

点 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ における微小電流素子は,

$$\mathbf{J}_j = c_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{i}_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.69)$$

ここでは, 係数 c_j を

$$-j\omega\mu c_j = 1 \quad (4.70)$$

となるように決めるとき,

$$j\omega\mu \mathbf{J}_j = j\omega\mu c_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{i}_j = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{i}_j \quad (4.71)$$

これより, ダイアディック表示 (dyadic form) では,

$$j\omega\mu \bar{\bar{\mathbf{J}}} = -\sum_{j=1}^3 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j = -\bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.72)$$

このようなダイアディック微小電流素子がある場合の電界 $\bar{\bar{\mathbf{E}}}$ を, **電界に対するダイアディック・グリーン関数** (the dyadic Green function of the electric type or the electric dyadic Green function) $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e$ とする.

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e \equiv \bar{\bar{\mathbf{E}}}(\bar{\bar{\mathbf{I}}}\delta) \quad (4.73)$$

また, このときの磁界 $\bar{\bar{\mathbf{H}}}$ を基に

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_m \equiv -j\omega\mu \bar{\bar{\mathbf{H}}}(\bar{\bar{\mathbf{I}}}\delta) \quad (4.74)$$

より, **磁界に対するダイアディック・グリーン関数** (the dyadic Green function of the magnetic type or the magnetic dyadic Green function) $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_m$ も定義する. 電荷については,

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{J}}}}{-j\omega} = \frac{1}{-j\omega} \nabla \cdot \frac{-\bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{j\omega\mu} = -\frac{1}{\omega^2\mu} \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \quad (4.75)$$

ここで, ダイアディック公式 $\nabla \cdot (f \bar{\bar{\mathbf{I}}}) = \nabla f$ より,

$$\boldsymbol{\rho} = -\frac{\epsilon}{k^2} \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.76)$$

さて, $\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{E}}} = -j\omega\mu \bar{\bar{\mathbf{H}}}$ に, 式 (4.73) の $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e$, および式 (4.74) の $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_m$ を代入すると,

$$\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m \quad (4.77)$$

同様にして, $\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{H}}} = \bar{\bar{\mathbf{J}}} + j\omega\mu \bar{\bar{\mathbf{E}}}$ に, $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e$, $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_m$, および $\bar{\bar{\mathbf{J}}}$ の式を代入すると,

$$\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + k^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e \quad (4.78)$$

さらに, $\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{E}}} = \rho/\epsilon$ に, $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e$, および式 (4.76) の ρ を代入すると,

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e = -\frac{1}{k^2} \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.79)$$

また, $\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{H}}} = 0$ より,

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m = 0 \quad (4.80)$$

これより,

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{j=1}^3 \mathbf{G}_{e,j} \mathbf{i}_j, \quad (4.81)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_m = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{j=1}^3 \mathbf{G}_{m,j} \mathbf{i}_j \quad (4.82)$$

ただし, $\mathbf{G}_{e,j}$, $\mathbf{G}_{m,j}$ は電界および磁界に対するベクトル・グリーン関数 (the vector Green functions of the electric type and the magnetic type) を示す. また, \mathbf{r} は観測点の位置ベクトル, \mathbf{r}' は波源の位置ベクトルを示す.

4.4.3 ダイアディック・グリーン関数の境界条件

境界条件については, 領域 (+), (-) に対して,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(+)} - \mathbf{E}^{(-)}) = 0, \quad (4.83)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(+)} - \mathbf{H}^{(-)}) = \mathbf{J}_s \quad (4.84)$$

ただし, \mathbf{n} は領域 (+) 側を正にとる法線ベクトル, \mathbf{J}_s は境界面上の面電流分布を示す. これを基にして, $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e$ に関する**境界条件** (boundary condition) は次のようになる.

$$\mathbf{n} \times (\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(+)} - \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(-)}) = 0 \quad (4.85)$$

境界面上 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ に微小電流素子をおいた場合, 面電流に関する式はダイアディック表示で,

$$j\omega\mu \bar{\bar{\mathbf{J}}}_s = -(\bar{\bar{\mathbf{I}}} - \mathbf{n}\mathbf{n})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\bar{\bar{\mathbf{I}}}_s\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.86)$$

このとき, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ は 2 次元のデルタ関数である.

$$\iint \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS = 1 \quad (4.87)$$

よって, $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_m$ に関する境界条件は次になる.

$$\mathbf{n} \times (\bar{\bar{\mathbf{G}}}_m^{(+)} - \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m^{(-)}) = \bar{\bar{\mathbf{I}}}_s\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.88)$$

4.5 ダイアディック・グリーン関数を用いた電磁界の積分表示式

次の Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (4.89)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (4.90)$$

から、 \mathbf{E} あるいは \mathbf{H} を消去すると、一様媒質における電界 \mathbf{E} および磁界 \mathbf{H} の満たすべき方程式が得られ、次のようになる。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} \quad (4.91)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - k^2\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} \quad (4.92)$$

ただし、 $k = \sqrt{\mu\epsilon}$ 。一方、ダイアディック・グリーン関数を再記して、

$$\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m \quad (4.93)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m = \bar{\bar{\mathbf{I}}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + k^2\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e \quad (4.94)$$

これらの式より、 $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e$ あるいは $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_m$ を消去すると、一様媒質における電界および磁界に対するダイアディック・グリーン関数 $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e$ 、 $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_m$ の満たすべき方程式が得られ、次のようになる。

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e - k^2\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e = \bar{\bar{\mathbf{I}}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.95)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m - k^2\bar{\bar{\mathbf{G}}}_m = \nabla \times (\bar{\bar{\mathbf{I}}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \quad (4.96)$$

ここで、ベクトル・ダイアディック形式のグリーンの第二定理を再記すると、

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}} \right\} dV \\ &= \iint_S \left\{ (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{n} \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}) - (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}) \right\} dS \end{aligned} \quad (4.97)$$

これより、 $\mathbf{F} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r})$ 、 $\bar{\bar{\mathbf{G}}} \equiv \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ とおくと、

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dV \\ &= \iint_S \left\{ (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot (\mathbf{n} \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right\} dS \end{aligned} \quad (4.98)$$

ここで、 $\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 、 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$ は、

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= k^2\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\bar{\mathbf{I}}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) - j\omega\mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.99)$$

したがって,

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dV \\
&= \iiint_V \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot (k^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) - (k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) - j\omega \mathbf{J}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dV \\
&= \mathbf{E}(\mathbf{r}') + j\omega \mu \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \\
&= \oint_S \left\{ (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot (\mathbf{n} \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right\} dS
\end{aligned} \tag{4.100}$$

次に, ベクトル・ダイアディック形式のグリーンの第二定理の右辺 (the right-hand term of the second vector-dyadic Green's theorem) を変形して,

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \left\{ \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}} \right\} dV \\
&= \oint_S \left\{ \mathbf{F} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}) - (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}} \right\} dS
\end{aligned} \tag{4.101}$$

これより, $\mathbf{F} \equiv \mathbf{H}(\mathbf{r})$, $\bar{\bar{\mathbf{G}}} \equiv \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ とおくと, 上式の左辺は,

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dV \\
&= \oint_S \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dS
\end{aligned} \tag{4.102}$$

ここで, $\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})$ は,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= k^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{4.103}$$

これより, 式 (4.102) の左辺は,

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dV \\
&= \iiint_V \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot (k^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) - (k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dV \\
&= \mathbf{H}(\mathbf{r}') - \iiint_V (\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV
\end{aligned} \tag{4.104}$$

式 (4.104) の第 2 項の積分は, ダイアディック公式

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \bar{\bar{\mathbf{b}}}) = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{b}}} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{b}}}) \tag{4.105}$$

を用いると,

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \\ &= \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dV + \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \end{aligned} \quad (4.106)$$

ダイアディックの発散定理 (dyadic divergence theorem) より, 上式の第1項の体積積分は面積積分に次のように変換できる.

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dV &= \oint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dS \\ &= \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{J}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS \end{aligned} \quad (4.107)$$

したがって,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}') - \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{J}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS - \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \\ = \oint_S \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dS \end{aligned} \quad (4.108)$$

あるいは,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}') - \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \\ = \oint_S \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dS \end{aligned} \quad (4.109)$$

これより, 電界および磁界に関する式は, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}') &= -j\omega\mu \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \\ &+ \oint_S \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n} \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right\} dS \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}') &= \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \\ &+ \oint_S \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - j\omega\epsilon(\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dS \end{aligned} \quad (4.111)$$

4.6 自由空間中のダイアディック・グリーン関数の導出

4.6.1 自由空間のスカラー・グリーン関数

自由空間中のダイアディック・グリーン関数 (free-space dyadic Green functions) を導出しよう。まず、 $\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m$ の両辺の回転をとると。

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e = \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m \quad (4.112)$$

上式の右辺は、

$$\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + k^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e \quad (4.113)$$

よって、

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e - k^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.114)$$

同様にして、 $\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + k^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e$ の両辺の回転をとると。

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m = \nabla \times (\bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) + k^2 \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e \quad (4.115)$$

これに、 $\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m$ を代入して、

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m - k^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m = \nabla \times (\bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \quad (4.116)$$

さて、 $-j\omega\mu\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{i}_j$ による電界 $\mathbf{E}_{0,j}(\mathbf{r})$ は、

$$\mathbf{E}_{0,j}(\mathbf{r}) = -j\omega \left(\mathbf{A} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} \right) \quad (4.117)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mu \int_V G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) dV_0 = \mu \int_V G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}')}{-j\omega\mu} \mathbf{i}_j dV_0 \\ &= \frac{1}{-j\omega} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{i}_j \end{aligned} \quad (4.118)$$

よって、

$$\mathbf{E}_{0,j}(\mathbf{r}) = \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{i}_j \quad (4.119)$$

4.6.2 自由空間の電界に対するダイアディック・グリーン関数

自由空間の電界に対するダイアディック・グリーン関数 $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}$ は、

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0} &= \sum_{j=1}^3 \mathbf{E}_{0,j} \mathbf{i}_j = \sum_{j=1}^3 \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \mathbf{G}_{e0,j} \mathbf{i}_j \end{aligned} \quad (4.120)$$

ただし、 $\mathbf{G}_{e0,j}$ は x_j 方向 ($j = 1, 2, 3$) に沿う波源による電界に対する自由空間のベクトル・グリーン関数 (the free-space vector Green function of the electric type due to a source pointed in the x_j -direction ($j = 1, 2, 3$)) を示す。また、 G_0 は**自由空間のスカラー・グリーン関数** (the free-space scalar Green function) を示し、次のようになる。

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (4.121)$$

ダイアディック公式 $\nabla \cdot (f \bar{\mathbf{I}}) = \nabla f$ などによりさらに変形すると、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_{e0} &= G_0 \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j + \frac{1}{k^2} \nabla \sum_{j=1}^3 \nabla \cdot G_0 \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j = G_0 \bar{\mathbf{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot (G_0 \bar{\mathbf{I}}) \\ &= \left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (4.122)$$

4.6.3 自由空間の磁界に対するダイアディック・グリーン関数

自由空間の磁界に対するダイアディック・グリーン関数 (the free-space magnetic dyadic Green function) $\bar{\mathbf{G}}_{m0}$ は、

$$\bar{\mathbf{G}}_{m0} = \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{e0} = \nabla \times \left[\left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) G_0 \right] \quad (4.123)$$

ベクトル公式 $\nabla \times (\nabla f_j) = 0$ より、ダイアディックの場合も同様に成り立ち、

$$\nabla \times \nabla (\nabla G_0) = 0 \quad (4.124)$$

となる。よって、

$$\bar{\mathbf{G}}_{m0} = \nabla \times \left(\bar{\mathbf{I}} G_0 \right) \quad (4.125)$$

さらに、ダイアディック公式

$$\nabla \times (a \bar{\mathbf{b}}) = a \nabla \times \bar{\mathbf{b}} + (\nabla a) \times \bar{\mathbf{b}} \quad (4.126)$$

より、

$$\bar{\mathbf{G}}_{m0} = G_0 \nabla \times \bar{\mathbf{I}} + (\nabla G_0) \times \bar{\mathbf{I}} = \left(\nabla G_0 \right) \times \bar{\mathbf{I}} \quad (4.127)$$

4.7 自由空間中のダイアディック・グリーン関数の対称性

自由空間中のダイアディック・グリーン関数 $\bar{\mathbf{G}}_{e0}$, $\bar{\mathbf{G}}_{m0}$ は、先に示したように、

$$\bar{\mathbf{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (4.128)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_{m0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \left(\bar{\mathbf{I}} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \quad (4.129)$$

あるいは,

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \bar{\bar{\mathbf{I}}} \quad (4.130)$$

ここで, $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は自由空間中のスカラ・グリーン関数を示し,

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} = G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (4.131)$$

ただし,

$$R \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2} \quad (4.132)$$

ます,

$$\begin{aligned} \nabla G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \nabla G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{\partial G_0}{\partial R} \nabla R = \frac{\partial G_0}{\partial R} (-\nabla' R) \\ &= -\nabla' G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.133)$$

ただし,

$$\nabla R = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{R} = -\nabla' R \quad (4.134)$$

さらに,

$$\begin{aligned} \nabla \nabla G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\nabla \nabla' G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{\partial G_0}{\partial R} (\nabla' R) \right) = \nabla' \left(\frac{\partial G_0}{\partial R} (\nabla' R) \right) \\ &= \nabla' \nabla' G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.135)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \nabla' \nabla R &= \nabla' \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{R} \right) = -\nabla \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{R} \right) \\ &= -\nabla \nabla R \end{aligned} \quad (4.136)$$

さて, $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ において, \mathbf{r} , \mathbf{r}' を交換すると,

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \left(\bar{\bar{\mathbf{I}}} + \frac{1}{k^2} \nabla' \nabla' \right) G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (4.137)$$

ここで, $\nabla \nabla G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla' \nabla' G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ より,

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= \left(\bar{\bar{\mathbf{I}}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (4.138)$$

転置をとると,

$$\begin{aligned} \left(\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}', \mathbf{r})\right)^T &= \left\{ \left(\bar{\bar{\mathbf{I}}} + \frac{1}{k^2} \nabla' \nabla' \right) G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right\}^T \\ &= \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.139)$$

ただし, $(\bar{\bar{\mathbf{I}}})^T = \bar{\bar{\mathbf{I}}}$. また,

$$\begin{aligned} \left(\nabla' \nabla' G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})\right)^T &= \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 G_0}{\partial x'_i \partial x'_j} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \right)^T \\ &= \nabla' \nabla' G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.140)$$

これより, 次のように $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}$ についての**対称性** (symmetrical property) が得られる.

$$\left(\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}', \mathbf{r})\right)^T = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (4.141)$$

次に, $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ についても \mathbf{r}, \mathbf{r}' を交換し, 式 (4.129) より,

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= \nabla' \times \left(\bar{\bar{\mathbf{I}}} G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right) = \nabla' G_0 \times \bar{\bar{\mathbf{I}}} = -\nabla G_0 \times \bar{\bar{\mathbf{I}}} = -\nabla \times \left(\bar{\bar{\mathbf{I}}} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \\ &= -\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (4.142)$$

ここで, ダイアディクス公式 $(\mathbf{a} \times \bar{\bar{\mathbf{F}}})^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{b}}} = -\bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \cdot (\mathbf{a} \times \bar{\bar{\mathbf{b}}})$ より,

$$\begin{aligned} (\nabla' G_0 \times \bar{\bar{\mathbf{I}}})^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{I}}} &= -\bar{\bar{\mathbf{I}}}^T \cdot (\nabla' G_0 \times \bar{\bar{\mathbf{I}}}) \\ (\nabla' G_0 \times \bar{\bar{\mathbf{I}}})^T &= -\nabla' G_0 \times \bar{\bar{\mathbf{I}}} \end{aligned} \quad (4.143)$$

また, $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}$ の転置は, 式 (4.130) より,

$$\begin{aligned} \left(\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}(\mathbf{r}', \mathbf{r})\right)^T &= \left(\nabla' G_0 \times \bar{\bar{\mathbf{I}}}\right)^T = -\nabla' G_0 \times \bar{\bar{\mathbf{I}}} \\ &= -\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.144)$$

したがって, 次のように $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}$ についての対称性が得られる.

$$\left(\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}(\mathbf{r}', \mathbf{r})\right)^T = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (4.145)$$

4.8 自由空間中のダイアディック・グリーン関数による電磁界

一様媒質の自由空間において, 散乱体がなく, 電流源 \mathbf{J} のみがある場合, ダイアディック・グリーン関数を用いた電磁界の表示式の積分範囲 V は無限空間にとり, 面積分は無限

遠ゆえ放射条件よりゼロとなる。したがって、電界 \mathbf{E} および磁界 \mathbf{H} は、自由空間のダイアディック・グリーン関数 $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を用いた体積積分の項のみで表され、次のようなになる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = -j\omega\mu \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \quad (4.146)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV = \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \quad (4.147)$$

いま、 \mathbf{r} と \mathbf{r}' を交換すると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dV' \quad (4.148)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dV' = \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dV' \quad (4.149)$$

ダイアディックのスカラ積の性質より、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iiint_V (\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}', \mathbf{r}))^T \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (4.150)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \iiint_V (\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}(\mathbf{r}', \mathbf{r}))^T \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (4.151)$$

自由空間中のダイアディック・グリーン関数 (the free-space dyadic Green functions) の**対称性** (symmetrical property) より、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iiint_V \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (4.152)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \iiint_V \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{m0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' = \iiint_V \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (4.153)$$

4.9 第1種および第2種ダイアディック・グリーン関数

4.9.1 第1種電界型ダイアディック・グリーン関数 (完全導体)

積分領域 V を、面 S_d と面 S_∞ に囲まれた領域にとり、面 S_∞ を無限遠とすると、面積分の項は、面 S_∞ 上の積分が放射条件によりゼロとなり、面 S_d のみとなる。さらに、面 S_d で次のような境界条件を満たすグリーン関数を**第1種電界型グリーン関数** (electric dyadic Green function of the first kind) といい、 $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e1}$ とおくと、

$$\mathbf{n} \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (\text{on } S_d) \quad (4.154)$$

これより,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = -j\omega\mu \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV - \iint_{S_d} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dS \quad (4.155)$$

いま、面 S_d が完全導体の場合、電界の境界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ (on S_d) より、面 S_d 上の面積分は完全にゼロとなり、電界 \mathbf{E} は次のようになる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = -j\omega\mu \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \quad (4.156)$$

グリーン関数の対称性などを用いれば、次式が得られる（導出省略）。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iiint_V \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (4.157)$$

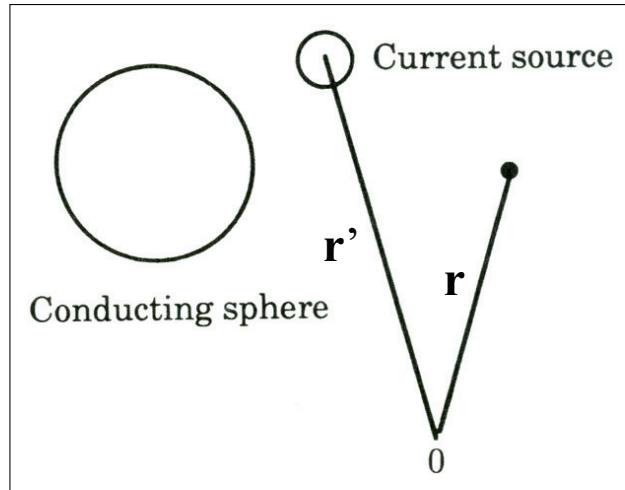


図 4.1. 完全導体による散乱問題 (case A)

4.9.2 第1種電界型ダイアディック・グリーン関数（開口面）

また、別の問題として、領域 V には電流源がなく、 S_d 内部に電流源があり、面 S_d の一部に開口 S_A がある場合、体積積分の項がゼロとなり、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = - \iint_{S_A} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dS \quad (4.158)$$

波源は円筒内部にあり、開口 S_A 上の電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ より、磁気的な等価電流 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}$ を考えればよい。

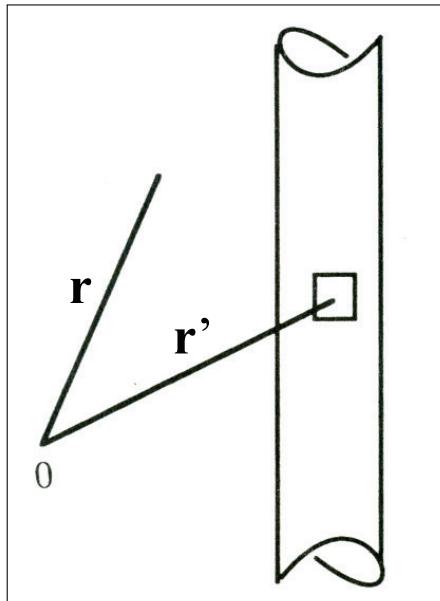


図 4.2. 完全導体表面の開口面からの放射 (case B)

4.9.3 第2種電界型ダイアディック・グリーン関数

面 S_d で次のような境界条件を満たすグリーン関数は**第2種グリーン関数** (electric dyadic Green function of the second kind) といい, $\bar{\bar{G}}_{e2}$ とおくと,

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (\text{on } S_d) \quad (4.159)$$

これより,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV - j\omega\epsilon \oint_{S_d} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{G}}_{e2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS \quad (4.160)$$

いま, 面 S_d が完全導体の場合, 電界の境界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ (on S_d) より, 面 S_d 上の面積分は完全にゼロとなり, 磁界 \mathbf{H} は次のようになる.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \quad (4.161)$$

また, 別の問題として, 領域 V には電流源がなく, S_d 内部に電流源があり, 面 S_d の一部に開口 S_A がある場合, 体積積分の項がゼロとなり,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = -j\omega\epsilon \oint_{S_A} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{G}}_{e2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS \quad (4.162)$$

4.9.4 第1種および第2種磁界型ダイアディック・グリーン関数

第1種グリーン関数の境界条件を、磁界に対するダイアディック・グリーン関数に適用したものと $\bar{\bar{G}}_{m1}$ とすると、

$$\mathbf{n} \times \bar{\bar{G}}_{m1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (\text{on } S_d) \quad (4.163)$$

電界および磁界に対するダイアディック・グリーン関数 $\bar{\bar{G}}_e$, $\bar{\bar{G}}_m$ との関係式 $\nabla \times \bar{\bar{G}}_e = \bar{\bar{G}}_m$ より、上式に対応するのは、

$$\mathbf{n} \times (\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = 0 \quad (\text{on } S_d)$$

これを、**ダイアディック Neumann 境界条件** (dyadic Neumann boundary condition) という。よって、

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e2} = \bar{\bar{G}}_{m1} \quad (4.164)$$

また、第2種グリーン関数の境界条件を、磁界に対するダイアディック・グリーン関数に適用したものを $\bar{\bar{G}}_{m2}$ とすると、

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (\text{on } S_d) \quad (4.165)$$

電界および磁界に対するダイアディック・グリーン関数 $\bar{\bar{G}}_e$, $\bar{\bar{G}}_m$ との関係式 $\nabla \times \bar{\bar{G}}_m = \bar{\bar{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + k^2 \bar{\bar{G}}_e$ より、

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m2} = \bar{\bar{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + k^2 \bar{\bar{G}}_{e1} \quad (4.166)$$

ただし、

$$\nabla \cdot \bar{\bar{G}}_{m2} = 0 \quad (4.167)$$

4.10 第3種ダイアディック・グリーン関数

4.10.1 異なる媒質の一方に電流源がある場合のダイアディック・グリーン関数

図に示すように、異なる媒質におけるダイアディック・グリーン関数は、観測点 \mathbf{r} および波源 \mathbf{r}' のある領域を肩文字に記して、 $\bar{\bar{G}}_e^{(11)}$, $\bar{\bar{G}}_e^{(12)}$, $\bar{\bar{G}}_e^{(21)}$, $\bar{\bar{G}}_e^{(22)}$, $\bar{\bar{G}}_m^{(11)}$, $\bar{\bar{G}}_m^{(12)}$, $\bar{\bar{G}}_m^{(21)}$, $\bar{\bar{G}}_m^{(22)}$ で表される。これらを第3種ダイアディック・グリーン関数 (the dyadic Green functions of the third kind) という。このとき、第1, 2種の添え字1, 2に対応するものは通常、省略される。

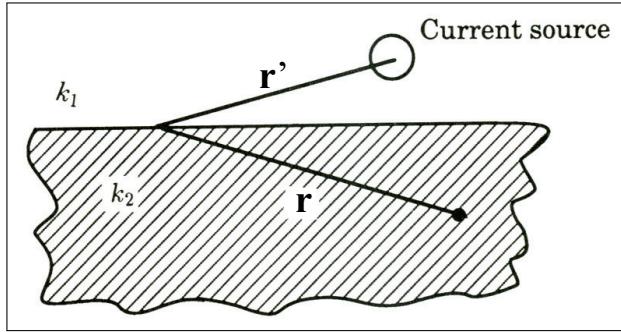


図 4.3. 異なる媒質の一方に電流源がある境界値問題 (case C)

波源が領域 #1 にある場合、電磁界の満たすべき方程式は次のようにになる。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) - k_1^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_1 \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \quad (4.168)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) - k_2^2 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.169)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) - k_1^2 \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \quad (4.170)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) - k_2^2 \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.171)$$

あるいは、波源が領域 #2 にある場合、電磁界の満たすべき方程式は次のようになる。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) - k_1^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.172)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) - k_2^2 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_2 \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) \quad (4.173)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) - k_1^2 \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.174)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) - k_2^2 \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) \quad (4.175)$$

媒質の異なる 2 つの領域があって、一方に電流源がある問題について考える。まず、観測点 \mathbf{r} を領域 #1、電流源のある点 \mathbf{r}' も領域 #1 においてときの電界に対するダイアディック・グリーン関数を $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ とすると、満たすべき方程式は次のようになる。

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_1^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{region } \#1) \quad (4.176)$$

観測点 \mathbf{r} を領域 #2、電流源の位置 \mathbf{r}' を領域 #1 とした $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は、

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_2^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (\text{region } \#2) \quad (4.177)$$

同様にして、観測点 \mathbf{r} を領域 #1、電流源の位置 \mathbf{r}' を領域 #2 とした $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は、

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_1^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (\text{region } \#1) \quad (4.178)$$

観測点 \mathbf{r} を領域 #2、電流源の位置 \mathbf{r}' を領域 #2 とした $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は、

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_2^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{region } \#2) \quad (4.179)$$

ここで、ベクトル・ダイアディック形式のグリーンの第二定理を再記して、

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}} \right\} dV \\ &= \iint_S \left\{ \mathbf{F} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}) - (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}} \right\} dS \end{aligned} \quad (4.180)$$

4.10.2 電流源のある領域 #1 について

領域 #1 に電流源 \mathbf{J}_1 がある場合のその領域 #1 の電界を \mathbf{E}_1 とおくと、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) - k_1^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_1 \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \quad (4.181)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_1^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \bar{\bar{\mathbf{I}}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.182)$$

これより、 $\mathbf{F} \equiv \mathbf{E}_1(\mathbf{r})$, $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e \equiv \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ として、領域 #1 (V_1 とおく) においてベクトル・ダイアディック形式のグリーンの第二定理を用いると、

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_1(\mathbf{r}') + j\omega\mu_1 \iiint_{V_1} \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \\ &= - \iint_{S_i} \left\{ (\mathbf{n}_1 \times \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right\} dS \end{aligned} \quad (4.183)$$

ただし、積分範囲 V_1 は領域 #1 にとり、この領域を囲む面は、無限遠と領域 #1, #2 の境界面からなり、無限遠での積分が放射条件よりゼロとなるので、上式の面 S_i は領域 #1, #2 の境界面を示す。また、法線ベクトル \mathbf{n}_1 は、面 S_i の法線方向で領域 #2 を向く方向を正にとる。

領域 #1 に電流源 \mathbf{J}_1 がある場合の領域 #2 の電界を \mathbf{E}_2 とおき、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) - k_2^2 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.184)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_2^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (4.185)$$

同様にして、 $\mathbf{F} \equiv \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$, $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e \equiv \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ として、領域 #2 (V_2 とおく) においてベクトル・ダイアディック形式のグリーンの第二定理を用いると、

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_2} \left\{ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dV \\ &= \iiint_{V_2} \left\{ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot k_2^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_2^2 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dV = 0 \\ &= - \iint_{S_i} \left\{ (\mathbf{n}_2 \times \nabla \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right\} dS \end{aligned} \quad (4.186)$$

ここで、領域 #1, #2 の境界条件

$$\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_2(\mathbf{r})) = 0 \quad (4.187)$$

$$\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{r})) = 0 \quad (4.188)$$

より、

$$\mathbf{n}_1 \times (\bar{\mathbf{G}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \bar{\mathbf{G}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = 0 \quad (4.189)$$

$$\mathbf{n}_1 \times \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) = 0 \quad (4.190)$$

ただし、

$$\nabla \times \mathbf{E}_{(1)}(\mathbf{r}) = -j\omega \mu_{(1)}(\mathbf{r}) \mathbf{H}_{(1)}(\mathbf{r}) \quad (4.191)$$

これより、境界面 S_i での面積分は等しくゼロになるので、

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}') + j\omega \mu_1 \int_{V_1} \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV = 0 \quad (4.192)$$

よって、

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}') = -j\omega \mu_1 \int_{V_1} \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \quad (4.193)$$

4.10.3 電流源のない領域 #2 について

一方、 \mathbf{E}_2 については、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) - k_1^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = -j\omega \mu_1 \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \quad (4.194)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_1^2 \bar{\mathbf{G}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (4.195)$$

そして、 $\mathbf{F} \equiv \mathbf{E}_1(\mathbf{r})$, $\bar{\mathbf{G}}_e \equiv \bar{\mathbf{G}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ とし、領域 #1 においてベクトル・ダイアディック形式のグリーンの第二定理を用いると、

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_1} \left\{ \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r})) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dV \\ &= \iiint_{V_1} \left\{ \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot k_1^2 \bar{\mathbf{G}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - (k_1^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) - j\omega \mu_1 \mathbf{J}_1(\mathbf{r})) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dV \\ &= j\omega \mu_1 \iiint_{V_1} \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \\ &= - \iint_{S_i} \left\{ (\mathbf{n}_1 \times \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r})) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right\} dS \end{aligned} \quad (4.196)$$

また,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) - k_2^2 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.197)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_2^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.198)$$

同様にして, $\mathbf{F} \equiv \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$, $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e \equiv \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ として, 領域 #2 においてベクトル・ダイアディック形式のグリーンの第二定理を用いると,

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_2} \left\{ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dV \\ &= \iiint_{V_2} \left\{ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot (k_2^2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\bar{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) - k_2^2 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dV \\ &= \mathbf{E}_2(\mathbf{r}') \\ &= - \iint_{S_i} \left\{ (\mathbf{n}_2 \times \nabla \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right\} dS \end{aligned} \quad (4.199)$$

よって,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}') &= - \iint_{S_i} \left\{ (\mathbf{n}_1 \times j\omega\mu_2 \mathbf{H}_2(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n}_1 \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right\} dS \end{aligned} \quad (4.200)$$

ただし,

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 \quad (4.201)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_2 \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \quad (4.202)$$

領域 #1, #2 の境界条件より,

$$\mathbf{n}_1 \times (\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = 0 \quad (4.203)$$

$$\mathbf{n}_1 \times \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) = 0 \quad (4.204)$$

これより,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}') &= - \iint_{S_i} \left\{ (\mathbf{n}_1 \times j\omega\mu_2 \mathbf{H}_1(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n}_1 \times \frac{\mu_2}{\mu_1} \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right\} dS \\ &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \iint_{S_i} \left\{ (\mathbf{n}_1 \times \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r})) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right\} dS \end{aligned} \quad (4.205)$$

よって、式(4.196)より、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_2(\mathbf{r}') &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(-j\omega\mu_1 \iiint_{V_1} \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \right) \\ &= -j\omega\mu_2 \iiint_{V_1} \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV\end{aligned}\quad (4.206)$$

4.10.4 領域 #2 に電流源がある場合

同様にして、領域 #2 に電流源 \mathbf{J}_2 がある場合は、1 と 2 を入れ換えて、

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}') = -j\omega\mu_2 \iiint_{V_2} \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \quad (4.207)$$

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}') = -j\omega\mu_1 \iiint_{V_2} \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \quad (4.208)$$

4.10.5 第3種ダイアディック・グリーン関数の対称性

第3種電界型ダイアディック・グリーン関数の対称性は、次のようになる（導出省略）。

$$\frac{1}{\mu_2} \left(\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right)^T = \frac{1}{\mu_1} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (4.209)$$

また、第3種磁界型ダイアディック・グリーン関数の対称性は、次のようになる（導出省略）。

$$\frac{1}{k_2^2} \left(\nabla' \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right)^T = \frac{1}{k_1^2} \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (4.210)$$

第3種グリーン関数の対称性などを用いれば、次式が得られる（導出省略）。

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_1 \iiint_{V_1} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(11)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_1(\mathbf{r}') dV' \quad (4.211)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_2 \iiint_{V_1} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(21)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_1(\mathbf{r}') dV' \quad (4.212)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_2 \iiint_{V_2} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(22)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') dV' \quad (4.213)$$

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_1 \iiint_{V_2} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_e^{(12)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') dV' \quad (4.214)$$

CHAPTER 5

モーメント法

モーメント法は、電磁界の問題を線形代数方程式に帰着させることにより、効率的な数値解析を可能とする手法である。特に、導体や誘電体による電磁波の散乱解析、アンテナの放射特性評価、および積分方程式の数値解法など、広範な応用がなされている。ここでは、まずモーメント法の基礎となる線形空間と線形演算子の概念、および重み付き残差法の考え方から出発し、マトリクス方程式の導出手順を解説する。次に、ガラーキン法やグリーン関数の導入を経て、線状導体の散乱問題への応用例を示す。さらに、RWG 基底関数を用いた複雑な構造体の解析手法についても述べ、最後に、導体・誘電体複合構造に適用されるPMCHWT 積分方程式についても取り上げ、体系的に解説する。

5.1 モーメント法とは

5.1.1 線形空間と演算子

線形作用素あるいは演算子 (linear operator) を L , 既知の強制関数 (known forcing function) を g , 未知関数を f として,

$$L(f) = g \quad (5.1)$$

で表される場合を考える。まず、内積 (inner product) $\langle f, g \rangle$ あるいはモーメント (moment) は次の関係を満足する。

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \quad (5.2)$$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \quad (5.3)$$

$$\langle f^*, f \rangle \begin{cases} > 0 & (f \neq 0) \\ = 0 & (f = 0) \end{cases} \quad (5.4)$$

ただし, α, β はスカラー, $*$ は複素共役を示す. また, 随伴作用素 (adjoint operator) L^a は次式によって定義される.

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^a g \rangle \quad (5.5)$$

ここで, $L^a = L$ なら作用素は自己随伴 (self-adjoint) であるという. f が実数ならば, Lf もまた実数である. f が実数あるいは複素数のとき, $\langle f^*, Lf \rangle > 0$ ($f \neq 0$) なら演算子は正定値 (positive definite), $\langle f^*, Lf \rangle \geq 0$ ($f \neq 0$) なら半正定値 (positive semidefinite), $\langle f^*, Lf \rangle < 0$ ($f \neq 0$) なら負定値 (negative definite) であるという. いま, 任意の g に対して $L(f) = g$ の解 f が唯一決まるとき, 逆作用素 (inverse operator) L^{-1} より,

$$f = L^{-1}(g) \quad (5.6)$$

例えば, 変域 $0 \leq x \leq 1$ において定義される $g(x)$, $f(x)$ について,

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} = g(x) \quad (5.7)$$

$$f(0) = f(1) = 0 \quad (5.8)$$

とする境界値問題を考えよう. 演算子 L は,

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} \quad (5.9)$$

これより, 与式は,

$$L(f) = g(x) \quad (5.10)$$

この問題における内積 (inner product) $\langle f, g \rangle$ は, 例えば,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (5.11)$$

あるいは,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 w(x)f(x)g(x)dx \quad (5.12)$$

ただし, $w(x) > 0$ は任意の重み関数 (arbitrary weighting function) を示す. 式 (5.11) より, 式 (5.10) と g の内積は,

$$\langle Lf, g \rangle = \int_0^1 L(f)g(x)dx = \int_0^1 \left(-\frac{d^2 f}{dx^2} \right) g dx \quad (5.13)$$

部分積分して,

$$\langle Lf, g \rangle = \left[\left(-\frac{df}{dx} \right) g \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{df}{dx} \right) \frac{dg}{dx} dx = - \left[\frac{df}{dx} g \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{df}{dx} \frac{dg}{dx} dx \quad (5.14)$$

上式の第 2 項をさらに部分積分して,

$$\int_0^1 \frac{df}{dx} \frac{dg}{dx} dx = \left[f \frac{dg}{dx} \right]_0^1 - \int_0^1 f \frac{d^2 g}{dx^2} dx \quad (5.15)$$

これより, 式 (5.14) の内積は,

$$\begin{aligned} \langle Lf, g \rangle &= - \left[\frac{df}{dx} g \right]_0^1 + \left(\left[f \frac{dg}{dx} \right]_0^1 - \int_0^1 f \frac{d^2 g}{dx^2} dx \right) \\ &= \int_0^1 f \left(-\frac{d^2 g}{dx^2} \right) dx + \left[f \frac{dg}{dx} - \frac{df}{dx} g \right]_0^1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

上式の第 2 項は, 境界条件の項である. いま,

$$g(0) = g(1) = 0 \quad (5.17)$$

のとき, この項はゼロになり,

$$\begin{aligned} \langle Lf, g \rangle &= \int_0^1 f \left(-\frac{d^2 g}{dx^2} \right) dx \\ &= \langle f, L^a g \rangle \end{aligned} \quad (5.18)$$

このとき,

$$L = L^a = -\frac{d^2}{dx^2} \quad (5.19)$$

ゆえ, この作用素は自己随伴である. また,

$$\begin{aligned} \langle f^*, Lf \rangle &= \int_0^1 f^* \left(-\frac{d^2 f}{dx^2} \right) dx = \left[f^* \left(-\frac{df}{dx} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{df^*}{dx} \left(-\frac{df}{dx} \right) dx = \int_0^1 \frac{df^*}{dx} \frac{df}{dx} dx \\ &= \int_0^1 \left| \frac{df}{dx} \right|^2 dx \end{aligned} \quad (5.20)$$

したがって, f が複素数であっても L は正定値である.

5.1.2 重み付き残差法

電磁界解析では, L は**微積分演算子** (integro-differential operator), g は既知の駆動関数 (known driving function), 例えば, 与えられた入射波, f は解くべき未知電流などである. ここでは, f を**基底関数** (basis functions) f_n で次のように展開する.

$$f \simeq \sum_{n=1}^N a_n f_n \equiv \bar{f} \quad (5.21)$$

ただし, a_n は未知係数 (unknown coefficients) を示す. \bar{f} は f の近似解ゆえ, 次のように残差 R が生じる.

$$R = g - L(\bar{f}) = g - \sum_{n=1}^N a_n L(f_n) \quad (5.22)$$

この残差 R に重みをかけて領域全体で積分したものがゼロになるように,

$$\int w_m R d\Omega = \int w_m \left\{ g - L(\bar{f}) \right\} d\Omega = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (5.23)$$

とし, 未知定数 a_n ($n = 1, 2, \dots, N$) を定める方法が**重み付き残差法** (method of weighted residuals) である. ただし, w_m は重み関数 (weighting function) を示す.

5.1.3 マトリクス方程式

演算子 L は線形ゆえ,

$$L(\bar{f}) = \sum_{n=1}^N a_n L(f_n) \quad (5.24)$$

これより, 式 (5.23) は,

$$\int w_m \left\{ g - \sum_{n=1}^N a_n L(f_n) \right\} d\Omega = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (5.25)$$

あるいは,

$$\sum_{n=1}^N a_n \int w_m L(f_n) d\Omega = \int w_m g d\Omega \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (5.26)$$

内積を式 (5.11) のように表すと,

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, L f_n \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (5.27)$$

これは次のように行列表示できる.

$$[Z] \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (5.28)$$

ここで, $[Z]$ は $N \times N$ 正方行列で,

$$[Z] = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \\ z_{N1} & z_{N2} & \cdots & z_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle w_1, L f_1 \rangle & \langle w_1, L f_2 \rangle & \cdots & \langle w_1, L f_N \rangle \\ \langle w_2, L f_1 \rangle & \langle w_2, L f_2 \rangle & \cdots & \langle w_2, L f_N \rangle \\ \vdots & \vdots & & \\ \langle w_N, L f_1 \rangle & \langle w_N, L f_2 \rangle & \cdots & \langle w_N, L f_N \rangle \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

行列要素 z_{mn} は,

$$z_{mn} = \int w_m L(f_n) d\Omega = \langle w_m, Lf_n \rangle \quad (5.30)$$

また, 列ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} は,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \vdots \\ \langle w_N, g \rangle \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

列ベクトルの要素 b_m は,

$$b_m = \int w_m g d\Omega = \langle w_m, g \rangle \quad (5.32)$$

行列 $[Z]$ の逆行列 $[Z]^{-1}$ が存在する場合,

$$\mathbf{a} = [Z]^{-1} \mathbf{b} \quad (5.33)$$

これより, \bar{f} は,

$$\bar{f} = \sum_{n=1}^N a_n f_n = \mathbf{f}_T \mathbf{a} = \mathbf{f}_T [Z]^{-1} \mathbf{b} \quad (5.34)$$

ここで, \mathbf{f}_T は \mathbf{f} の転置を示し,

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

基底関数については, **区分的基底関数** (local or subsectional basis functions) と **全領域基底関数** (global or entire-domain basis functions) があり, スカラーだけでなくベクトルで表される場合もある. また, 積分の次元については, 線状素子の散乱問題などは 1 次元の線積分, 境界面上の等価波源に対する問題では 2 次元の面積分, 分布波源に対する電磁波問題では 3 次元の体積積分となる. 電磁界解析の分野では, このように線形代数方程式に変換して行列計算によって統一的に解く方法の総称を **モーメント法** (method of moments: MoM) と呼んでいる^{*1}. このとき, 重み関数は, **試行関数** (testing function) ともいう. 現在で

^{*1} 次のような文献で電磁界の積分方程式の解法として有効であることが示され, 有名になった.

- Roger F. Harrington, “Matrix Methods for field problems,” Proc. of IEEE, vol.55, no.2, pp.136-149 (1967), doi: 10.1109/PROC.1967.5433.
- Roger F. Harrington, “Field Computation by Moment Methods,” Chapter 4. Wire antennas and scatters, Wiley-IEEE Press (1993), ISBN-13: 978-0780310148.
- “Method of Moments in Antennas and Scattering,” R. C. Hansen, Editor, Artech House (1990), ISBN-13: 978-0890064665.

は、電磁界が満足する積分方程式を求めてこのように計算する方法を単に、**積分方程式法** (integral equation methods) ともいう。

5.2 ガラーキン法

試行関数として基底関数と同じ関数を用いた方法は**ガラーキン法** (method of Galerkin) といい、よく用いられる方法である。

$$w_m(\mathbf{r}) = f_m(\mathbf{r}) \quad (5.36)$$

問題

変域 $0 \leq x \leq 1$ において定義される $f(x)$ に関する境界値問題

$$-\frac{d^2f}{dx^2} = 1 + 4x^2 \quad (5.37)$$

$$f(0) = f(1) = 0 \quad (5.38)$$

において、(a) 解析的な解、(b) ガラーキン法を用いた場合のモーメント法のマトリクス方程式を求めよ。

解答

(a) 与式の両辺を x で不定積分すると、

$$\begin{aligned} \int -\frac{d^2f}{dx^2} dx &= \int (1 + 4x^2) dx \\ \therefore -\frac{df}{dx} &= x + \frac{4}{3}x^3 + C_1 \end{aligned} \quad (5.39)$$

ただし、 C_1 は積分定数を示す。さらに、上式の両辺を x で不定積分すると、

$$\begin{aligned} \int -\frac{df}{dx} dx &= \int \left(x + \frac{4}{3}x^3 + C_1 \right) dx \\ \therefore f(x) &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} - C_1 x - C_2 \end{aligned} \quad (5.40)$$

ただし、 C_1 は積分定数を示す。 C_1, C_2 は境界条件より決定され、

$$f(0) = -C_2 = 0 \quad (5.41)$$

$$f(1) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - C_1 = 0 \quad (5.42)$$

これより、

$$C_1 = -\frac{5}{6}, \quad C_2 = 0 \quad (5.43)$$

よって,

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{5}{6}x \quad (5.44)$$

解答

(b) まず, 境界条件を満足する基底関数 f_n

$$f_n = x - x^{n+1} \quad (5.45)$$

を考え, 解くべき未知関数 f の近似値を次のように展開して表す.

$$\bar{f} = \sum_{n=1}^N a_n f_n = \sum_{n=1}^N a_n (x - x^{n+1}) \quad (5.46)$$

ガラーキン法より, 試行関数 w_m は,

$$w_m = f_m = x - x^{m+1} = x(1 - x^m) \quad (5.47)$$

よって, ガラーキン法を用いたマトリクス方程式は,

$$[Z]\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (5.48)$$

ここで, $[Z]$ は $N \times N$ 正方行列で,

$$\begin{aligned} [Z] &= \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \\ z_{N1} & z_{N2} & \cdots & z_{NN} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle f_1, Lf_1 \rangle & \langle f_1, Lf_2 \rangle & \cdots & \langle f_1, Lf_N \rangle \\ \langle f_2, Lf_1 \rangle & \langle f_2, Lf_2 \rangle & \cdots & \langle f_2, Lf_N \rangle \\ \vdots & \vdots & & \\ \langle f_N, Lf_1 \rangle & \langle f_N, Lf_2 \rangle & \cdots & \langle f_N, Lf_N \rangle \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.49)$$

また, 列ベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} は,

$$g(x) = 1 + 4x^2 \quad (5.50)$$

とおくと,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f_1, g \rangle \\ \langle f_2, g \rangle \\ \vdots \\ \langle f_N, g \rangle \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

これより、行列 $[Z]$ の要素 z_{mn} は、

$$z_{mn} = \langle f_m, Lf_n \rangle = \int_0^1 f_m \left(-\frac{d^2 f_n}{dx^2} \right) dx \quad (5.52)$$

ここで、

$$f_m = x - x^{m+1} \quad (5.53)$$

$$\frac{df_n}{dx} = \frac{d}{dx} (x - x^{n+1}) = 1 - (n+1)x^n \quad (5.54)$$

$$\frac{d^2 f_n}{dx^2} = \frac{d}{dx} \{1 - (n+1)x^n\} = -n(n+1)x^{n-1} \quad (5.55)$$

より、

$$\begin{aligned} z_{mn} &= \int_0^1 (x - x^{m+1}) n(n+1)x^{n-1} dx = n(n+1) \int_0^1 (x^n - x^{m+n}) dx \\ &= n(n+1) \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} \right]_0^1 = n(n+1) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+n+1} \right) \\ &= \frac{mn}{m+n+1} \end{aligned} \quad (5.56)$$

また、列ベクトルの要素 b_m は、

$$\begin{aligned} b_m &= \langle f_m, g \rangle = \int_0^1 f_m g dx = \int_0^1 (x - x^{m+1}) (1 + 4x^2) dx \\ &= \int_0^1 (x + 4x^3 - x^{n+1} - 4x^{m+3}) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x^4 - \frac{x^{m+2}}{m+2} - \frac{4x^{m+4}}{m+4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{m+2} - \frac{4}{m+4} = \frac{m(3m+8)}{2(m+2)(m+4)} \end{aligned} \quad (5.57)$$

5.3 グリーン関数

5.3.1 逆作用素

逆作用素 L^{-1} は、グリーン関数を用いて次のようにして求めることができる。

$$f = L^{-1}(g) = \int G(x, x') g(x') dx' \quad (5.58)$$

5.3.2 グリーン関数の導出例

変域 $0 \leq x \leq 1$ において定義される $f(x)$ に関する境界値問題

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} = 1 + 4x^2 \quad (5.59)$$

$$f(0) = f(1) = 0 \quad (5.60)$$

において、グリーン関数を求めてみよう。まず、グリーン関数 $G(x, x')$ 満たすべき方程式は、

$$-\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} = \delta(x - x') \quad (5.61)$$

このとき、グリーン関数の境界条件は次のようになる。

$$G(0, x') = G(1, x') = 0 \quad (5.62)$$

いま、 $x \neq x'$ の場合を考えると、 $0 \geq x > x'$, $x' > x \geq 1$ のとき、

$$-\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} = 0 \quad (5.63)$$

両辺を x で不定積分すると、

$$\int -\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} dx = -\frac{dG(x, x')}{dx} = K_1 \quad (5.64)$$

ただし、 K_1 は積分定数を示す。さらに、 x で不定積分すると、

$$\int -\frac{dG(x, x')}{dx} dx = -G(x, x') = K_1 x + K_2 \quad (5.65)$$

ただし、 K_1 は積分定数を示す。これより、

$$G(x, x') = \begin{cases} C_1 x + C_2 & (0 \geq x > x') \\ C'_1 x + C'_2 & (x' > x \geq 1) \end{cases} \quad (5.66)$$

ただし、 C_1 , C_2 , C'_1 , C'_2 は定数である。境界条件より、

$$G(0, x') = C_2 = 0, \quad G(1, x') = C'_1 + C'_2 = 0 \quad (5.67)$$

$$\therefore C'_2 = -C'_1 \quad (5.68)$$

よって、

$$G(x, x') = \begin{cases} C_1 x & (0 \geq x > x') \\ C'_1 (x - 1) & (x' > x \geq 1) \end{cases} \quad (5.69)$$

$x = x'$ におけるグリーン関数の連続条件より、

$$C_1 x' = C'_1 (x' - 1) \quad (5.70)$$

また、式(5.61)の両辺を $x = x'$ 近傍で積分すると、 $\tau \ll 1$ として、

$$\begin{aligned} \int_{x'-\tau}^{x+\tau} -\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} dx &= \int \delta(x - x') dx \\ -\left[\frac{dG(x, x')}{dx} \right]_{x'-\tau}^{x+\tau} &= 1 \end{aligned} \quad (5.71)$$

ここで、

$$\frac{dG(x, x')}{dx} = \begin{cases} C_1 & (0 \geq x > x') \\ C'_1 & (x' > x \geq 1) \end{cases} \quad (5.72)$$

ゆえ、

$$\begin{aligned} C'_1 - C_1 &= -1 \\ \therefore C_1 &= C'_1 + 1 \end{aligned} \quad (5.73)$$

式(5.70)- $x' \times$ 式(5.73)より、

$$C'_1 = -x' \quad (5.74)$$

これより、

$$C_1 = -x' + 1 \quad (5.75)$$

よって、グリーン関数 $G(x, x')$ は、

$$G(x, x') = \begin{cases} x(1-x') & (0 \geq x > x') \\ (1-x)x' & (x' > x \geq 1) \end{cases} \quad (5.76)$$

5.4 線状導体の散乱問題（点整合法）

線状導体の散乱問題に対して、まず、点整合法を取り上げ説明する^{*2}.

5.4.1 差分近似

面電流 \mathbf{J} 、および面電荷密度 σ を用いて、散乱電界 \mathbf{E}_s は次式で与えられる。

$$\mathbf{E}_s = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \Phi \quad (5.77)$$

^{*2} Roger F. Harrington, "Field Computation by Moment Methods," Chapter 4. Wire antennas and scatters, Wiley-IEEE Press (1993), ISBN-13: 978-0780310148.

ここで, \mathbf{A} はベクトルポテンシャル, Φ はスカラポテンシャルを示し,

$$\mathbf{A} = \mu \oint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \quad (5.78)$$

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon} \oint_S \sigma(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \quad (5.79)$$

ただし, $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は自由空間の3次元スカラグリーン関数を示し,

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (5.80)$$

また, 連続の式は,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\sigma \quad (5.81)$$

散乱体が完全導体の場合, 入射電界を \mathbf{E}_i , 導体表面の法線ベクトルを \mathbf{n} とおくと, 導体表面 S 上の境界条件は次のようになる.

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s) = 0 \quad (\text{on } S) \quad (5.82)$$

いま, 導体が十分細い場合を考え, 次のような細線近似を行う.

- 電流は線状導体中心軸方向成分（単位ベクトル \mathbf{u}_l ）のみをもつ.
- 電流および電荷は導体表面ではなく, 仮想的に線状導体中心軸上に分布する. $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{I}(l) = I(l)\mathbf{u}_l$. ただし, l は中心軸に沿う距離（座標成分）を示す.
- 電流および電荷は, パルス状で微小素子（長さ Δl ）からなる.
- 電界に対する境界条件は, 実際の導体表面（半径 a の円筒表面）で考えた上で, 適宜, 近似を行う.

これらの近似は, ハレンの積分方程式の定式化において用いたものである. これより,

$$\mathbf{A} = \mu \int_l I(l') \mathbf{u}_{l'} G_0 dl' \quad (5.83)$$

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon} \int_l \sigma(l') G_0 dl' \quad (5.84)$$

また,

$$\sigma = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{-j\omega} = -\frac{1}{j\omega} \nabla \cdot (I(l') \mathbf{u}_l) = -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial I}{\partial l'} \quad (5.85)$$

を用いて散乱電界 \mathbf{E}_s が求められる. また, 境界条件より, 電界の軸方向成分については,

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{u}_l &= \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{u}_l \\ &= \left(-j\omega \mathbf{A} - \nabla \Phi \right) \cdot \mathbf{u}_l \quad (\text{on } S) \end{aligned} \quad (5.86)$$

ここで, \mathbf{E}_i , \mathbf{A} の l 成分を各々 $E_{i,l}$, A_l とおくと,

$$-E_{i,l} = -j\omega A_l - \frac{\partial \Phi}{\partial l} \quad (\text{on S}) \quad (5.87)$$

線状導体を微小長の素子に分割し, 微分を差分近似 (中心差分) すると,

$$\Phi(m) \simeq \frac{\Phi(m_+) - \Phi(m_-)}{\Delta l_m} \quad (5.88)$$

ただし, Δl_m は m 番目の導体素子の長さ, m はその導体素子の中心, m_{\pm} は両端の位置に各々対応する. これより, m 番目の微小導体中心における値は次のようになる.

$$-E_{i,l}(m) \simeq -j\omega A_l(m) - \frac{\Phi(m_+) - \Phi(m_-)}{\Delta l_m} \quad \text{on } (m \text{番目の素子}) \quad (5.89)$$

$$\mathbf{A}(m) \simeq \mu \sum_n \mathbf{I}(n) \int_{\Delta l_n} G_0(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) dl_n \quad (5.90)$$

m 番目の微小導体の両端 m_{\pm} において,

$$\Phi(m_{\pm}) \simeq \frac{1}{\epsilon} \sum_n \sigma(n_{\pm}) \int_{\Delta l_{n\pm}} G_0(\mathbf{r}_{m\pm}, \mathbf{r}_{n\pm}) dl_{n\pm} \quad (5.91)$$

ここで, n 番目の微小導体の両端 n_{\pm} の電荷密度 $\sigma(n_{\pm})$ は, 式 (5.85) を差分近似して,

$$\sigma(n_+) \simeq -\frac{1}{j\omega} \frac{I(n+1) - I(n)}{\Delta l_{n+}} \quad (5.92)$$

$$\sigma(n_-) \simeq -\frac{1}{j\omega} \frac{I(n) - I(n-1)}{\Delta l_{n-}} \quad (5.93)$$

まず, 次の積分を実行しよう.

$$\psi(n, m) \equiv \frac{1}{\Delta l_n} \int_{\Delta l_n} G_0(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) dl_n \quad (5.94)$$

ここで, n 番目の微小素子の中心を原点, 素子の軸方向を z 軸にとるローカルな円筒座標系 (ρ, ϕ, z) を考えると, 位置ベクトル \mathbf{r}_n の点の座標は $(0, 0, z)$ となる. 一方, m 番目の微小素子の \mathbf{r}_m (観測点) の座標を (ρ_m, ϕ_m, z_m) とすると, $m \neq n$ のとき,

$$\begin{aligned} R_m &= |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n| = \sqrt{\rho_m^2 + (z_m - z)^2} \\ &= \sqrt{\rho_m^2 + z_m^2 - 2z_m z + z^2} \end{aligned} \quad (5.95)$$

ここで, 原点から \mathbf{r}_m までの距離を R_{0m} とおくと,

$$R_{0m} = \sqrt{\rho_m^2 + z_m^2} \quad (5.96)$$

より,

$$\begin{aligned} R_m &= \sqrt{R_{0m}^2 - 2z_m z + z^2} = R_{0m} \sqrt{1 + \frac{-2z_m z + z^2}{R_{0m}^2}} \simeq R_{0m} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-2z_m z}{R_{0m}^2} \right) \\ &= R_{0m} - \frac{z_m}{R_{0m}} z \end{aligned} \quad (5.97)$$

これより,

$$\psi(n, m) = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{\Delta l_n} \frac{e^{-jkR_m}}{4\pi R_m} dz \simeq \frac{1}{\Delta l_n} \frac{e^{-jkR_{0m}}}{4\pi R_{0m}} \int_{\Delta l_n} e^{jk \frac{z_m}{R_{0m}} z} dz \quad (5.98)$$

積分項について,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta l_n} e^{jk \frac{z_m}{R_{0m}} z} dz &= \left[\frac{e^{jk \frac{z_m}{R_{0m}} z}}{jk \frac{z_m}{R_{0m}}} \right]_{z=-\frac{\Delta l_n}{2}}^{\frac{\Delta l_n}{2}} = \frac{1}{jk \frac{z_m}{R_{0m}}} \left(e^{jk \frac{z_m}{R_{0m}} \frac{\Delta l_n}{2}} - e^{-jk \frac{z_m}{R_{0m}} \frac{\Delta l_n}{2}} \right) \\ &= \Delta l_n \frac{\sin \left(k \frac{z_m}{R_{0m}} \frac{\Delta l_n}{2} \right)}{k \frac{z_m}{R_{0m}} \frac{\Delta l_n}{2}} \end{aligned} \quad (5.99)$$

よって,

$$\psi(n, m) \simeq \frac{e^{-jkR_{0m}}}{4\pi R_{0m}} \frac{\sin \left(k \frac{z_m}{R_{0m}} \frac{\Delta l_n}{2} \right)}{k \frac{z_m}{R_{0m}} \frac{\Delta l_n}{2}} \simeq \frac{e^{-jkR_{0m}}}{4\pi R_{0m}} \quad (m \neq n) \quad (5.100)$$

次に, $m = n$ のとき, $(\rho_m, \phi_m, z_m) = (a, \phi_n, 0)$. また, $R_n = \sqrt{a^2 + z^2}$ のとき,

$$e^{-jkR_n} \simeq 1 - jkR_n \quad (5.101)$$

で近似すると,

$$\begin{aligned} \psi(n, n) &= \frac{1}{\Delta l_n} \int_{\Delta l_n} \frac{e^{-jkR_n}}{4\pi R_n} dz = \frac{1}{4\pi \Delta l_n} \int_{\Delta l_n} \frac{1 - jkR_n}{R_n} dz \\ &= \frac{1}{4\pi \Delta l_n} \left(\int_{\Delta l_n} \frac{dz}{R_n} - jk \int_{\Delta l_n} dz \right) \end{aligned} \quad (5.102)$$

上式の第1項の積分は、 $\Delta l_n \gg a$ のとき、

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta l_n} \frac{dz}{R_n} &= \int_{-\frac{\Delta l_n}{2}}^{\frac{\Delta l_n}{2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \left[\log |z + \sqrt{z^2 + a^2}| \right]_{-\frac{\Delta l_n}{2}}^{\frac{\Delta l_n}{2}} \\
&= \log \left| \frac{\Delta l_n}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta l_n}{2} \right)^2 + a^2} \right| - \log \left| -\frac{\Delta l_n}{2} + \sqrt{\left(-\frac{\Delta l_n}{2} \right)^2 + a^2} \right| \\
&= \log \frac{\left| \frac{\Delta l_n}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta l_n}{2} \right)^2 + a^2} \right|}{\left| -\frac{\Delta l_n}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta l_n}{2} \right)^2 + a^2} \right|} = \log \frac{\left| \frac{\Delta l_n}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta l_n}{2} \right)^2 + a^2} \right|^2}{a^2} \\
&= 2 \log \left| \frac{\Delta l_n}{2a} + \sqrt{\left(\frac{\Delta l_n}{2a} \right)^2 + 1} \right| \simeq 2 \log \left(\frac{\Delta l_n}{2a} + \frac{\Delta l_n}{2a} \right) = 2 \log \left(\frac{\Delta l_n}{a} \right)
\end{aligned} \tag{5.103}$$

よって、

$$\psi(n, n) \simeq \frac{1}{4\pi\Delta l_n} \left\{ 2 \log \left(\frac{\Delta l_n}{a} \right) - jk\Delta l_n \right\} = \frac{\log \left(\frac{\Delta l_n}{a} \right)}{2\pi\Delta l_n} - \frac{jk}{4\pi} \tag{5.104}$$

また、

$$\begin{aligned}
\Phi(m_+) &\simeq \frac{1}{\epsilon} \sum_n \left\{ -\frac{1}{j\omega} \frac{I(n+1) - I(n)}{\Delta l_{n+}} \right\} \int_{\Delta l_{n+}} G_0(\mathbf{r}_{m+}, \mathbf{r}_{n+}) dl_{n+} \\
&= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{n=1}^N \left\{ I(n+1) - I(n) \right\} \psi(n_+, m_+) \\
&= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\left\{ I(2) - I(1) \right\} \psi(1_+, m_+) + \left\{ I(3) - I(2) \right\} \psi(2_+, m_+) \right. \\
&\quad + \cdots + \left\{ I(n) - I(n-1) \right\} \psi((n-1)_+, m_+) + \left\{ I(n+1) - I(n) \right\} \psi(n_+, m_+) \\
&\quad \left. + \cdots + \left\{ I(N) - I(N-1) \right\} \psi((N-1)_+, m_+) + \left\{ I(N+1) - I(N) \right\} \psi(N_+, m_+) \right] \\
&= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \left[I(1)\psi(1_+, m_+) + \left\{ I(n)\psi((n-1)_+, m_+) - I(n)\psi(n_+, m_+) \right\} \right. \\
&\quad \left. + I(N+1)\psi(N_+, m_+) \right] \\
&\simeq -\frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{n=1}^N \left\{ I(n)\psi((n-1)_+, m_+) - I(n)\psi(n_+, m_+) \right\} \\
&= \frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{n=1}^N I(n) \left\{ -\psi(n_-, m_+) + \psi(n_+, m_+) \right\}
\end{aligned} \tag{5.105}$$

同様にして,

$$\Phi(m_-) \simeq \frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{n=1}^N I(n) \left\{ -\psi(n_-, m_-) + \psi(n_+, m_-) \right\} \quad (5.106)$$

また,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(m) &\simeq \mu \sum_n I(n) \mathbf{u}_{l,n} \int_{\Delta l_n} G_0(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) dl_n \\ &= \mu \sum_n I(n) \Delta \mathbf{l}_n \psi(n, m) \end{aligned} \quad (5.107)$$

ただし, $\Delta \mathbf{l}_n \equiv \Delta l_n \mathbf{u}_{l,n}$. これより, $\mathbf{A}(m)$ の素子に沿う成分 $A_l(m)$ は,

$$A_l(m) = \mu \sum_n I(n) \Delta \mathbf{l}_n \cdot \mathbf{u}_{l,m} \psi(n, m) \quad (5.108)$$

よって, 式 (5.89) に代入すると,

$$\begin{aligned} E_{i,l}(m) &= \frac{1}{\Delta l_m} \sum_n \left[j\omega\mu \Delta \mathbf{l}_n \cdot \Delta \mathbf{l}_m \psi(n, m) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{j\omega\epsilon} \left\{ \psi(n_+, m_+) - \psi(n_-, m_+) - \psi(n_+, m_-) + \psi(n_-, m_-) \right\} \right] I(n) \end{aligned} \quad (5.109)$$

ここで,

$$V_m \equiv E_{i,l}(m) \Delta l_m \quad (5.110)$$

$$\begin{aligned} z_{mn} &\equiv j\omega\mu \Delta \mathbf{l}_n \cdot \Delta \mathbf{l}_m \psi(n, m) \\ &\quad + \frac{1}{j\omega\epsilon} \left\{ \psi(n_+, m_+) - \psi(n_-, m_+) - \psi(n_+, m_-) + \psi(n_-, m_-) \right\} \end{aligned} \quad (5.111)$$

とおくと,

$$V_m = \sum_n z_{mn} I(n) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (5.112)$$

行列表示すると,

$$\mathbf{V} = [Z] \mathbf{I} \quad (5.113)$$

よって,

$$\mathbf{I} = [Z]^{-1} \mathbf{V} = [Y] \mathbf{V} \quad (5.114)$$

ただし,

$$[Y] = [Z]^{-1} \quad (5.115)$$

5.5 放射および散乱特性

積分方程式の数値計算によって得られるインピーダンス行列から、アンテナの放射および散乱特性を解析する方法について説明する^{*3}.

5.5.1 遠方放射電界

遠方領域に観測点 (r_0, θ, ϕ) をおくと、遠方近似したベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A} \simeq \mu \frac{e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_n I(n) \Delta \mathbf{l}_n e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n} \quad (5.116)$$

が得られ、遠方放射電界 \mathbf{E} は、次のように近似できる。

$$\mathbf{E} \simeq -j\omega \left\{ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_\theta) \mathbf{u}_\theta + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_\phi) \mathbf{u}_\phi \right\} \quad (5.117)$$

ただし、 r_0 はアンテナの座標原点から観測点までの距離、 \mathbf{r}_n は n 番目の導体素子中心の位置ベクトル、 \mathbf{k} は波数ベクトル、 \mathbf{u}_θ 、 \mathbf{u}_ϕ は各々、 θ 、 ϕ 方向に沿う単位ベクトルを示す。したがって、放射電界の成分 E_θ 、 E_ϕ は、

$$\begin{aligned} E_{(\theta)} &= \frac{\omega \mu e^{-jkr_0}}{j4\pi r_0} \sum_n \left(e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n} \mathbf{u}_{(\theta)} \cdot \Delta \mathbf{l}_n \right) I(n) = \frac{\omega \mu e^{-jkr_0}}{j4\pi r_0} \mathbf{V}_{r,(\theta)}^t \mathbf{I} \\ &= \frac{\omega \mu e^{-jkr_0}}{j4\pi r_0} \mathbf{V}_{r,(\theta)}^t [Y] \mathbf{V} \end{aligned} \quad (5.118)$$

ただし、 \mathbf{V} は列ベクトル、 $\mathbf{V}_{r,\theta}^t$ 、 $\mathbf{V}_{r,\phi}^t$ は行ベクトル（列ベクトルの転置）を示し、その要素 $V_{\theta,n}$ 、 $V_{\phi,n}$ は、

$$V_{\theta,n} = e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n} \mathbf{u}_\theta \cdot \Delta \mathbf{l}_n \quad (5.119)$$

$$V_{\phi,n} = e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n} \mathbf{u}_\phi \cdot \Delta \mathbf{l}_n \quad (5.120)$$

5.5.2 アンテナ利得

トータル電力 P_t は、電流の要素 $I(n)$ の複素共役 $I^*(n)$ からなる列ベクトルを \mathbf{I}^* とおくと、

$$P_t = \text{Re} \left(\mathbf{V}^t \mathbf{I}^* \right) = \text{Re} \left(\mathbf{V}^t [Y^*] \mathbf{V}^* \right) \quad (5.121)$$

^{*3} Roger F. Harrington, "Field Computation by Moment Methods," Chapter 4. Wire antennas and scatters, Wiley-IEEE Press (1993), ISBN-13: 978-0780310148.

ただし、 \mathbf{V}^t は \mathbf{V} の転置（共役をとらない）を示す。これより、アンテナ利得 $g_{(\theta)}(\theta, \phi)$ は、

$$g_{(\theta)}(\theta, \phi) = \frac{4\pi r_0^2}{\eta} \frac{|E_{(\theta)}(\theta, \phi)|^2}{P_t} = \frac{\eta k^2}{4\pi} \frac{\left| \mathbf{V}_{r,(\theta)}^t [Y] \mathbf{V} \right|^2}{\operatorname{Re}(\mathbf{V}^t [Y^*] \mathbf{V}^*)} \quad (5.122)$$

ここで、 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ は自由空間の波動インピーダンスを示す。

5.5.3 アンテナの入力アドミタンス

1点給電の線状アンテナの場合、一つの微小素子 (i 番目) の励振電圧を $V_i \neq 0$ とおき、それ以外はゼロとおくと、電流 \mathbf{I} の要素 I_m は、

$$I_m = y_{mi} V_i \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (5.123)$$

ただし、 y_{mi} は $[Y]$ の要素を示す。よって、単位電圧 $V_i = 1$ とすると、電流は直接 y_{mi} によって与えられる。このとき、この給電点における入力アドミタンス Y_{IN} は、

$$Y_{IN} = \frac{I_i}{V_i} = y_{ii} \quad (5.124)$$

また、トータル電力 P_t は、

$$P_t = \operatorname{Re}(|V_i|^2 y_{ii}) \quad (5.125)$$

5.5.4 散乱断面積

物体に平面波が入射したとき、ある方向 (θ, ϕ) の散乱波の強さが、入射波の到来方向に垂直な断面積 σ [m^2] 内に含まれる入射電力を全方向に一様に散乱した場合の強さと同じになるような σ をその物体のその方向の**散乱断面積** (scattering cross-section) という。いま、入射平面波を、

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{u}_t e^{-jk \cdot \mathbf{r}_n}, \quad |\mathbf{E}_i| = 1 \quad (5.126)$$

散乱電界を \mathbf{E}_s 、散乱体から観測点までの距離を r_r とおくと、

$$\left| E_{s,(\theta)} \right|^2 = \frac{\sigma |\mathbf{E}_i|^2}{4\pi r_r^2} = \frac{\sigma}{4\pi r_r^2} \quad (5.127)$$

ここで、積分方程式の数値計算により得られる電界成分は、

$$E_{s,(\theta)} = \frac{\omega \mu e^{-jkr_0}}{j4\pi r_0} \mathbf{V}_{r,(\theta)}^t [Y] \mathbf{V} \quad (5.128)$$

ただし, \mathbf{V}^t は入射平面波を表す列ベクトルで, その要素 V_n は次のようになる (アンテナの解析とは異なる点).

$$V_n = \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{l}_n = e^{-jk \cdot r_n} \mathbf{u}_t \cdot \Delta \mathbf{l}_n \quad (5.129)$$

ただし, \mathbf{k} は入射平面波の波数ベクトル, \mathbf{u}_t はその電界の偏波方向に沿う単位ベクトルを示す. これより, 散乱断面積 σ は,

$$\sigma = 4\pi r_r^2 |E_{s,(\theta)}|^2 = \frac{\eta^2 k^2}{4\pi} |\mathbf{V}_{r,(\theta)}^t [Y] \mathbf{V}|^2 \quad (5.130)$$

また, **トータル散乱断面積** (Total scattering cross-section) σ_t は, 入射波の電力密度と散乱波全電力の比で定義され, 次のようになる.

$$\sigma_t = \frac{P_t}{|\mathbf{E}_i|^2} = \eta P_t = \eta \Re[\mathbf{V}^t [Y^*] \mathbf{V}^*] \quad (5.131)$$

5.6 線状導体の散乱問題 (ガラーキン法)

5.6.1 マトリクス方程式

ベクトルポテンシャルを基にして得られる散乱電界 \mathbf{E}_s の積分表示式は, 次のようになる.

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \left(\int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \right) \quad (5.132)$$

入射電界を $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$, 線状電流を $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ とおくと, 線状導体 (積分路 L) に沿う電界の境界条件より,

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r}) \quad (\text{on S}) \\ &= -j\omega\mu \left(\int_L G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{I}(\mathbf{r}') dl' + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \int_L G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{I}(\mathbf{r}') dl' \right) \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.133)$$

いま, 線状電流 \mathbf{I} を次のように展開して表す.

$$\mathbf{I} = I(l) \mathbf{u}_t(\mathbf{r}) \simeq \sum_n a_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (5.134)$$

ただし, \mathbf{r} は位置ベクトル, \mathbf{u}_t は線状導体の接線 (単位) ベクトル, \mathbf{f}_n は区分的三角波状の基底関数, a_n は未知係数を示す. これより,

$$\begin{aligned} \frac{1}{j\omega\mu} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r}) &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) \int_L G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') I(\mathbf{r}') \mathbf{u}_t(\mathbf{r}') dl' \right\} \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r}) \\ &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) \int_L G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(\sum_n a_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \right) dl' \right\} \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r}) \\ &= \left\{ \sum_n a_n \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) \int_L G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dl' \right\} \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.135)$$

ベクトル表示して,

$$-\frac{j}{\omega\mu} (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r})) \mathbf{u}_t = \left[\left\{ \sum_n a_n \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) \int_L G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dl' \right\} \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r}) \right] \mathbf{u}_t \quad (5.136)$$

両辺に $\mathbf{f}_m(\mathbf{r})$ のスカラ積をとって, 積分すると,

$$\begin{aligned} &\int_L -\frac{j}{\omega\mu} (\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r})) (\mathbf{u}_t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r})) dl \\ &= \int_L \left[\left\{ \sum_n a_n \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) \int_L G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dl' \right\} \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r}) \right] (\mathbf{u}_t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r})) dl \end{aligned} \quad (5.137)$$

いま, \mathbf{u}_t に直交する単位ベクトルを $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) &= (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{u}_t)(\mathbf{f}_m \cdot \mathbf{u}_t) + (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{f}_m \cdot \mathbf{u}_1) + (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{u}_2)(\mathbf{f}_m \cdot \mathbf{u}_2) \\ &= (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{u}_t)(\mathbf{f}_m \cdot \mathbf{u}_t) \end{aligned} \quad (5.138)$$

また,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) &= (\mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r})) (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r})) \\ &\quad + (\mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_1(\mathbf{r})) (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_1(\mathbf{r})) + (\mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_2(\mathbf{r})) (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_2(\mathbf{r})) \\ &= (\mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r})) (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{r})) \end{aligned} \quad (5.139)$$

より,

$$\begin{aligned} &-\frac{j}{\omega\mu} \int_{f_m} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dl \quad (m = 1, 2, \dots) \\ &= \sum_n a_n \int_{f_m} \left\{ \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) \int_L G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dl' \right\} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dl \end{aligned} \quad (5.140)$$

ここで,

$$b_m \equiv -\frac{j}{\omega\mu} \int_{f_m} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dl \quad (5.141)$$

$$z_{mn} \equiv \int_{f_m} \left\{ \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) \int_{f_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dl' \right\} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dl \quad (5.142)$$

とおくと,

$$b_m = \sum_n z_{mn} a_n \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (5.143)$$

行列表示すると,

$$\mathbf{V} = [Z]\mathbf{I} \quad (5.144)$$

よって,

$$\mathbf{I} = [Z]^{-1}\mathbf{V} = [Y]\mathbf{V} \quad (5.145)$$

ただし

$$[Y] = [Z]^{-1} \quad (5.146)$$

5.6.2 マトリクス要素の計算

マトリクス要素 z_{mn} について、第 2 項の積分を I_{z2} とおき、さらに計算に適した形に変形していく。

$$\begin{aligned} I_{z2} &\equiv \int_{f_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left(\nabla \nabla \cdot \int_{f_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dl' \right) dl \\ &= \int_{f_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left\{ \nabla \int_{f_n} \nabla \cdot \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \right) dl' \right\} dl \end{aligned} \quad (5.147)$$

ベクトル公式 $\nabla \cdot (G\mathbf{f}_n) = \mathbf{f}_n \cdot \nabla G + G(\nabla \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}'))$ において、この式の第 2 項はゼロゆえ、

$$I_{z2} = \int_{f_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left(\nabla \int_{f_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dl' \right) dl \quad (5.148)$$

グリーン関数の対称性 $\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ より、

$$I_{z2} = - \int_{f_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left(\nabla \int_{f_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dl' \right) dl \quad (5.149)$$

また、ベクトル公式 $\nabla' \cdot (G\mathbf{f}_n) = \mathbf{f}_n \cdot \nabla' G + G(\nabla' \cdot \mathbf{f}_n)$ より、

$$I_{z2} = - \int_{f_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left[\nabla \int_{f_n} \left\{ \nabla' \cdot (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \right\} dl' \right] dl \quad (5.150)$$

上式の第 1 項について、積分範囲を全空間にとった後、ガウスの発散定理より体積積分を面積分に変換すると、その面上では被積分関数はゼロとなり、第 1 項はゼロである。よって、

$$I_{z2} = \int_{f_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left(\nabla \int_{f_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dl' \right) dl \quad (5.151)$$

いま,

$$S(\mathbf{r}) \equiv \int_{f_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dl' \quad (5.152)$$

とおくと,

$$I_{z2} = \int_{f_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \nabla S(\mathbf{r}) dl \quad (5.153)$$

また、ベクトル公式 $\nabla \cdot (\mathbf{f}_m S) = S(\nabla \cdot \mathbf{f}_m) + \mathbf{f}_n \cdot \nabla S$ より、

$$I_{z2} = \int_{f_m} \nabla \cdot (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) S(\mathbf{r})) dl - \int_{f_m} S(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dl \quad (5.154)$$

上式の第 1 項は、ガウスの発散定理より体積積分を面積分に変換できゼロとなる。したがって、

$$\begin{aligned} I_{z2} &= - \int_{f_m} (\nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r})) S(\mathbf{r}) dl \\ &= - \int_{f_m} (\nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r})) \left\{ \int_{f_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\nabla' \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) dl' \right\} dl \end{aligned} \quad (5.155)$$

よって、 z_{mn} の別の表現として次式を得る。

$$\begin{aligned} z_{mn} &= \int_{f_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left(\int_{f_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dl' \right) dl \\ &\quad - \frac{1}{k^2} \int_{f_m} (\nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r})) \left\{ \int_{f_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\nabla' \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) dl' \right\} dl \end{aligned} \quad (5.156)$$

これは、グリーン関数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ に ∇ , ∇' が作用しないようにした表示式となっていることが特徴である。

5.6.3 基底関数

基底関数 \mathbf{f}_n として、区分的な関数 $\mathbf{f}_n = f_n(l) \mathbf{u}_{t,n}$ を考えると、

$$z_{mn} = \int_{f_m} f_m \mathbf{u}_{t,m} \cdot \left(\int_{f_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_n \mathbf{u}_{t,n} dl' \right) dl - \frac{1}{k^2} \int_{f_m} \frac{\partial f_m}{\partial l} \left\{ \int_{f_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial f_n}{\partial l'} dl' \right\} dl \quad (5.157)$$

ただし、各セグメントは各々直線状導体で近似している。ここで、

$$S_{1,mn}(l) \equiv \int_{f_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_n(l') dl' \quad (5.158)$$

$$S_{2,mn}(l) \equiv \int_{f_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial f_n(l')}{\partial l'} dl' \quad (5.159)$$

とおくと,

$$z_{mn} = (\mathbf{u}_{t,m} \cdot \mathbf{u}_{t,n}) \int_{f_m} f_m(l) S_{1,mn}(l) dl - \frac{1}{k^2} \int_{f_m} \frac{\partial f_m(l)}{\partial l} S_{2,mn}(l) dl \quad (5.160)$$

ただし, 一般に $S_{1,mn}(l)$, $S_{2,mn}(l)$ の定積分は解析的に行われる. 基底関数 \mathbf{f}_n として, 区分的な三角波状の関数 (piecewise triangular function) があり, 次式で定義される

$$f_n(l) = \begin{cases} \frac{l - l_{n-1}}{l_n - l_{n-1}} & (l_{n-1} \leq l \leq l_n) \\ \frac{l_{n+1} - l}{l_{n+1} - l_n} & (l_n \leq l \leq l_{n+1}) \end{cases} \quad (5.161)$$

これより,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{f}_n &= \nabla \cdot (f_n(l) \mathbf{u}_{t,n}) = (\nabla f_n(l)) \cdot \mathbf{u}_{t,n} \\ &= \frac{\partial f_n}{\partial l} = \begin{cases} \frac{1}{l_n - l_{n-1}} & (l_{n-1} \leq l \leq l_n) \\ \frac{-1}{l_{n+1} - l_n} & (l_n \leq l \leq l_{n+1}) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.162)$$

5.7 Rao-Wilton-Glisson (RWG) 基底関数

5.7.1 RWG 基底関数の定義

完全導体からなる 3 次元構造の散乱体を考えると, 導体表面 S に沿う電界成分 (添字 tan) の境界条件より,

$$-\mathbf{E}_{i,\text{tan}} = \mathbf{E}_{s,\text{tan}} = \left(-j\omega \mathbf{A} - \nabla \Phi \right)_{\text{tan}} \quad (\text{on } S) \quad (5.163)$$

まず, 電流分布 \mathbf{J} を次のように展開して近似する.

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) \simeq \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (5.164)$$

ただし, I_n は未知スカラ係数, \mathbf{f}_n は電流分布の**基底関数** (basis function) を示し, 電流分布 \mathbf{J} および基底関数 \mathbf{f}_n は導体表面に沿う成分のみからなるベクトルである. この関数 \mathbf{f}_n は, 2 つの隣接する三角形領域 $T_n^{(+)}$, $T_n^{(-)}$ (長さ l_n の一辺を共有する) において次のよう

に定義され、Rao-Wilton-Glisson (RWG) 基底関数という^{*4}。

$$f_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{2A_n^{(+)}} \rho_n^{(+)} & (\mathbf{r} \text{ in } T_n^{(+)}) \\ \frac{l_n}{2A_n^{(-)}} \rho_n^{(-)} & (\mathbf{r} \text{ in } T_n^{(-)}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (5.165)$$

ただし、 $A_n^{(\pm)}$ は三角形領域 $T_n^{(\pm)}$ の面積を示す。また、 $\rho_n^{(+)}$ は三角形領域 $T_n^{(+)}$ の共有しない頂点（位置ベクトル $\mathbf{v}_n^{(+)}$ ）からその領域内の点（位置ベクトル \mathbf{r} ）に向うベクトル、 $\rho_n^{(-)}$ は領域 $T_n^{(-)}$ の点（位置ベクトル \mathbf{r} ）から共有しない頂点（位置ベクトル $\mathbf{v}_n^{(-)}$ ）に向うベクトルを示し、次のようになる。

$$\rho_n^{(\pm)} = \pm(\mathbf{r} - \mathbf{v}_n^{(\pm)}) \quad (\mathbf{r} \text{ in } T_n^{(\pm)}) \quad (5.166)$$

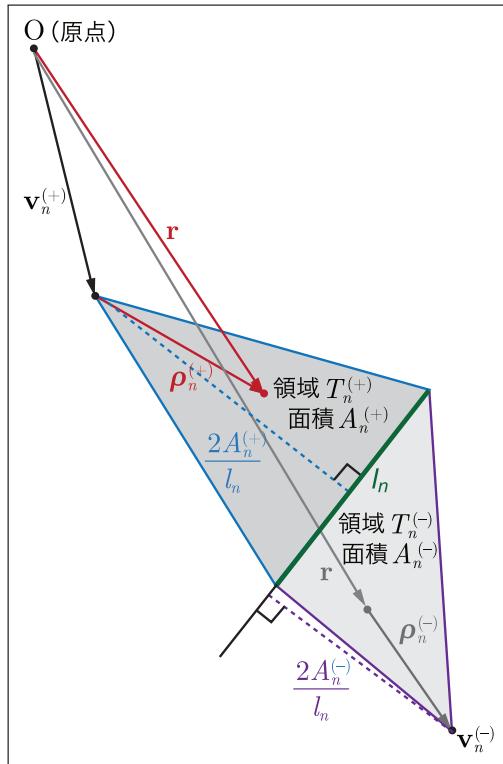


図 5.1. RWG 基底関数に関する変数の定義

^{*4} S.M.Rao, D.R.Wilton and A.W.Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol.30, no.3, pp.409-418 (1982), doi: 10.1109/TAP.1982.1142818.

5.7.2 ガラーキン法

これを境界条件の式に代入し、その両辺に \mathbf{f}_m を試行関数としてスカラ積をとって積分すると、積分範囲は 3 角形領域 $T_m^{(+)}$ および $T_m^{(-)}$ であり、これを S_m とすると、

$$\begin{aligned} \iint_{S_m} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{f}_m dS &= \iint_{S_m} \left(j\omega \mathbf{A} + \nabla \Phi \right) \cdot \mathbf{f}_m dS \\ &= j\omega \iint_{S_m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}_m dS + \iint_{S_m} (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{f}_m dS \end{aligned} \quad (5.167)$$

上式の第 2 項は、ベクトル公式より、

$$\iint_{S_m} (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{f}_m dS = \iint_{S_m} \nabla \cdot (\Phi \mathbf{f}_m) dS - \iint_{S_m} \Phi (\nabla \cdot \mathbf{f}_m) dS \quad (5.168)$$

いま、3 角形領域の面上の成分より 2 次元微分演算子 ∇_s を定義すると、発散定理は次のようになる。

$$\iint_S \nabla_s \cdot \mathbf{a} dS = \oint_C \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} dl \quad (5.169)$$

ただし、 \mathbf{u} は面 S の法線方向 \mathbf{n} および周回積分路 C に沿う方向 \mathbf{l} に直交する単位ベクトル $\mathbf{u} = \mathbf{l} \times \mathbf{n}$ を示す。これより、

$$\iint_{S_m} (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{f}_m dS = \oint_{C_m} (\Phi \mathbf{f}_m) \cdot \mathbf{u} dl - \iint_{S_m} \Phi (\nabla \cdot \mathbf{f}_m) dS \quad (5.170)$$

ここで、周回積分路は領域 $T_m^{(+)}$ および $T_m^{(-)}$ の周辺であり、 \mathbf{f}_m の外向き成分はゼロゆえ、上式の第 1 項はゼロである。したがって、

$$\iint_{S_m} (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{f}_m dS = - \iint_{S_m} \Phi (\nabla_s \cdot \mathbf{f}_m) dS \quad (5.171)$$

上式右辺の $\nabla_s \cdot \mathbf{f}_m$ は、 \mathbf{r} が $T_m^{(\pm)}$ 内にあるとき、

$$\nabla_s \cdot \mathbf{f}_m = \nabla_s \cdot \left(\pm \frac{l_m}{2A_m^{(\pm)}} (\mathbf{r} - \mathbf{v}_m^{(\pm)}) \right) = \pm \frac{l_m}{2A_m^{(\pm)}} \nabla_s \cdot \mathbf{r} \quad (5.172)$$

いま、面 S の法線ベクトル \mathbf{n} と面 S に沿う直交する 2 つの単位ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を考え、位置ベクトル \mathbf{r} を

$$\mathbf{r} = t_1 \mathbf{u}_1 + t_2 \mathbf{u}_2 + n \mathbf{n} \quad (5.173)$$

で表すと、

$$\nabla_s \cdot \mathbf{r} = \left(\mathbf{u}_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \mathbf{u}_2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right) \cdot (t_1 \mathbf{u}_1 + t_2 \mathbf{u}_2 + n \mathbf{n}) = 2 \quad (5.174)$$

よって,

$$\nabla_s \cdot \mathbf{f}_m = \begin{cases} \pm \frac{l_m}{A_m^{(\pm)}} & (\mathbf{r} \text{ in } T_m^{(\pm)}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (5.175)$$

したがって,

$$\begin{aligned} \iint_{S_m} (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{f}_m dS &= - \iint_{S_m} \Phi (\nabla_s \cdot \mathbf{f}_m) dS \\ &= - \iint_{T_m^{(+)}} \Phi \frac{l_m}{A_m^{(+)}} dS - \iint_{T_m^{(-)}} \Phi \left(-\frac{l_m}{A_m^{(-)}} \right) dS \\ &= -l_m \left(\frac{1}{A_m^{(+)}} \iint_{T_m^{(+)}} \Phi(\mathbf{r}) dS - \frac{1}{A_m^{(-)}} \iint_{T_m^{(-)}} \Phi(\mathbf{r}) dS \right) \end{aligned} \quad (5.176)$$

上式の()内の項は、各々の領域における Φ の平均値 $\bar{\Phi}_m^{(\pm)}$ であり、三角形が十分小さい場合、三角形領域の中心 $\mathbf{r}_m^{(c+)}, \mathbf{r}_m^{(c-)}$ における値で次のように近似できる。

$$\frac{1}{A_m^{(\pm)}} \iint_{T_m^{(\pm)}} \Phi(\mathbf{r}) dS = \bar{\Phi}_m^{(\pm)} \simeq \Phi(\mathbf{r}_m^{(c\pm)}) \quad (5.177)$$

これより、

$$\iint_{S_m} (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{f}_m dS = -l_m \left(\bar{\Phi}_m^{(+)} - \bar{\Phi}_m^{(-)} \right) \simeq -l_m \left(\Phi(\mathbf{r}_m^{(c+)}) - \Phi(\mathbf{r}_m^{(c-)}) \right) \quad (5.178)$$

一方、

$$\iint_{S_m} \left(\begin{matrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{A} \end{matrix} \right) \cdot \mathbf{f}_m dS = \iint_{T_m^{(+)}} \left(\begin{matrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{A} \end{matrix} \right) \cdot \frac{l_m}{2A_m^{(+)}} \boldsymbol{\rho}_m^{(+)} dS + \iint_{T_m^{(-)}} \left(\begin{matrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{A} \end{matrix} \right) \cdot \frac{l_m}{2A_m^{(-)}} \boldsymbol{\rho}_m^{(-)} dS \quad (5.179)$$

についても、積分の近似は、三角形領域中心における値である。

$$\frac{1}{A_m^{(\pm)}} \iint_{T_m^{(\pm)}} \left(\begin{matrix} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) \end{matrix} \right) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(\pm)} dS \simeq \left(\begin{matrix} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_m^{(c\pm)}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}_m^{(c\pm)}) \end{matrix} \right) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(c\pm)} \quad (5.180)$$

ただし、

$$\boldsymbol{\rho}_m^{(c\pm)} = \pm \left(\mathbf{r}_m^{(c\pm)} - \mathbf{v}_m^{(\pm)} \right) \quad (5.181)$$

これより、

$$\iint_{S_m} \left(\begin{matrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{A} \end{matrix} \right) \cdot \mathbf{f}_m dS \simeq \frac{l_m}{2} \left[\left(\begin{matrix} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_m^{(c+)}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}_m^{(c+)}) \end{matrix} \right) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(c+)} + \left(\begin{matrix} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_m^{(c-)}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}_m^{(c-)}) \end{matrix} \right) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(c-)} \right] \quad (5.182)$$

式 (5.167) は,

$$\begin{aligned} & \frac{l_m}{2} \left(\frac{1}{A_m^{(+)}} \iint_{T_m^{(+)}} \mathbf{E}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(+)} dS + \frac{1}{A_m^{(-)}} \iint_{T_m^{(-)}} \mathbf{E}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(-)} dS \right) \\ &= j\omega \frac{l_m}{2} \left(\frac{1}{A_m^{(+)}} \iint_{T_m^{(+)}} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(+)} dS + \frac{1}{A_m^{(-)}} \iint_{T_m^{(-)}} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(-)} dS \right) \\ & - l_m \left(\frac{1}{A_m^{(+)}} \iint_{T_m^{(+)}} \Phi(\mathbf{r}) dS - \frac{1}{A_m^{(-)}} \iint_{T_m^{(-)}} \Phi(\mathbf{r}) dS \right) \quad (m = 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (5.183)$$

積分を 3 角形領域の中心の値で近似すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{l_m}{2} \left(\mathbf{E}_i(\mathbf{r}_m^{(c+)}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(c+)} + \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_m^{(c-)}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(c-)} \right) \\ &= \frac{l_m}{2} j\omega \left(\mathbf{A}(\mathbf{r}_m^{(c+)}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(c+)} + \mathbf{A}(\mathbf{r}_m^{(c-)}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(c-)} \right) \\ & - l_m \left(\Phi(\mathbf{r}_m^{(c+)}) - \Phi(\mathbf{r}_m^{(c-)}) \right) \quad (m = 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (5.184)$$

5.7.3 ポテンシャル積分

観測点を 3 角形領域 $T_m^{(\pm)}$ において位置ベクトル \mathbf{r} でのベクトルポテンシャル \mathbf{A} は、展開した電流分布の式 (5.164) より、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dS' = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \left(\sum_n I_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \right) \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \\ &= \sum_n I_n \left(\frac{\mu}{4\pi} \iint_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \right) = \sum_n I_n \mathbf{A}_{mn}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.185)$$

ここで、

$$\mathbf{A}_{mn} \equiv \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \quad (5.186)$$

ただし、

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (5.187)$$

また、スカラポテンシャル Φ は、

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_S \sigma(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \quad (5.188)$$

連続の式 $\nabla_s \cdot \mathbf{J} = -j\omega\sigma$ より、

$$\sigma = -\frac{\nabla_s \cdot \mathbf{J}}{j\omega} = -\frac{1}{j\omega} \nabla_s \cdot \left(\sum_n I_n \mathbf{f}_n \right) = -\frac{1}{j\omega} \sum_n I_n (\nabla_s \cdot \mathbf{f}_n) \quad (5.189)$$

これより, Φ は,

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_S \left\{ -\frac{1}{j\omega} \sum_n I_n (\nabla'_s \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) \right\} \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \\ &= \sum_n I_n \left\{ -\frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \iint_{S_n} (\nabla'_s \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \right\} \\ &= \sum_n I_n \Phi_{mn}(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (5.190)$$

ここで,

$$\Phi_{mn} \equiv -\frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \iint_{S_n} (\nabla'_s \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \quad (5.191)$$

三角形領域の中心 $\mathbf{r}_m^{(c\pm)}$ における \mathbf{A} , Φ は,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_m^{(c\pm)}) = \sum I_n \mathbf{A}_{mn}(\mathbf{r}_m^{(c\pm)}) \quad (5.192)$$

$$\Phi(\mathbf{r}_m^{(c\pm)}) = \sum I_n \Phi_{mn}(\mathbf{r}_m^{(c\pm)}) \quad (5.193)$$

ここで,

$$\mathbf{A}_{mn}(\mathbf{r}_m^{(c\pm)}) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR_m^{(\pm)}}}{R_m^{(\pm)}} dS' \quad (5.194)$$

$$\Phi_{mn}(\mathbf{r}_m^{(c\pm)}) = -\frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \iint_{S_n} (\nabla'_s \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) \frac{e^{-jkR_m^{(\pm)}}}{R_m^{(\pm)}} dS' \quad (5.195)$$

ただし,

$$R_m^{(\pm)} = |\mathbf{r}_m^{(c\pm)} - \mathbf{r}'| \quad (5.196)$$

5.7.4 マトリクス方程式

これより, 式 (5.183) は,

$$\begin{aligned}&\frac{l_m}{2} \left(\frac{1}{A_m^{(+)}} \iint_{T_m^{(+)}} \mathbf{E}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(+)} dS + \frac{1}{A_m^{(-)}} \iint_{T_m^{(-)}} \mathbf{E}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(-)} dS \right) \\ &= j\omega \frac{l_m}{2} \left\{ \frac{1}{A_m^{(+)}} \iint_{T_m^{(+)}} \left(\sum_n I_n \mathbf{A}_{mn}(\mathbf{r}) \right) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(+)} dS + \frac{1}{A_m^{(-)}} \iint_{T_m^{(-)}} \left(\sum_n I_n \mathbf{A}_{mn}(\mathbf{r}) \right) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(-)} dS \right\} \\ &- l_m \left(\frac{1}{A_m^{(+)}} \iint_{T_m^{(+)}} \left\{ \sum I_n \Phi_{mn}(\mathbf{r}) \right\} dS - \frac{1}{A_m^{(-)}} \iint_{T_m^{(-)}} \left(\sum I_n \Phi_{mn}(\mathbf{r}) \right) dS \right\} \\ &\quad (m = 1, 2, 3, \dots, N)\end{aligned}\quad (5.197)$$

整理して,

$$\begin{aligned}
& l_m \left(\frac{1}{2A_m^{(+)}} \iint_{T_m^{(+)}} \mathbf{E}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(+)} dS + \frac{1}{2A_m^{(-)}} \iint_{T_m^{(-)}} \mathbf{E}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(-)} dS \right) \\
&= l_m \left\{ j\omega \left(\sum_n I_n \frac{1}{2A_m^{(+)}} \iint_{T_m^{(+)}} \mathbf{A}_{mn}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(+)} dS \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_n I_n \frac{1}{2A_m^{(-)}} \iint_{T_m^{(-)}} \mathbf{A}_{mn}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(-)} dS \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\sum_n I_n \frac{1}{A_m^{(+)}} \iint_{T_m^{(+)}} \Phi_{mn}(\mathbf{r}) dS - \sum_n I_n \frac{1}{A_m^{(-)}} \iint_{T_m^{(-)}} \Phi_{mn}(\mathbf{r}) dS \right) \right\} \\
&\qquad\qquad\qquad (m = 1, 2, 3, \dots, N) \tag{5.198}
\end{aligned}$$

近似式では、式 (5.184) は、

$$\begin{aligned}
& l_m \left(\mathbf{E}_i(\mathbf{r}_m^{(c+)}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{(c+)}}{2} + \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_m^{(c-)}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{(c-)}}{2} \right) \\
&= l_m \left[j\omega \left\{ \left(\sum_n I_n \mathbf{A}_{mn}^{(+)} \right) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{(c+)}}{2} + \left(\sum_n I_n \mathbf{A}_{mn}^{(-)} \right) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{(c-)}}{2} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \left(\sum_n I_n \Phi_{mn}^{(+)} \right) - \left(\sum_n I_n \Phi_{mn}^{(-)} \right) \right\} \right] \tag{5.199}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
V_m &\equiv l_m \left(\frac{1}{2A_m^{(+)}} \iint_{T_m^{(+)}} \mathbf{E}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(+)} dS + \frac{1}{2A_m^{(-)}} \iint_{T_m^{(-)}} \mathbf{E}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(-)} dS \right) \\
&\simeq l_m \left(\mathbf{E}_i(\mathbf{r}_m^{(c+)}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{(c+)}}{2} + \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_m^{(c-)}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{(c-)}}{2} \right) \tag{5.200}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{mn} &\equiv l_m \left\{ j\omega \left(\frac{1}{2A_m^{(+)}} \iint_{T_m^{(+)}} \mathbf{A}_{mn}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(+)} dS + \frac{1}{2A_m^{(-)}} \iint_{T_m^{(-)}} \mathbf{A}_{mn}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{(-)} dS \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{A_m^{(+)}} \iint_{T_m^{(+)}} \Phi_{mn}(\mathbf{r}) dS - \frac{1}{A_m^{(-)}} \iint_{T_m^{(-)}} \Phi_{mn}(\mathbf{r}) dS \right) \right\} \\
&\simeq l_m \left\{ j\omega \left(\mathbf{A}_{mn}^{(+)} \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{(c+)}}{2} + \mathbf{A}_{mn}^{(-)} \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{(c-)}}{2} \right) - \Phi_{mn}^{(+)} + \Phi_{mn}^{(-)} \right\} \tag{5.201}
\end{aligned}$$

とおくと、

$$V_m = \sum_{n=1}^N z_{mn} I_n \quad (m = 1, 2, 3, \dots, N) \tag{5.202}$$

行列表示すると、

$$\mathbf{V} = [Z] \mathbf{I} \tag{5.203}$$

よって,

$$\mathbf{I} = [Z]^{-1} \mathbf{V} = [Y] \mathbf{V} \quad (5.204)$$

ただし

$$[Y] = [Z]^{-1} \quad (5.205)$$

5.8 RWG 基底関数を用いたポテンシャル積分について

RWG 基底関数を用いたベクトルポテンシャルおよびスカラポテンシャルにおいて、観測点と波源が一致する特異点を含めた積分について説明する^{*5}。三角形領域 T_q における電流 3 成分 ($i = 1, 2, 3$) から領域 T_p の中心点 (位置ベクトル $\mathbf{r}_p^{(c)}$) への寄与をまとめて考えると、これらの積分は次のようになる。

$$\mathbf{A}_{pq,i} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{T_q} \left(\frac{l_{q,i}}{2A_q} \boldsymbol{\rho}_{q,i} \right) \frac{e^{-jkR_p}}{R_p} dS' \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.206)$$

$$\Phi_{pq,i} = \mp \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \iint_{T_q} \left(\frac{l_{q,i}}{A_q} \right) \frac{e^{-jkR_p}}{R_p} dS' \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.207)$$

ここで、

$$R_p = |\mathbf{r}_p^{(c)} - \mathbf{r}'| \quad (5.208)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{q,i} = \pm(\mathbf{r}' - \mathbf{v}_{q,i}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.209)$$

ただし、 $\mathbf{v}_{q,i}$ および $l_{q,i}$ ($i = 1, 2, 3$) は、三角形領域 T_q の頂点の位置ベクトルおよびその対辺の長さ、 A_q はその面積を示す。また、上式の ± の符号は、領域 T_q が $T^{(\pm)}$ のどちらかで対応して決まる。

^{*5} D. R. Wilton, S. M. Rao, A. W. Glisson, D. H. Schaubert, O. M. Al-Bundak, and C. M. Butler, "Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol.32, no.3, pp.276-281 (1984), doi: 10.1109/TAP.1984.1143304.

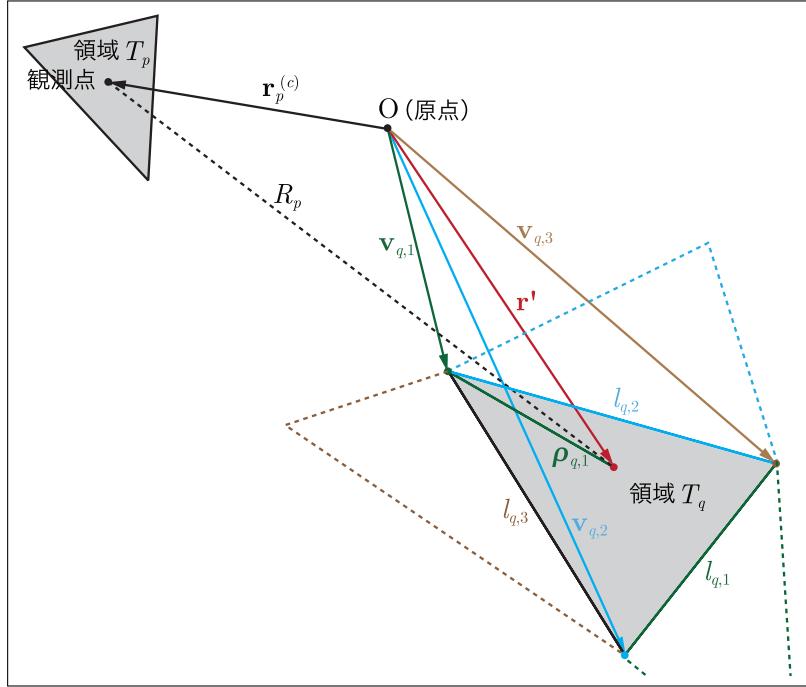


図 5.2. 各辺 i ($i = 1, 2, 3$) に関する計算に用いる変数の定義

簡単のため, $i = 1$ を考え, 観測点を一般化して \mathbf{r} とおく. また, T_q の符号は (+) について考え, 各変数の添字を略すとベクトルポテンシャル \mathbf{A} は,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{l}{2A} \iint_T \rho_m^{(+)} \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \quad (5.210)$$

上式の積分項 \mathbf{I} を, 次のような項に分けて計算していく.

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \iint_T \rho_m^{(+)} \frac{e^{-jkR}}{R} dS' = \iint_T (\rho' - \rho_v) \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \\ &= \iint_T (\rho' - \rho) \frac{e^{-jkR}}{R} dS' + (\rho - \rho_v) \iint_T \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \end{aligned} \quad (5.211)$$

ただし, ρ , ρ' , ρ_v は, 観測点の位置ベクトル \mathbf{r} , 電流源の位置ベクトル \mathbf{r}' , 共有する辺に対向する三角形の頂点 $\mathbf{v}_m^{(+)}$ を各々面 S に投影したベクトルを示す.

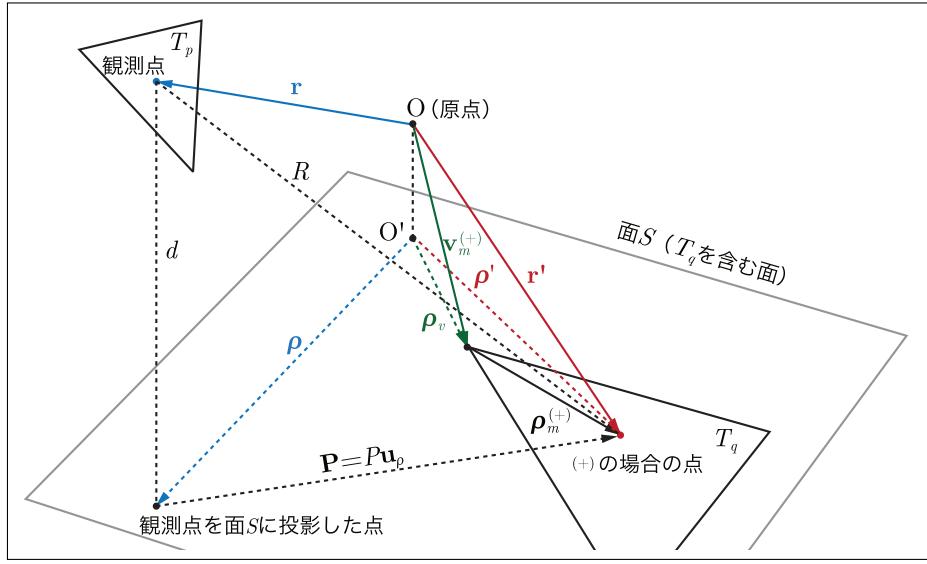


図 5.3. RWG 基底関数に関する変数の定義

さらに,

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = \left(\frac{e^{-jkR}}{R} - \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \quad (5.212)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} - \frac{1}{R} \right) = -jk \quad (5.213)$$

を考慮して、

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \iint_T (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) \frac{e^{-jkR} - 1}{R} dS' + \iint_T \frac{\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}}{R} dS' \\ &+ (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_v) \iint_T \frac{e^{-jkR} - 1}{R} dS' + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_v) \iint_T \frac{dS'}{R} \end{aligned} \quad (5.214)$$

上式の第1項および第3項は特異点を持たないため、容易に数値積分できる。

5.8.1 3角形領域の積分について

まず、三角形領域 T_q における波源の位置ベクトル r' は、

$$\mathbf{r}' = \mathbf{v}_{q,1} + \xi_q(\mathbf{v}_{q,2} - \mathbf{v}_{q,1}) + \eta_q(\mathbf{v}_{q,3} - \mathbf{v}_{q,1}) \quad (0 \leq \xi_q, \eta_q \leq 1) \quad (5.215)$$

簡単のため、添字 q は省略して、

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{v}_1 + \xi(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \eta(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \quad (0 \leq \xi, \eta \leq 1) \\ &= (1 - \xi - \eta)\mathbf{v}_1 + \xi\mathbf{v}_2 + \eta\mathbf{v}_3 \end{aligned} \tag{5.216}$$

これより、面積要素 dS' は、

$$dS' = \left| \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta = |(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)| d\xi d\eta = 2A_q d\xi d\eta \quad (5.217)$$

よって、三角形領域 T_q の積分は、次のような 2 重積分の形で表される。

$$\iint_{T_q} g(\mathbf{r}') dS' = 2A_q \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} g((1-\xi-\eta)\mathbf{v}_1 + \xi\mathbf{v}_2 + \eta\mathbf{v}_3) d\eta d\xi \quad (5.218)$$

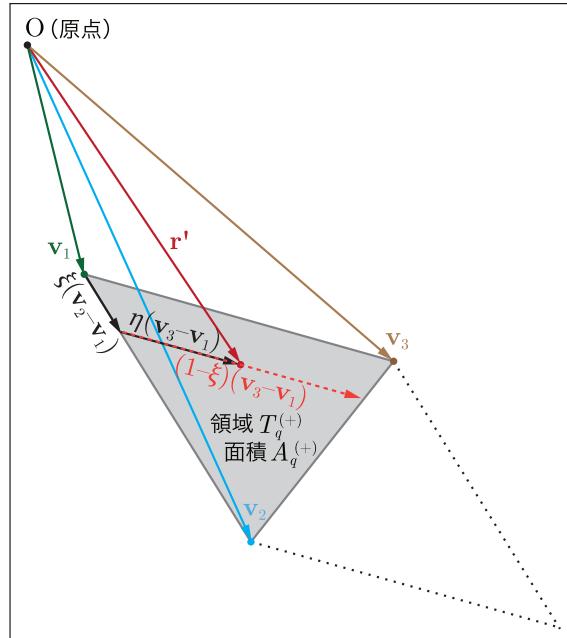


図 5.4. 3 角形領域の面積分に関する変数の定義

5.8.2 特異点を含む積分について

式 (5.214) の第 2 項および第 4 項の積分 I_2, I_4

$$I_2 = \iint_T \frac{\rho' - \rho}{R} dS' \quad (5.219)$$

$$I_4 = \iint_T \frac{dS'}{R} \quad (5.220)$$

については、周回積分への変換と特異点のふるまいを考慮した積分を行う。まず、準備として、導体面に沿う2次元演算子 ∇_s を作用させたときの計算を行う。

$$\mathbf{P} = P\mathbf{u}_p \equiv \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho} \quad (5.221)$$

$$P = |\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}| \quad (5.222)$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |d\mathbf{n} + \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| = |d\mathbf{n} - P\mathbf{u}_p| = \sqrt{d^2 + P^2} \quad (5.223)$$

$$\nabla'_s R = \frac{\partial R}{\partial P} \mathbf{u}_p = \frac{P}{R} \mathbf{u}_p = \frac{\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}}{R} \quad (5.224)$$

これより、積分 I_2 に対して、特異点 $P = 0$ の点を含む微小領域を s_ϵ として、次のように領域 s_ϵ とそれ以外に分けて積分し、それから極限を求める。

$$I_2 = \iint_S \frac{\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}}{R} dS' = \lim_{s_\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S-s_\epsilon} \nabla'_s R dS' + \lim_{s_\epsilon \rightarrow 0} \iint_{s_\epsilon} \frac{\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}}{R} dS' \quad (5.225)$$

ここで、

$$\frac{R}{P} = \frac{\sqrt{d^2 + P^2}}{P} = \sqrt{\frac{d^2}{P^2} + 1} \quad (5.226)$$

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{R}{P} \right) = \frac{\partial}{\partial P} \left(\sqrt{\frac{d^2}{P^2} + 1} \right) = -\frac{d^2}{P^3} \frac{P}{\sqrt{d^2 + P^2}} = -\frac{d^2}{P^2} \frac{1}{R} \quad (5.227)$$

また、

$$\begin{aligned} \nabla'_s \cdot \left(\frac{R}{P} \mathbf{u}_p \right) &= \nabla'_s \frac{R}{P} \cdot \mathbf{u}_p + \frac{R}{P} \nabla'_s \cdot \mathbf{u}_p = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{R}{P} \right) + \frac{R}{P} \frac{1}{P} = -\frac{d^2}{P^2} \frac{1}{R} + \frac{R}{P^2} \\ &= \frac{-d^2 + R^2}{P^2 R} = \frac{P^2}{P^2 R} = \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (5.228)$$

同様にして、積分 I_4 も特異点 $P = 0$ の点を含む微小領域を s_ϵ として、

$$I_4 = \iint_T \frac{dS'}{R} = \lim_{s_\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S-s_\epsilon} \nabla'_s \cdot \left(\frac{R\mathbf{P}}{P^2} \right) dS' + \lim_{s_\epsilon \rightarrow 0} \iint_{s_\epsilon} \frac{dS'}{R} \quad (5.229)$$

と分けて考えることにする。

5.8.3 周回積分への変換

式(5.229)の第1項は $P = 0$ の点を除いた積分であり、次のようにガウスの2次元発散定理により周回積分に変換できる。

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S-s_\epsilon} \nabla'_s \cdot \left(\frac{R\mathbf{P}}{P^2} \right) dS' &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C-c_\epsilon} \frac{R\mathbf{P}}{P^2} \cdot d\mathbf{u}' \\ &= \oint_C \frac{R}{P^2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}') dl' + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{-c_\epsilon} \frac{R}{P} (\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}') dl' \end{aligned} \quad (5.230)$$

ただし、周回積分路 C は面 S の周辺、 c_ϵ は面 s_ϵ の周辺の各々閉じた経路を示す。また、ベクトル線積分要素 $d\mathbf{u}' (= \mathbf{u}' dl')$ の方向は、面 S 、 s_ϵ 上で積分路 C 、 c_ϵ の法線方向にとる。上式の第 1 項は、積分路 C が 3 角形領域の辺 i に沿う直線の積分路 L_i となるので、

$$\oint_C \frac{R}{P^2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}') dl' = \sum_i (\mathbf{P}^{(0)} \cdot \mathbf{u}'_i) \int_{L_i} \frac{R}{P^2} dl' \quad (5.231)$$

ここで、

$$P^2 = (P^{(0)})^2 + l'^2 \quad (5.232)$$

$$R^2 = d^2 + (P^{(0)})^2 + l'^2 = d^2 + P^2 \quad (5.233)$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{R}{P^2} &= \frac{R}{P^2} \frac{R}{R} = \frac{P^2 + d^2}{P^2 R} = \frac{1}{R} + \frac{d^2}{P^2 R} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d^2 + (P^{(0)})^2 + l'^2}} + \frac{d^2}{\{(P^{(0)})^2 + l'^2\}^2 \sqrt{d^2 + (P^{(0)})^2 + l'^2}} \end{aligned} \quad (5.234)$$

辺 i (積分路 L_i) の両端の座標成分を $l = l_i^{(-)}, l_i^{(+)}$ とすると、

$$\begin{aligned} \int_{L_i} \frac{R}{P^2} dl' &= \int_{L_i} \left(\frac{1}{R} + \frac{d^2}{P^2 R} \right) dl' \\ &= \int_{l_i^{(-)}}^{l_i^{(+)}} \frac{dl'}{\sqrt{d^2 + (P_i^{(0)})^2 + l'^2}} + d^2 \int_{l_i^{(-)}}^{l_i^{(+)}} \frac{dl'}{\{(P_i^{(0)})^2 + l'^2\} \sqrt{d^2 + (P_i^{(0)})^2 + l'^2}} \end{aligned} \quad (5.235)$$

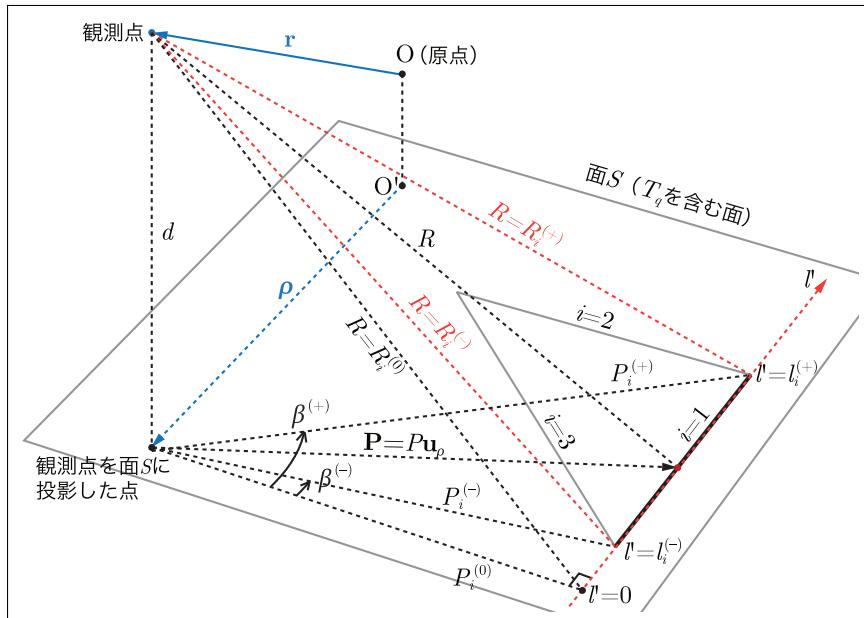


図 5.5. 辺 i に沿う線積分に関する変数の定義 ($i = 1$ のとき)

上式は、置換積分 ($t \equiv x + \sqrt{x^2 + a^2}$) より得られる不定積分公式（積分定数 C は省略）

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| \quad (5.236)$$

を用い、

$$R_i^{(\pm)} = \sqrt{d^2 + (P_i^{(0)})^2 + (l_i^{(\pm)})^2} \quad (5.237)$$

とおいて、式 (5.235) の第 1 項は、

$$\begin{aligned} & \int_{l_i^{(-)}}^{l_i^{(+)}} \frac{dl'}{\sqrt{d^2 + (P_i^{(0)})^2 + l'^2}} \\ &= \left[\ln \left| l' + \sqrt{d^2 + (P_i^{(0)})^2 + l'^2} \right| \right]_{l_i^{(-)}}^{l_i^{(+)}} \\ &= \ln \left| l_i^{(+)} + \sqrt{d^2 + (P_i^{(0)})^2 + (l_i^{(+)})^2} \right| - \ln \left| l_i^{(-)} + \sqrt{d^2 + (P_i^{(0)})^2 + (l_i^{(-)})^2} \right| \\ &= \ln \left| l_i^{(+)} + R_i^{(+)} \right| - \ln \left| l_i^{(-)} + R_i^{(-)} \right| = \ln \left| \frac{l_i^{(+)} + R_i^{(+)}}{l_i^{(-)} + R_i^{(-)}} \right| \end{aligned} \quad (5.238)$$

また、置換積分 ($|q|x \equiv p\sqrt{x^2 + p^2 + q^2} \tan t$) より得られる不定積分公式（積分定数 C は省略）

$$\int \frac{dx}{(x^2 + p^2)\sqrt{x^2 + p^2 + q^2}} = \frac{1}{|pq|} \tan^{-1} \left(\frac{|q|x}{p\sqrt{x^2 + p^2 + q^2}} \right) \quad (5.239)$$

を用いると、式 (5.235) の第 2 項は、

$$\begin{aligned} & d^2 \int_{l'=l_i^{(-)}}^{l_i^{(+)}} \frac{dl'}{\left\{ (P_i^{(0)})^2 + l'^2 \right\} \sqrt{d^2 + (P_i^{(0)})^2 + l'^2}} \\ &= \frac{d^2}{P_i^{(0)}|d|} \left[\tan^{-1} \left(\frac{|d|l'}{P_i^{(0)}\sqrt{d^2 + (P_i^{(0)})^2 + l'^2}} \right) \right]_{l'=l_i^{(-)}}^{l_i^{(+)}} \\ &= \frac{|d|}{P_i^{(0)}} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{|d|l_i^{(+)}}{P_i^{(0)}R_i^{(+)}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{|d|l_i^{(-)}}{P_i^{(0)}R_i^{(-)}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.240)$$

積分路 $-c_\epsilon$ においては、 $\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}' = -1$, $dl' = Pd\phi$, $R = \sqrt{d^2 + \epsilon^2}$ より、

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{-c_\epsilon} \frac{R}{P} (\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}') dl' &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\alpha \frac{R}{P} (-1) P d\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-R) \int_0^\alpha d\phi \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\sqrt{d^2 + \epsilon^2} \cdot \alpha = -\alpha|d| \end{aligned} \quad (5.241)$$

一方、式(5.229)の I_4 の第2項は、 $P=0$ の点を座標原点にしたローカルな極座標系を考え、積分範囲 s_ϵ を半径 ϵ 、平面角 α [rad]の円形領域にとり、 $t \equiv d^2 + P^2$ の置換積分を実行すると、次のようなになる。

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{s_\epsilon} \frac{dS'}{R} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\phi=0}^{\alpha} \int_{P=0}^{\epsilon} \frac{P dP d\phi}{\sqrt{d^2 + P^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\phi]_0^\alpha \int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha [\sqrt{t}] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha \left[\sqrt{d^2 + P^2} \right]_0^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha (\sqrt{d^2 + \epsilon^2} - |d|) = 0\end{aligned}\quad (5.242)$$

よって、

$$\begin{aligned}I_4 &= \iint_T \frac{dS'}{R} \\ &= -\alpha |d| + \sum_i (\mathbf{u}_{P0,i} \cdot \mathbf{u}'_i) \\ &\quad \cdot \left[P_i^{(0)} \ln \left| \frac{l_i^{(+)} + R_i^{(+)}}{l_i^{(-)} + R_i^{(-)}} \right| + |d| \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{|d| l_i^{(+)}}{P_i^{(0)} R_i^{(+)}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{|d| l_i^{(-)}}{P_i^{(0)} R_i^{(-)}} \right) \right\} \right]\end{aligned}\quad (5.243)$$

ただし、

$$\alpha = \sum_i (\mathbf{u}_{P0,i} \cdot \mathbf{u}'_i) \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{l_i^{(+)}}{P_i^{(0)}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{l_i^{(-)}}{P_i^{(0)}} \right) \right\} \quad (5.244)$$

また、

$$\beta \equiv \tan^{-1} \frac{l_i^{(\pm)}}{P_i^{(0)}} \quad (5.245)$$

$$\gamma \equiv \tan^{-1} \frac{|d| l_i^{(\pm)}}{P_i^{(0)} R_i^{(\pm)}} \quad (5.246)$$

とおき、正接の加法定理

$$\tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan \beta - \tan \gamma}{1 + \tan \beta \tan \gamma} \quad (5.247)$$

を用いると、

$$(l_i^{(\pm)})^2 = (P_i^{(\pm)})^2 - (P_i^{(0)})^2 \quad (5.248)$$

$$(P_i^{(\pm)})^2 = (R_i^{(\pm)})^2 - |d|^2 \quad (5.249)$$

$$(P_i^{(0)})^2 = (R_i^{(0)})^2 - |d|^2 \quad (5.250)$$

より、次の関係が得られる(導出省略)。

$$\tan^{-1} \left(\frac{l_i^{(\pm)}}{P_i^{(0)}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{|d| l_i^{(\pm)}}{P_i^{(0)} R_i^{(\pm)}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{P_i^{(0)} l_i^{(\pm)}}{(R_i^{(0)})^2 + |d| R_i^{(\pm)}} \right) \quad (5.251)$$

これより、

$$\begin{aligned}
I_4 &= \iint_T \frac{dS'}{R} \\
&= \sum_i (\mathbf{u}_{P0,i} \cdot \mathbf{u}'_i) \left[P_i^{(0)} \ln \left| \frac{l_i^{(+)} + R_i^{(+)}}{l_i^{(-)} + R_i^{(-)}} \right| \right. \\
&\quad \left. - |d| \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{P_i^{(0)} l_i^{(+)}}{(R_i^{(0)})^2 + |d|R_i^{(+)}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{P_i^{(0)} l_i^{(-)}}{(R_i^{(0)})^2 + |d|R_i^{(-)}} \right) \right\} \right] \quad (5.252)
\end{aligned}$$

積分 I_2 についても、式 (5.225) の第 1 項は 2 次元勾配定理より、周回積分（積分路 C および c_ϵ ）に変換でき、第 2 項は I_4 の計算と同様にしてゼロになる（導出省略）。よって、

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{s_\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S-s_\epsilon} \nabla'_s R dS' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C-c_\epsilon} R \mathbf{u}' dl' \\
&= \sum_i \mathbf{u}'_i \int_{L_i} R dl' + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-c_\epsilon} R \mathbf{u}' dl' \\
&= \sum_i \mathbf{u}'_i \int_{l_i^{(-)}}^{l_i^{(+)}} \sqrt{d^2 + (P_i^{(0)})^2 + l'^2} dl' + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R \int_0^\alpha \mathbf{u}' \epsilon d\phi \quad (5.253)
\end{aligned}$$

上式の第 2 項はゼロ、第 1 項は置換積分 ($t \equiv x + \sqrt{x^2 + a^2}$) より得られる不定積分公式（積分定数 C は省略）

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| \right) \quad (5.254)$$

より、

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_i \mathbf{u}'_i \frac{1}{2} \left[l' \sqrt{d^2 + (P_i^{(0)})^2 + l'^2} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ d^2 + (P_i^{(0)})^2 \right\} \ln \left| l' + \sqrt{d^2 + (P_i^{(0)})^2 + l'^2} \right| \right]_{l_i^{(-)}}^{l_i^{(+)}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{u}'_i \left[\left\{ l^{(+)} R_i^{(+)} + (R_i^{(0)})^2 \ln |l_i^{(+)} + R_i^{(+)}| \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ l^{(-)} R_i^{(-)} + (R_i^{(0)})^2 \ln |l_i^{(-)} + R_i^{(-)}| \right\} \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{u}'_i \left\{ (R_i^{(0)})^2 \ln \left| \frac{l_i^{(+)} + R_i^{(+)}}{l_i^{(-)} + R_i^{(-)}} \right| + l_i^{(+)} R_i^{(+)} - l_i^{(-)} R_i^{(-)} \right\} \quad (5.255)
\end{aligned}$$

5.9 3 角形領域の別の積分について

5.9.1 3 角形頂点が特異点となる場合

観測点 P が 3 角形の頂点の一つである \mathbf{v}_2 のとき, ポテンシャル積分において, $\mathbf{r} = \mathbf{v}_2$ が \mathbf{r}' と一致すると被積分関数は特異点になる. これに対して, Duffy Transform^{*6} より, 変数変換として, $\eta \equiv \gamma(1 - \xi)$ とおく方法がある. これより, 位置ベクトル \mathbf{r}' は次のようになる.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \mathbf{v}_1 + \xi(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \gamma(1 - \xi)(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \quad (0 \leq \xi, \eta \leq 1) \\ &= \{1 - \xi - \gamma(1 - \xi)\}\mathbf{v}_1 + \xi\mathbf{v}_2 + \gamma(1 - \xi)\mathbf{v}_3 \\ &= (1 - \xi)(1 - \gamma)\mathbf{v}_1 + \xi\mathbf{v}_2 + \gamma(1 - \xi)\mathbf{v}_3\end{aligned}\tag{5.256}$$

微分して,

$$\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \xi} = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \gamma(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \tag{5.257}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \gamma} = (1 - \xi)(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \tag{5.258}$$

ベクトル積は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \gamma} &= \left\{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \gamma(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)\right\} \times (1 - \xi)(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \\ &= (1 - \xi)(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)\end{aligned}\tag{5.259}$$

これより, 面積要素 dS' は,

$$\begin{aligned}dS' &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \gamma} \right| d\xi d\gamma = (1 - \xi) \left| (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \right| d\xi d\gamma \\ &= (1 - \xi) 2A_q d\xi d\gamma\end{aligned}\tag{5.260}$$

ただし, A_q は 3 角形領域の面積を示し,

$$A_q = \frac{1}{2} \left| (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \right| \tag{5.261}$$

$\mathbf{r} = \mathbf{v}_2$ のとき, 観測点 P と波源との距離 R は,

$$\begin{aligned}R &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{r}'| \\ &= \left| \mathbf{v}_2 - \left\{ (1 - \xi)(1 - \gamma)\mathbf{v}_1 + \xi\mathbf{v}_2 + \gamma(1 - \xi)\mathbf{v}_3 \right\} \right| \\ &= |-(1 - \xi)(1 - \gamma)\mathbf{v}_1 + (1 - \xi)\mathbf{v}_2 - \gamma(1 - \xi)\mathbf{v}_3| \\ &= \left| (1 - \xi) \left\{ -(1 - \gamma)\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \gamma\mathbf{v}_3 \right\} \right|\end{aligned}\tag{5.262}$$

^{*6} Walton C. Gibson, "The Method of Moments in Electromagnetics," 2nd Ed., p.267, CRC Press (2015), ISBN-13: 978-0367365066.

ここで, $0 \leq \xi \leq 1$ とえ,

$$R = (1 - \xi) |(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \gamma(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)| \quad (5.263)$$

これより,

$$\begin{aligned} \frac{dS'}{R} &= \frac{(1 - \xi) |(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)| d\xi d\gamma}{(1 - \xi) |(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \gamma(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)|} \\ &= \frac{2A_q d\xi d\gamma}{|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \gamma(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)|} \end{aligned} \quad (5.264)$$

三角形領域 $T_q^{(+)}$ の頂点 \mathbf{v}_2 に観測点がある場合, ポテンシャル積分は,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{qq,1} &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{l_{q,1}}{2A_q} \iint_{T_q^{(+)}} (\mathbf{r}' - \mathbf{v}_{q,1}) e^{-jkR} \frac{dS'}{R} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} l_{q,1} \int_{\xi=0}^1 \int_{\gamma=0}^1 (\mathbf{r}' - \mathbf{v}_{q,1}) \frac{e^{-jkR} d\xi d\gamma}{|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \gamma(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)|} \end{aligned} \quad (5.265)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{qq,1} &= \frac{l_{q,1}}{2\pi j \omega \epsilon} \iint_{T_q^{(+)}} e^{-jkR} \frac{dS'}{R} \\ &= \frac{l_{q,1}}{\pi j \omega \epsilon} A_q \int_{\xi=0}^1 \int_{\gamma=0}^1 \frac{e^{-jkR} d\xi d\gamma}{|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \gamma(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)|} \end{aligned} \quad (5.266)$$

5.9.2 3 角形領域内部に特異点がある場合の積分

三角形領域 $T_q^{(+)}$ 内部の面上に観測点がある場合, その点を新たな頂点として 3 つの 3 角形に分割し, 特異点が新たな 3 角形の \mathbf{v}_2 となるように積分すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{qq,1} &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{l_{q,1}}{2A_q} \iint_{T_q^{(+)}} (\mathbf{r}' - \mathbf{v}_{q,1}) e^{-jkR} \frac{dS'}{R} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{l_{q,1}}{A_q} \left(A_{q,1} \int_{\xi=0}^1 \int_{\gamma=0}^1 (\mathbf{r}' - \mathbf{v}_{q,1}) \frac{e^{-jkR} d\xi d\gamma}{|(\mathbf{v}_{q,1} - \mathbf{v}_1) - \gamma(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)|} \right. \\ &\quad + A_{q,2} \int_{\xi=0}^1 \int_{\gamma=0}^1 (\mathbf{r}' - \mathbf{v}_{q,1}) \frac{e^{-jkR} d\xi d\gamma}{|(\mathbf{v}_{q,1} - \mathbf{v}_2) - \gamma(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)|} \\ &\quad \left. + A_{q,3} \int_{\xi=0}^1 \int_{\gamma=0}^1 (\mathbf{r}' - \mathbf{v}_{q,1}) \frac{e^{-jkR} d\xi d\gamma}{|(\mathbf{v}_{q,1} - \mathbf{v}_3) - \gamma(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)|} \right) \end{aligned} \quad (5.267)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{qq,1} &= \frac{l_{q,1}}{2\pi j\omega\epsilon} \iint_{T_q^{(+)}} e^{-jkR} \frac{dS'}{R} \\
&= \frac{l_{q,1}}{\pi j\omega\epsilon} \left(A_{q,1} \int_{\xi=0}^1 \int_{\gamma=0}^1 \frac{e^{-jkR} d\xi d\gamma}{|(\mathbf{v}_{q,1} - \mathbf{v}_1) - \gamma(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)|} \right. \\
&\quad + A_{q,2} \int_{\xi=0}^1 \int_{\gamma=0}^1 \frac{e^{-jkR} d\xi d\gamma}{|(\mathbf{v}_{q,1} - \mathbf{v}_2) - \gamma(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)|} \\
&\quad \left. + A_{q,3} \int_{\xi=0}^1 \int_{\gamma=0}^1 \frac{e^{-jkR} d\xi d\gamma}{|(\mathbf{v}_{q,1} - \mathbf{v}_3) - \gamma(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)|} \right) \tag{5.268}
\end{aligned}$$

ここで、

$$A_q = \sum_{i=1}^3 A_{q,i} \tag{5.269}$$

5.9.3 3 角形領域の辺上に特異点がある場合の積分

三角形領域 $T_q^{(+)}$ の辺上に観測点がある場合、その点を新たな頂点として 2 つの 3 角形に分割し、特異点が新たな 3 角形の \mathbf{v}_2 となるように積分すると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{qq,1} &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{l_{q,1}}{2A_q} \iint_{T_q^{(+)}} (\mathbf{r}' - \mathbf{v}_{q,1}) e^{-jkR} \frac{dS'}{R} \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \frac{l_{q,1}}{A_q} \left(A_{q,1} \int_{\xi=0}^1 \int_{\gamma=0}^1 (\mathbf{r}' - \mathbf{v}_{q,1}) \frac{e^{-jkR} d\xi d\gamma}{|(\mathbf{v}_{q,1} - \mathbf{v}_1) - \gamma(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)|} \right. \\
&\quad \left. + A_{q,2} \int_{\xi=0}^1 \int_{\gamma=0}^1 (\mathbf{r}' - \mathbf{v}_{q,1}) \frac{e^{-jkR} d\xi d\gamma}{|(\mathbf{v}_{q,1} - \mathbf{v}_3) - \gamma(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)|} \right) \tag{5.270}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{qq,1} &= \frac{l_{q,1}}{2\pi j\omega\epsilon} \iint_{T_q^{(+)}} e^{-jkR} \frac{dS'}{R} \\
&= \frac{l_{q,1}}{\pi j\omega\epsilon} \left(A_{q,1} \int_{\xi=0}^1 \int_{\gamma=0}^1 \frac{e^{-jkR} d\xi d\gamma}{|(\mathbf{v}_{q,1} - \mathbf{v}_1) - \gamma(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)|} \right. \\
&\quad \left. + A_{q,2} \int_{\xi=0}^1 \int_{\gamma=0}^1 \frac{e^{-jkR} d\xi d\gamma}{|(\mathbf{v}_{q,1} - \mathbf{v}_3) - \gamma(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)|} \right) \tag{5.271}
\end{aligned}$$

ここで、

$$A_q = \sum_{i=1}^2 A_{q,i} \tag{5.272}$$

5.10 Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai (PM-CHWT) 積分方程式

5.10.1 観測点が境界面にない場合

有限空間（領域 V ）に電磁流源があり、その有限空間の境界（面 S_1, \dots ）以外の観測点 P での電界 \mathbf{E}_p および磁界 \mathbf{H}_p は^{*7}、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p = & -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(j\omega\mu\psi \mathbf{J} + \mathbf{J}_m \times \nabla' \psi - \frac{\rho}{\epsilon} \nabla' \psi \right) dV' \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1 + \dots} \left\{ j\omega\mu\psi (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla' \psi - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla' \psi \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.273)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p = & \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\psi \mathbf{J}_m + \mathbf{J} \times \nabla' \psi + \frac{\rho_m}{\mu} \nabla' \psi \right) dV' \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1 + \dots} \left\{ j\omega\epsilon\psi (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla' \psi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \nabla' \psi \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.274)$$

領域 V に電磁流源がない場合は、上式は第 2 項の面積分のみである。逆に、境界面のない無限空間、あるいは境界面の電磁界や等価波源（equivalent sources）がゼロの場合は、上式は第 1 項の体積積分のみである。

5.10.2 観測点が境界面にある場合

ストラットンの定理より、面 $S_1 + \dots + \Sigma$ に囲まれた領域 V において、波源の微分演算子を $\nabla \rightarrow \nabla'$ 、領域 V' の外向き法線ベクトルを $\mathbf{n}'_o (= -\mathbf{n})$ 、積分要素も $dV \rightarrow dV'$, $dS \rightarrow dS'$ として、次式が成り立つ[†]。

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(j\omega\mu\psi \mathbf{J} + \mathbf{J}_m \times \nabla' \psi - \frac{\rho}{\epsilon} \nabla' \psi \right) dV' \\ & = \oint_{S_1 + \dots + \Sigma} \left\{ j\omega\mu\psi (\mathbf{n}'_o \times \mathbf{H}) - (\mathbf{n}'_o \times \mathbf{E}) \times \nabla' \psi - (\mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{E}) \nabla' \psi \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.275)$$

面 S_i の境界条件より、面積分方程式が得られ、波源を基底関数で展開し、展開係数を数値的に解くことできる^{*8}。このとき、観測点 \mathbf{r} は面 S_i にとるため、面積分に特異点が生じる。観測点 \mathbf{r} （微小の球面 Σ の内部）と面 S_i 上の波源 \mathbf{r}' との距離を r_0 として、上式の面積分のうち、微小の球面 Σ および観測点が面上に接近している面 S_Σ の面積分について $r_0 \rightarrow 0$

^{*7} Samuel Silver, “Microwave Antenna Theory and Design,” 3.8. General Solution of the Field Equations in Terms of the Sources, for a Time-periodic Field, McGraw Hill (1949), IEE, reprint (1984), ISBN-13: 978-0863410178.

^{*8} A. J. Poggio and E. K. Miller, “Integral equation solutions of three dimensional scattering problems,” in *Computer Techniques for Electromagnetics*, Chapter 4, R. Mittra, Ed. Elmsford, NY: Permagon (1973), ISSN: 0074-803X.

の極限を求めるとき、

$$\begin{aligned} \lim_{r_0 \rightarrow 0} \iint_{\Sigma - S_\Sigma} \{ \} dS' &= \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left(-e^{-jkr_0} \iint_{\Sigma - S_\Sigma} \mathbf{E} d\Omega \right) = -\mathbf{E}_p \left(\iint_{\Sigma} d\Omega - \iint_{S_\Sigma} d\Omega \right) \\ &= -(4\pi - \Omega_p) \mathbf{E}_p \end{aligned} \quad (5.276)$$

これより、

$$\begin{aligned} &\iiint_V \left(j\omega\mu\psi \mathbf{J} + \mathbf{J}_m \times \nabla' \psi - \frac{\rho}{\epsilon} \nabla' \psi \right) dV' \\ &= -(4\pi - \Omega_p) \mathbf{E}_p + \iint_{S_1+...} \left\{ j\omega\mu\psi (\mathbf{n}'_o \times \mathbf{H}) - (\mathbf{n}'_o \times \mathbf{E}) \times \nabla' \psi - (\mathbf{n}'_o \cdot \mathbf{E}) \nabla' \psi \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.277)$$

ただし、 \iint は特異点 (singularities) を取り除いたコーシーの主値積分 (Cauchy principle value integral) を示す。よって、 \mathbf{E}_p は、 $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}'_o$ として、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= -\frac{1}{4\pi \left(1 - \frac{\Omega_p}{4\pi} \right)} \iiint_V \left(j\omega\mu\psi \mathbf{J} + \mathbf{J}_m \times \nabla' \psi - \frac{\rho}{\epsilon} \nabla' \psi \right) dV' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi \left(1 - \frac{\Omega_p}{4\pi} \right)} \iint_{S_1+...} \left\{ j\omega\mu\psi (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) - (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \times \nabla' \psi - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}) \nabla' \psi \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.278)$$

ここで、

$$T \equiv \frac{1}{1 - \frac{\Omega_p}{4\pi}} \quad (5.279)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= -\frac{T}{4\pi} \iiint_V \left(j\omega\mu\psi \mathbf{J} + \mathbf{J}_m \times \nabla' \psi - \frac{\rho}{\epsilon} \nabla' \psi \right) dV' \\ &\quad - \frac{T}{4\pi} \iint_{S_1+...} \left\{ j\omega\mu\psi (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) - (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \times \nabla' \psi - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}) \nabla' \psi \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.280)$$

双対性より、磁界 \mathbf{H}_p は、

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p &= -\frac{T}{4\pi} \iiint_V \left(j\omega\mu\psi \mathbf{J}_m - \mathbf{J} \times \nabla' \psi - \frac{\rho_m}{\mu} \nabla' \psi \right) dV' \\ &\quad - \frac{T}{4\pi} \iint_{S_1+...} \left\{ j\omega\epsilon\psi (\mathbf{n}' \times (-\mathbf{E})) - (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla' \psi - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H}) \nabla' \psi \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.281)$$

次のように変形すれば、文献の (4.8b) と一致する。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p &= \frac{T}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\psi \mathbf{J}_m + \mathbf{J} \times \nabla' \psi + \frac{\rho_m}{\mu} \nabla' \psi \right) dV' \\ &\quad + \frac{T}{4\pi} \iint_{S_1+...} \left\{ j\omega\epsilon\psi (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) + (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla' \psi + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H}) \nabla' \psi \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.282)$$

ただし、観測点が境界面 S_Σ にあり、その面が滑らかな場合、 $\Omega_P = 2\pi$ であり、 $T = 2$ となる。なお、観測点が境界面にない場合、 $\Omega_P = 0$ であり、 $T = 1$ となる。

5.10.3 入射波がある場合

面 S_1 と面 S で囲まれた領域 V に電磁流源があり、面 S_1 を無限遠方まで十分大きする。このとき、十分遠方の面 S_1 上の波源により、観測点 P では平面波が入射しているとみなす。また、閉曲面 S 内部には何らかの波源があって、面 S 上の電磁界が 2 次波源として与えられているものとする（境界条件）。これより、観測点 P が面 S 上にあるとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \mathbf{E}_p &= \mathbf{E}^{\text{inc}} - \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(j\omega\mu\psi \mathbf{J} + \mathbf{J}_m \times \nabla' \psi - \frac{\rho}{\epsilon} \nabla' \psi \right) dV' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+} \left\{ j\omega\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H})\psi - (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \times \nabla' \psi - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}) \nabla' \psi \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.283)$$

したがって、**電界積分方程式** (electric field integral equation: EFIE) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= T \mathbf{E}^{\text{inc}} - \frac{T}{4\pi} \iiint_V \left(j\omega\mu\psi \mathbf{J} + \mathbf{J}_m \times \nabla' \psi - \frac{\rho}{\epsilon} \nabla' \psi \right) dV' \\ &\quad - \frac{T}{4\pi} \iint_S \left\{ j\omega\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H})\psi - (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \times \nabla' \psi - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}) \nabla' \psi \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.284)$$

同様にして、**磁界積分方程式** (magnetic field integral equation: MFIE) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p &= T \mathbf{H}^{\text{inc}} + \frac{T}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\psi \mathbf{J}_m + \mathbf{J} \times \nabla' \psi + \frac{\rho_m}{\mu} \nabla' \psi \right) dV' \\ &\quad + \frac{T}{4\pi} \iint_S \left\{ j\omega\epsilon(\mathbf{n}' \times \mathbf{E})\psi + (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla' \psi + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H}) \nabla' \psi \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.285)$$

ここで、閉曲面 S 上の 2 次波源による散乱磁界 \mathbf{H}_s は、

$$\mathbf{H}_s = \frac{T}{4\pi} \iint_S \left\{ j\omega\epsilon(\mathbf{n}' \times \mathbf{E})\psi + (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla' \psi + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H}) \nabla' \psi \right\} dS' \quad (5.286)$$

Maxwell の方程式 $\nabla' \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$ より、

$$\mathbf{H}_s = \frac{T}{4\pi} \iint_S \left\{ \mathbf{n}' \times (\nabla' \times \mathbf{H})\psi + (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla' \psi + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H}) \nabla' \psi \right\} dS' \quad (5.287)$$

波源のない領域 (source free region) であれば、式 (5.284), 式 (5.285) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= T \mathbf{E}^{\text{inc}} \\ &\quad - \frac{T}{4\pi} \iint_S \left\{ j\omega\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H})\psi - (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \times \nabla' \psi - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}) \nabla' \psi \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.288)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p &= T \mathbf{H}^{\text{inc}} \\ &\quad + \frac{T}{4\pi} \iint_S \left\{ j\omega\epsilon(\mathbf{n}' \times \mathbf{E})\psi + (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla' \psi + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H}) \nabla' \psi \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.289)$$

5.10.4 完全導体による散乱問題（面積分方程式）

面 S として完全導体からなる散乱体表面のみを考え、入射波 \mathbf{E}^{inc} , \mathbf{H}^{inc} がある場合、完全導体表面の電界 \mathbf{E} の接線成分はゼロである。閉曲面 S の外向き法線ベクトルを \mathbf{n} とすると、面磁流 \mathbf{K}_m がゼロ、つまり

$$\mathbf{K}_m = -(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = 0 \quad (\text{on } S) \quad (5.290)$$

閉曲面 S では磁荷 η_m もゼロゆえ、

$$\eta_m = \mu(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) = 0 \quad (\text{on } S) \quad (5.291)$$

観測点を面 S 上にとると、式(5.288)の被積分関数において $\mathbf{n}' \times \mathbf{E} = 0$ となり、

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= \mathbf{n} \times \left(T\mathbf{E}^{\text{inc}} - \frac{T}{4\pi} \iint_S \{j\omega\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H})\psi - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E})\nabla'\psi\} dS' \right) \\ &= 0 \quad (\text{on } S) \end{aligned} \quad (5.292)$$

よって、

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \times \iint_S \{j\omega\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H})\psi - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E})\nabla'\psi\} dS' \quad (\text{on } S) \quad (5.293)$$

また、式(5.289)より、 $\mathbf{n}' \times \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H} = 0$ ゆえ、

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \left(T\mathbf{H}^{\text{inc}} + \frac{T}{4\pi} \iint_S (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla'\psi dS' \right) \quad (\text{on } S) \quad (5.294)$$

面 S が滑らかであれば、 $T = 2$ ゆえ、

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 2\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{inc}} + \frac{1}{2\pi} \mathbf{n} \times \iint_S (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla'\psi dS' \quad (\text{on } S) \quad (5.295)$$

面 S 上の電磁界の関係について、Maxwellの方程式 $\nabla' \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$ より、面 S 上の2次元微分演算子を ∇_s とすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' \cdot (\nabla' \times \mathbf{H}) &= \mathbf{n}' \cdot \left\{ \left(\nabla'_s + \mathbf{n}' \frac{\partial}{\partial n'} \right) \times \mathbf{H} \right\} = \mathbf{n}' \cdot (\nabla'_s \times \mathbf{H}) \\ &= \mathbf{H} \cdot (\nabla'_s \times \mathbf{n}') - \nabla_s \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (5.296)$$

ここで、 $\nabla' \times (\nabla'\phi) = 0$ より、

$$\nabla'_s \times \mathbf{n} = \nabla' \times \mathbf{n} = \nabla' \times \frac{\nabla'\phi}{|\nabla'\phi|} = 0 \quad (5.297)$$

これより、

$$\mathbf{n}' \cdot (\nabla' \times \mathbf{H}) = -\nabla'_s \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) = \mathbf{n}' \cdot (j\omega\epsilon\mathbf{E}) \quad (5.298)$$

等価面電流源を $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \equiv \mathbf{n}' \times \mathbf{H}$ として定義すると,

$$\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E} = \frac{j}{\omega\epsilon} \nabla'_s \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) = \frac{j}{\omega\epsilon} \nabla'_s \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \quad (5.299)$$

同様にして観測点 P においても $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ を定義する. これより, 式 (5.293) は,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \times \iint_S \left\{ j\omega\mu \mathbf{J}_s \psi - \frac{j}{\omega\epsilon} (\nabla'_s \cdot \mathbf{J}_s) \nabla' \psi \right\} dS' \\ &= \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \mathbf{n} \times \iint_S \left\{ -\omega^2 \mu \epsilon \mathbf{J}_s \psi + (\nabla'_s \cdot \mathbf{J}_s) \nabla' \psi \right\} dS' \quad (\text{on } S) \end{aligned} \quad (5.300)$$

また, 式 (5.295) は,

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) = 2\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2\pi} \mathbf{n} \times \iint_S \mathbf{J}_s \times \nabla' \psi dS' \quad (\text{on } S) \quad (5.301)$$

5.10.5 誘電体による散乱問題（面積分方程式）

誘電率 ϵ_2 の誘電体（領域 II, 閉曲面 S ）に入射波 \mathbf{E}^{inc} , \mathbf{H}^{inc} がある場合の散乱問題を考える. 誘電体の周りの空間（領域 I）の誘電率は ϵ_1 である. 面 S 上から領域 I, II 方向に向く法線ベクトルを $\mathbf{n}_i (i = 1, 2)$ とする ($\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$). 透磁率は領域 I, II とともに μ である. 媒質の境界である面 S における境界条件（boundary conditions）は,

- 電界 \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 および磁界 \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 の接線成分が連続であること.

$$\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2 = 0 \quad (\text{on } S) \quad (5.302)$$

$$\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1 + \mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_2 = 0 \quad (\text{on } S) \quad (5.303)$$

これより,

$$\mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2 = -\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 \quad (\text{on } S) \quad (5.304)$$

$$\mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_2 = -\mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1 \quad (\text{on } S) \quad (5.305)$$

- 電束密度 \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 および磁束密度 \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 の法線成分が連続であること.

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \mathbf{n}_1 \cdot (\epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2) \\ &= \epsilon_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{E}_1 + \epsilon_2 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{E}_2 = 0 \quad (\text{on } S) \end{aligned} \quad (5.306)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= \mathbf{n}_1 \cdot (\mu \mathbf{H}_1 - \mu \mathbf{H}_2) \\ &= \mu (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{H}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{H}_2) = 0 \quad (\text{on } S) \end{aligned} \quad (5.307)$$

これより,

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{E}_2 = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \quad (\text{on } S) \quad (5.308)$$

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{H}_2 = -\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{H}_1 \quad (\text{on } S) \quad (5.309)$$

ここで、式(5.288)、式(5.289)より、領域Iでは、入射波があり、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) &= T \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \\ &- \frac{T}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \iint_S \left\{ j\omega\mu(\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{H}_1)\psi_1 - (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}_1) \times \nabla'\psi_1 - (\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{E}_1)\nabla'\psi_1 \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.310)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) &= T \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{T}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \iint_S \left\{ j\omega\epsilon_1(\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}_1)\psi_1 + (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{H}_1) \times \nabla'\psi_1 + (\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{H}_1)\nabla'\psi_1 \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.311)$$

また、領域IIでは、入射波がなく、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) &= -\frac{T}{4\pi} \mathbf{n}_2 \times \iint_S \left\{ j\omega\mu(\mathbf{n}'_2 \times \mathbf{H}_2)\psi_2 \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{n}'_2 \times \mathbf{E}_2) \times \nabla'\psi_2 - (\mathbf{n}'_2 \cdot \mathbf{E}_2)\nabla'\psi_2 \right\} dS' \\ &= -\frac{T}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \iint_S \left\{ j\omega\mu(\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{H}_1)\psi_2 \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}_1) \times \nabla'\psi_2 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}(\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{E}_1)\nabla'\psi_2 \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.312)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) &= \frac{T}{4\pi} \mathbf{n}_2 \times \iint_S \left\{ j\omega\epsilon_2(\mathbf{n}'_2 \times \mathbf{E}_2)\psi_2 \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{n}'_2 \times \mathbf{H}_2) \times \nabla'\psi_2 + (\mathbf{n}'_2 \cdot \mathbf{H}_2)\nabla'\psi_2 \right\} dS' \\ &= \frac{T}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \iint_S \left\{ j\omega\epsilon_2(\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}_1)\psi_2 \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{H}_1) \times \nabla'\psi_2 + (\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{H}_1)\nabla'\psi_2 \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.313)$$

ここで、

$$\psi_i = \frac{e^{-jk_i R}}{R} \quad (i = 1, 2) \quad (5.314)$$

$$k_i = \omega\sqrt{\mu\epsilon_i} \quad (i = 1, 2) \quad (5.315)$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (5.316)$$

$$\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1 \quad (5.317)$$

上式を式(5.302)に代入して、

$$\begin{aligned} T \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) & \\ &- \frac{T}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \iint_S \left\{ j\omega\mu(\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{H}_1)\psi_1 - (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}_1) \times \nabla'\psi_1 - (\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{E}_1)\nabla'\psi_1 \right\} dS' \\ &- \frac{T}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \iint_S \left\{ j\omega\mu(\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{H}_1)\psi_2 - (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}_1) \times \nabla'\psi_2 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}(\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{E}_1)\nabla'\psi_2 \right\} dS' = 0 \end{aligned} \quad (5.318)$$

整理して,

$$\begin{aligned} & \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \iint_S \left\{ j\omega\mu(\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{H}_1)(\psi_1 + \psi_2) \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}_1) \times \nabla'(\psi_1 + \psi_2) - (\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{E}_1) \nabla' \left(\psi_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \psi_2 \right) \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.319)$$

また, 式 (5.303) に代入すると,

$$\begin{aligned} & T\mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{T}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \iint_S \left\{ j\omega\epsilon_1(\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}_1)\psi_1 + (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{H}_1) \times \nabla'\psi_1 + (\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{H}_1) \nabla'\psi_1 \right\} dS' \\ &+ \frac{T}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \iint_S \left\{ j\omega\epsilon_2(\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}_1)\psi_2 + (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{H}_1) \times \nabla'\psi_2 + (\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{H}_1) \nabla'\psi_2 \right\} dS' = 0 \end{aligned} \quad (5.320)$$

整理して,

$$\begin{aligned} & \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \iint_S \left\{ j\omega\epsilon_1(\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}_1) \left(\psi_1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \psi_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{H}_1) \times \nabla'(\psi_1 + \psi_2) + (\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{H}_1) \nabla'(\psi_1 + \psi_2) \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.321)$$

ここで, 面電流源 \mathbf{J}_s , 面磁流源 \mathbf{K}_s は,

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') = \mathbf{n}'_1 \times \mathbf{H}_1 \quad (5.322)$$

$$\mathbf{K}_s(\mathbf{r}) = -\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{K}_s(\mathbf{r}') = -\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}_1 \quad (5.323)$$

式 (5.299) より,

$$\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{j\omega\epsilon_1} \nabla'_s \cdot (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{H}_1) = -\frac{1}{j\omega\epsilon_1} \nabla'_s \cdot \mathbf{J}_s \quad (5.324)$$

同様にして,

$$\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{H}_1 = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla'_s \cdot (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}_1) = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla'_s \cdot (-\mathbf{K}_s) \quad (5.325)$$

これより、面電流源 \mathbf{J}_s 、面磁流源 \mathbf{K}_s を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \\ = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \iint_S \left\{ j\omega\mu \mathbf{J}_s (\psi_1 + \psi_2) \right. \\ \left. + \mathbf{K}_s \times \nabla' (\psi_1 + \psi_2) + \frac{1}{j\omega\epsilon_1} (\nabla'_s \cdot \mathbf{J}_s) \nabla' \left(\psi_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \psi_2 \right) \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.326)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \\ = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n}_1 \times \iint_S \left\{ j\omega\epsilon_1 \mathbf{K}_s \left(\psi_1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \psi_2 \right) \right. \\ \left. - \mathbf{J}_s \times \nabla' (\psi_1 + \psi_2) + \frac{1}{j\omega\mu} (\nabla'_s \cdot \mathbf{K}_s) \nabla' (\psi_1 + \psi_2) \right\} dS' \end{aligned} \quad (5.327)$$

5.11 2次元問題に対するPMCHWT面積分方程式

閉曲面 S 上の2次波源による散乱磁界 \mathbf{H}_s は、

$$\mathbf{H}_s = \frac{T}{4\pi} \iint_S \{ \mathbf{n}' \times (\nabla' \times \mathbf{H})\psi + (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla' \psi + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H}) \nabla' \psi \} dS' \quad (5.328)$$

5.11.1 2次元問題 (TEあるいはTM)

面 S がある方向に一様な場合、面 S の法線方向に対して TE 波と TM 波は独立である。したがって、面 S 上では電界が接線成分のみ、あるいは磁界が接線成分のみとして解析すればよい。そこで、次の式を考えてみよう^{*9}。

$$\frac{T}{4\pi} \iint_S \{ (\mathbf{n}' \cdot \nabla')(\psi \mathbf{H}) + \mathbf{n}' \times \nabla' \times (\psi \mathbf{H}) - \mathbf{n}' \nabla' \cdot (\psi \mathbf{H}) \} dS' \quad (5.329)$$

ここで、 $\mathbf{a} \equiv \psi \mathbf{H}$ おき、 $\mathbf{n} = n'_x \mathbf{u}_x + n'_y \mathbf{u}_y + n'_z \mathbf{u}_z$ 、 $a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z$ とすると、上式の被積分関数は、

$$\begin{aligned} & (\mathbf{n}' \cdot \nabla')\mathbf{a} + \mathbf{n}' \times \nabla' \times \mathbf{a} - \mathbf{n}' \nabla' \cdot \mathbf{a} \\ &= \left(n'_x \frac{\partial}{\partial x} + n'_y \frac{\partial}{\partial y} + n'_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z \right) \\ &+ (n'_x \mathbf{u}_x + n'_y \mathbf{u}_y + n'_z \mathbf{u}_z) \times \left\{ (\nabla \times \mathbf{a})_x \mathbf{u}_x + (\nabla \times \mathbf{a})_y \mathbf{u}_y + (\nabla \times \mathbf{a})_z \mathbf{u}_z \right\} \\ &- (n'_x \mathbf{u}_x + n'_y \mathbf{u}_y + n'_z \mathbf{u}_z) \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.330)$$

^{*9} A. J. Poggio and E. K. Miller, "Integral equation solutions of three dimensional scattering problems," in *Computer Techniques for Electromagnetics*, Chapter 4, R. Mittra, Ed. Elmsford, NY: Permagon (1973), ISSN: 0074-803X.

上式の x 成分は,

$$\begin{aligned}
& \left(n'_x \frac{\partial}{\partial x} + n'_y \frac{\partial}{\partial y} + n'_z \frac{\partial}{\partial z} \right) a_x + n'_y (\nabla \times \mathbf{a})_z - n'_z (\nabla \times \mathbf{a})_y - n'_x \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \\
&= n'_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + n'_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + n'_z \frac{\partial a_x}{\partial z} + n'_y \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \\
&\quad - n'_z \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) - n'_x \frac{\partial a_x}{\partial x} - n'_x \frac{\partial a_y}{\partial y} - n'_x \frac{\partial a_z}{\partial z} \\
&= n'_y \frac{\partial a_y}{\partial x} + n'_z \frac{\partial a_z}{\partial x} - n'_x \frac{\partial a_y}{\partial y} - n'_x \frac{\partial a_z}{\partial z} \\
&= \left(-n'_x \frac{\partial}{\partial y} + n'_y \frac{\partial}{\partial x} \right) a_y + \left(-n'_x \frac{\partial}{\partial z} + n'_z \frac{\partial}{\partial x} \right) a_z \\
&= -(\mathbf{n}' \times \nabla)_z a_y + (\mathbf{n}' \times \nabla)_y a_z \\
&= \{(\mathbf{n}' \times \nabla) \times \mathbf{a}\}_x
\end{aligned} \tag{5.331}$$

同様にして, y 成分, z 成分は,

$$\{(\mathbf{n}' \times \nabla) \times \mathbf{a}\}_y, \quad \{(\mathbf{n}' \times \nabla) \times \mathbf{a}\}_z$$

ゆえ,

$$(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \mathbf{a} + \mathbf{n}' \times \nabla' \times \mathbf{a} - \mathbf{n}' \nabla' \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{n}' \times \nabla) \times \mathbf{a} \tag{5.332}$$

よって,

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{n}' \cdot \nabla') (\psi \mathbf{H}) + \mathbf{n}' \times \nabla' \times (\psi \mathbf{H}) - \mathbf{n}' \nabla' \cdot (\psi \mathbf{H}) = (\mathbf{n}' \times \nabla) \times (\psi \mathbf{H}) \\
&= \psi (\mathbf{n}' \times \nabla) \times \mathbf{H}
\end{aligned} \tag{5.333}$$

一様な軸方向に沿う単位ベクトルを \mathbf{u}_z (z 軸とする), 法線ベクトル \mathbf{n}' に直交する単位ベクトルを $\mathbf{u}_\tau \equiv \mathbf{n}' \times \mathbf{u}_z$ とし, 磁界 $\mathbf{H} = H_z \mathbf{u}_z$ のとき,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{n}' \times \nabla) \times \mathbf{H} &= \left(\mathbf{n}' \times \mathbf{u}_\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{n}' \times \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \mathbf{H} = \left(-\mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{u}_\tau \frac{\partial}{\partial z} \right) \times H_z \mathbf{u}_z \\
&= -\frac{\partial H_z}{\partial z} \mathbf{n}'
\end{aligned} \tag{5.334}$$

z 方向に一様ゆえ,

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{5.335}$$

これは TM 波の問題であり, このとき式 (5.329) は次のようにゼロになる.

$$\begin{aligned}
& \frac{T}{4\pi} \iint_S \{(\mathbf{n}' \cdot \nabla') (\psi \mathbf{H}) + \mathbf{n}' \times \nabla' \times (\psi \mathbf{H}) - \mathbf{n}' \nabla' \cdot (\psi \mathbf{H})\} dS' \\
&= \frac{T}{4\pi} \iint_S \psi (\mathbf{n}' \times \nabla) \times \mathbf{H} dS' = 0
\end{aligned} \tag{5.336}$$

5.11.2 2次元問題に対する定式化

式 (5.336) を式 (5.328) から引いても散乱磁界 \mathbf{H}_s は変わらない。まず、その被積分関数の計算を行うと、

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{n}' \times (\nabla' \times \mathbf{H})\psi + (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla'\psi + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H})\nabla'\psi \right\} \\ & - \left\{ (\mathbf{n}' \cdot \nabla')(\psi \mathbf{H}) + \mathbf{n}' \times \nabla' \times (\psi \mathbf{H}) - \mathbf{n}' \nabla' \cdot (\psi \mathbf{H}) \right\} \\ & = \left\{ \mathbf{n}' \times (\nabla' \times \mathbf{H})\psi - \mathbf{n}' \times \nabla' \times (\psi \mathbf{H}) \right\} \\ & + (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla'\psi - \mathbf{n}' \nabla' \cdot (\psi \mathbf{H}) + \left[(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H})\nabla'\psi - (\mathbf{n}' \cdot \nabla')(\psi \mathbf{H}) \right] \end{aligned} \quad (5.337)$$

式 (5.337) の第 1 項の { } を計算するため、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' \times \nabla' \times (\psi \mathbf{H}) &= \mathbf{n}' \times (\psi \nabla' \times \mathbf{H} + \nabla' \psi \times \mathbf{H}) \\ &= \mathbf{n}' \times (\nabla' \times \mathbf{H})\psi + \mathbf{n}' \times (\nabla' \psi \times \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (5.338)$$

これより、

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{n}' \times (\nabla' \times \mathbf{H})\psi - \mathbf{n}' \times \nabla' \times (\psi \mathbf{H}) \right\} &= -\mathbf{n}' \times (\nabla' \psi \times \mathbf{H}) \\ &= \mathbf{n}' \times (\mathbf{H} \times \nabla' \psi) \end{aligned} \quad (5.339)$$

ここで、ベクトル公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ より、

$$\mathbf{n}' \times (\mathbf{H} \times \nabla' \psi) = \{\mathbf{n}' \cdot (\nabla' \psi)\}\mathbf{H} - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H})(\nabla' \psi) \quad (5.340)$$

式 (5.337) の第 2 項は、

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla'\psi &= (\nabla'\psi) \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}') \\ &= \{(\nabla'\psi) \cdot \mathbf{n}'\}\mathbf{H} - \{(\nabla'\psi) \cdot \mathbf{H}\}\mathbf{n}' \end{aligned} \quad (5.341)$$

式 (5.337) の第 3 項は、

$$-\mathbf{n}' \nabla' \cdot (\psi \mathbf{H}) = \mathbf{n}' \psi (\nabla' \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{n}' \{(\nabla' \psi) \cdot \mathbf{H}\} \quad (5.342)$$

式 (5.337) に、式 (5.340), 式 (5.341), 式 (5.342) を代入して、

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{n}' \cdot (\nabla' \psi)\}\mathbf{H} - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H})(\nabla' \psi) + \{(\nabla' \psi) \cdot \mathbf{n}'\}\mathbf{H} - \{(\nabla' \psi) \cdot \mathbf{H}\}\mathbf{n}' \\ & + \mathbf{n}' \psi (\nabla' \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{n}' \{(\nabla' \psi) \cdot \mathbf{H}\} + \left[(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H})\nabla'\psi - (\mathbf{n}' \cdot \nabla')(\psi \mathbf{H}) \right] \\ & = \{\mathbf{n}' \cdot (\nabla' \psi)\}\mathbf{H} + \{(\nabla' \psi) \cdot \mathbf{n}'\}\mathbf{H} + \mathbf{n}' \psi (\nabla' \cdot \mathbf{H}) - (\mathbf{n}' \cdot \nabla')(\psi \mathbf{H}) \\ & = \{\mathbf{n}' \cdot (\nabla' \psi)\}\mathbf{H} + \{(\nabla' \psi) \cdot \mathbf{n}'\}\mathbf{H} + \mathbf{n}' \psi (\nabla' \cdot \mathbf{H}) - \{\mathbf{n}' \cdot (\nabla' \psi)\}\mathbf{H} - \psi (\mathbf{n}' \cdot \nabla')\mathbf{H} \\ & = \{(\nabla' \psi) \cdot \mathbf{n}'\}\mathbf{H} + \mathbf{n}' \psi (\nabla' \cdot \mathbf{H}) - \psi (\mathbf{n}' \cdot \nabla')\mathbf{H} \\ & = \mathbf{H} \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n'} + \mathbf{n}' \psi (\nabla' \cdot \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (5.343)$$

ここで (導出省略),

$$(\mathbf{n}' \cdot \nabla')(\psi \mathbf{H}) = \{\mathbf{n}' \cdot (\nabla' \psi)\} \mathbf{H} + \psi(\mathbf{n}' \cdot \nabla')\mathbf{H} \quad (5.344)$$

したがって, 2次元問題における TM 波に対する散乱磁界 \mathbf{H}_s は次のようになる †.

$$\mathbf{H}_s = \frac{T}{4\pi} \iint_S \left\{ \mathbf{H} \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n'} + \mathbf{n}' \psi (\nabla' \cdot \mathbf{H}) \right\} dS' \quad (5.345)$$

同様にして, 2次元問題における TE 波に対する散乱電界 \mathbf{E}_s は次のようになる (導出省略).

$$\mathbf{E}_s = \frac{T}{4\pi} \iint_S \left\{ \mathbf{E} \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n'} + \mathbf{n}' \psi (\nabla' \cdot \mathbf{E}) \right\} dS' \quad (5.346)$$

これより, TE 波の入射波 \mathbf{E}^{inc} がある場合,

$$\mathbf{E}_s = T \mathbf{E}^{\text{inc}} + \frac{T}{4\pi} \iint_S \left\{ \mathbf{E} \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n'} + \mathbf{n}' \psi (\nabla' \cdot \mathbf{E}) \right\} dS' \quad (5.347)$$

また, TM 波の入射波 \mathbf{H}^{inc} がある場合,

$$\mathbf{H}_s = T \mathbf{H}^{\text{inc}} + \frac{T}{4\pi} \iint_S \left\{ \mathbf{H} \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n'} + \mathbf{n}' \psi (\nabla' \cdot \mathbf{H}) \right\} dS' \quad (5.348)$$

CHAPTER A

付録

A.1 ベクトルの演算

A.1.1 ベクトルの演算公式

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 \quad (\text{A.1})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{A.3})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (\text{A.4})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}] \mathbf{c} - [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}] \mathbf{d} \quad (\text{A.5})$$

A.1.2 ベクトルの垂直・平行な成分

$$\mathbf{a} = \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel \quad (\text{A.6})$$

ここで,

$$\mathbf{a}_\perp = \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{a}_\parallel = \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \quad (\text{A.8})$$

ただし, \mathbf{n} は単位ベクトルを示し, \mathbf{a}_\perp , \mathbf{a}_\parallel は \mathbf{n} に垂直 (perpendicular), および平行 (parallel) な \mathbf{a} の成分を各々示す.

A.1.3 2点間の距離

直角座標系 (x, y, z) において、 x, y, z 方向の単位ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とすると、

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (\text{A.10})$$

単位ベクトルを用いて、 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$ とすると、2点間の距離 R は、

$$\begin{aligned} R &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \\ &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

また、単位ベクトルを $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}'_r$ として、 $\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r, \mathbf{r}' = r'\mathbf{a}'_r$ とすると、

$$\begin{aligned} R &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \\ &= \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\ &= \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} \\ &= \sqrt{|\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{r}'|^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')} \\ &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}'_r)} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}) \\ &= xx' + yy' + zz' \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

あるいは、

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{i}) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}) \quad (\text{A.14})$$

A.1.4 点を頂点とする3角形の面積

単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ のベクトル積は、

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \quad (\text{A.17})$$

3角形の頂点を、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ とすると、この3角形の面積 A は、

$$A = \frac{1}{2} |(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)| \quad (\text{A.18})$$

ここで, $\mathbf{a} \equiv \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} \equiv \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ とおくと,

$$A = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \quad (\text{A.19})$$

ベクトル積は,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_x b_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_x b_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + a_y b_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_y b_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_y b_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + a_z b_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_z b_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_z b_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

3 角形を含む平面上に (x, y) 座標を定義して, $\mathbf{v}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_2 = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_3 = x_3 \mathbf{i} + y_3 \mathbf{j}$ とすると, 3 角形の面積 A は,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} |(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left\{ (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j} \right\} \times \left\{ (x_3 - x_1) \mathbf{i} + (y_3 - y_1) \mathbf{j} \right\} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \right| \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

A.1.5 ベクトルの演算例

直角座標系 (x, y, z) において,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{A.22})$$

の左辺から右辺を導出しよう. ただし, x , y , z 方向の単位ベクトルを \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} とする. まず, x 成分を計算すると,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\}_x &= a_y (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_z - a_z (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_y \\ &= a_y (b_x c_y - b_y c_x) - a_z (b_z c_x - b_x c_z) \\ &= b_x (a_y c_y + a_z c_z) - c_x (a_y b_y + a_z b_z) \\ &= b_x (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \\ &= b_x (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_x (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

ただし, 添字 x , y , z はベクトルの x 成分, y 成分, z 成分を各々示す. 同様にして, y 成分および z 成分は次のようになる.

$$\{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\}_y = b_y (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_y (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{A.24})$$

$$\{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\}_z = b_z (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_z (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{A.25})$$

よって、すべての成分を合成すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\}_x \mathbf{i} + \{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\}_y \mathbf{j} + \{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\}_z \mathbf{k} \\
 &= \{b_x(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_x(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\} \mathbf{i} \\
 &\quad + \{b_y(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_y(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\} \mathbf{j} + \{b_z(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_z(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\} \mathbf{k} \\
 &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

A.2 ベクトルの微分

A.2.1 ベクトルの微分公式

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \tag{A.27}$$

$$\nabla \cdot (\phi\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla\phi + \phi\nabla \cdot \mathbf{a} \tag{A.28}$$

$$\nabla \times (\phi\mathbf{a}) = \nabla\phi \times \mathbf{a} + \phi\nabla \times \mathbf{a} \tag{A.29}$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \tag{A.30}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \tag{A.31}$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \tag{A.32}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a} \tag{A.33}$$

また、

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0 \tag{A.34}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{A.35}$$

A.2.2 ストークスの定理の応用

式 (A.35) をストークスの定理を用いて証明する。まず、閉じた積分路 C でできる面として、上に膨らんだ面 S_1 を考えると、ストークスの定理は、

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \tag{A.36}$$

この積分路 C の向きを逆にした経路を $C^{(-)}$ とし、この $C^{(-)}$ からなる面として下に膨らんだ面 S_2 を考えると、ストークスの定理は、

$$\oint_{C^{(-)}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \tag{A.37}$$

両者を辺々加えると、

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{C^{(-)}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \tag{A.38}$$

上式左辺は、同じ積分路で向きが逆ゆえゼロである。よって、

$$0 = \int_{S_1+S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.39})$$

上式右辺の $S_1 + S_2$ は閉曲面を表し、この体積を微小 Δv として極限を求めるとき、 $\nabla \times \mathbf{A}$ の発散 (div) ゆえ、

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_{S_1+S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.40})$$

よって、

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.41})$$

式 (A.34) もストークスの定理を用いて証明しよう。まず、ストークスの定理を $\nabla \phi$ に対して用いると、

$$\iint_S \{\nabla \times (\nabla \phi)\} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C (\nabla \phi) \cdot \mathbf{s} ds = \oint_C \frac{\partial \phi}{\partial s} ds = [\phi]_C = 0 \quad (\text{A.42})$$

この面を微小 ΔS として極限を求めてゼロであり、右辺についてはベクトル $\nabla \phi$ の回転 (rot) ゆえ、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \iint_{\Delta S} \{\nabla \times (\nabla \phi)\} \cdot \mathbf{n} dS &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C (\nabla \phi) \cdot \mathbf{s} ds \\ &= \{\nabla \times (\nabla \phi)\} \cdot \mathbf{n} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

面のとり方は任意であり、その法線ベクトル \mathbf{n} も任意ゆえ、次式が成り立つ。

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (\text{A.44})$$

【例題 1】

直角座標系 (x, y, z) において、式 (A.35) の左辺から右辺を導出せよ。

略解 直角座標系 (x, y, z) では、

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \mathbf{A})_x + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{A})_y + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{A})_z \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

【例題 2】

直角座標系 (x, y, z) において、式 (A.34) の左辺から右辺を導出せよ。

略解 まず、 x 成分は、

$$\begin{aligned}\left\{\nabla \times (\nabla \phi)\right\}_x &= \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \phi)_z - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \phi)_y \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \\ &= 0\end{aligned}\tag{A.46}$$

同様にして、 y 成分、 z 成分も次のようになる。

$$\left\{\nabla \times (\nabla \phi)\right\}_y = 0\tag{A.47}$$

$$\left\{\nabla \times (\nabla \phi)\right\}_z = 0\tag{A.48}$$

よって、

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0\tag{A.49}$$

【例題 3】

直角座標系 (x, y, z) において、式 (A.29) の左辺から右辺を導出せよ。

略解 左辺の x 成分は、

$$\begin{aligned}\left\{\nabla \times (\phi \mathbf{a})\right\}_x &= \frac{\partial(\phi a_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\phi a_y)}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} a_z + \phi \frac{\partial a_z}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} a_y + \phi \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} a_z - \frac{\partial \phi}{\partial z} a_y\right) + \phi \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) \\ &= \left\{(\nabla \phi) \times \mathbf{a}\right\}_x + \phi (\nabla \times \mathbf{a})_x\end{aligned}\tag{A.50}$$

同様にして、 y 成分および z 成分は次のようになる。

$$\left\{\nabla \times (\phi \mathbf{a})\right\}_y = \left\{(\nabla \phi) \times \mathbf{a}\right\}_y + \phi (\nabla \times \mathbf{a})_y\tag{A.51}$$

$$\left\{\nabla \times (\phi \mathbf{a})\right\}_z = \left\{(\nabla \phi) \times \mathbf{a}\right\}_z + \phi (\nabla \times \mathbf{a})_z\tag{A.52}$$

これらを合成すれば右辺の式が得られる。

$$\nabla \times (\phi \mathbf{a}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{a} + \phi \nabla \times \mathbf{a}\tag{A.53}$$

【例題 4】

式 (A.33) を導出せよ.

略解 ベクトル演算と ∇ を用いた演算との対比を考え、ベクトル積に関わる公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (\text{A.54})$$

において、ベクトル \mathbf{A} , \mathbf{B} を ∇ に置き換え、 \mathbf{C} を \mathbf{a} に変えると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{a} \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

また、直角座標系において、左辺から右辺を導出する。まず、 x 成分については、

$$\begin{aligned} \{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})\}_x &= \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \mathbf{a})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \mathbf{a})_y \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 a_x \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

同様にして、 y 成分および z 成分は次のようになる。

$$\{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})\}_y = \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 a_y \quad (\text{A.57})$$

$$\{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})\}_z = \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 a_z \quad (\text{A.58})$$

これらを合成すれば右辺の式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})\}_x \mathbf{i} + \{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})\}_y \mathbf{j} + \{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})\}_z \mathbf{k} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 a_x \right\} \mathbf{i} + \left\{ \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 a_y \right\} \mathbf{j} \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 a_z \right\} \mathbf{k} \\ &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \left\{ (\nabla^2 a_x) \mathbf{i} + (\nabla^2 a_y) \mathbf{j} + (\nabla^2 a_z) \mathbf{k} \right\} \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

A.3 直交曲線座標系

A.3.1 直交曲線座標の定義

直交曲線座標 (orthogonal curvilinear coordinates) (u_1, u_2, u_3) における位置ベクトルを \mathbf{r} とすると、この点から微小量 du_1, du_2, du_3 だけ変位した点 $(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$ までの変位ベクトル $d\mathbf{r}$ は、次のようになる。

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 \quad (\text{A.60})$$

いま、

$$\mathbf{a}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.61})$$

とおくと、 $d\mathbf{r}$ は、

$$d\mathbf{r} = \mathbf{a}_1 du_1 + \mathbf{a}_2 du_2 + \mathbf{a}_3 du_3 \quad (\text{A.62})$$

このようにして定義した \mathbf{a}_i は、直交曲線座標の成分 u_i に沿うベクトルであるが、単位ベクトルとは限らない。ここでは、直交性 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$ ($i \neq j$) は成り立つものとする。まず、 \mathbf{a}_i の大きさを 1 とした単位ベクトル \mathbf{i}_i を

$$\mathbf{i}_i \equiv \frac{\mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.63})$$

で定義する。互いに直交するので、

$$\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = \delta_{ij} \quad (\text{A.64})$$

また、 \mathbf{a}_i の大きさ h_i ($i = 1, 2, 3$) は、

$$h_i = \sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.65})$$

ここで、 h_i は u_i の測度係数 (metrical coefficients, metric coefficients) という。これより、

$$\mathbf{a}_i = h_i \mathbf{i}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.66})$$

さて、 \mathbf{i}_i ($i = 1, 2, 3$) に関するベクトル積は、

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \quad (\text{A.67})$$

$$\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \quad (\text{A.68})$$

$$\mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \quad (\text{A.69})$$

であるから、 \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$) に関するベクトル積は、

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = h_1 \mathbf{i}_1 \times h_2 \mathbf{i}_2 = h_1 h_2 \mathbf{i}_3 \quad (\text{A.70})$$

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = h_2 \mathbf{i}_2 \times h_3 \mathbf{i}_3 = h_2 h_3 \mathbf{i}_1 \quad (\text{A.71})$$

$$\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = h_3 \mathbf{i}_3 \times h_1 \mathbf{i}_1 = h_3 h_1 \mathbf{i}_2 \quad (\text{A.72})$$

また,

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= h_1 \mathbf{i}_1 du_1 + h_2 \mathbf{i}_2 du_2 + h_3 \mathbf{i}_3 du_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 h_i \mathbf{i}_i du_i = \sum_{i=1}^3 d\mathbf{s}_i \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

上式の $d\mathbf{s}_i$ はベクトル線要素 $d\mathbf{s}_i$ を示し,

$$d\mathbf{s}_i = h_i \mathbf{i}_i du_i \equiv \mathbf{i}_i ds_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.74})$$

とおけば、線要素 (line element) ds_i ($i = 1, 2, 3$) が定義できる.

$$ds_1 = h_1 du_1 \quad (\text{A.75})$$

$$ds_2 = h_2 du_2 \quad (\text{A.76})$$

$$ds_3 = h_3 du_3 \quad (\text{A.77})$$

これより,

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 \\ &= h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

また、ベクトル面要素 $d\mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$) は,

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_1 &= d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{s}_3 = h_2 \mathbf{i}_2 du_2 \times h_3 \mathbf{i}_3 du_3 = h_2 h_3 \mathbf{i}_1 du_2 du_3 \\ &\equiv da_1 \mathbf{i}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_2 &= d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1 = h_3 \mathbf{i}_3 du_3 \times h_1 \mathbf{i}_1 du_1 = h_3 h_1 \mathbf{i}_2 du_3 du_1 \\ &\equiv da_2 \mathbf{i}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_3 &= d\mathbf{s}_1 \times d\mathbf{s}_2 = h_1 \mathbf{i}_1 du_1 \times h_2 \mathbf{i}_2 du_2 = h_1 h_2 \mathbf{i}_3 du_1 du_2 \\ &\equiv da_3 \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

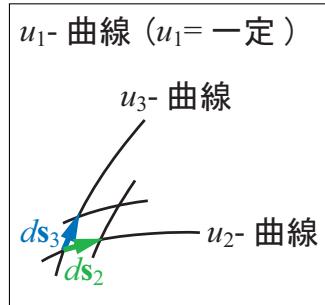


図 A.1. ベクトル面要素

面要素 (surface element) da_i ($i = 1, 2, 3$) は,

$$da_1 = h_2 h_3 du_2 du_3 \quad (\text{A.82})$$

$$da_2 = h_3 h_1 du_3 du_1 \quad (\text{A.83})$$

$$da_3 = h_1 h_2 du_1 du_2 \quad (\text{A.84})$$

また, 体積要素 (volume element) dv は,

$$\begin{aligned} dv &= d\mathbf{s}_1 \cdot (d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{s}_3) = h_1 \mathbf{i}_1 du_1 \cdot h_2 h_3 \mathbf{i}_1 du_2 du_3 \\ &= h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

いま, 直交曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) の各成分が, 直角座標系 (x, y, z) の各成分の関数として次のように与えられている場合を考える.

$$u_1 = f_1(x, y, z) \quad (\text{A.86})$$

$$u_2 = f_2(x, y, z) \quad (\text{A.87})$$

$$u_3 = f_3(x, y, z) \quad (\text{A.88})$$

(x, y, z) の代わりに (x_1, x_2, x_3) とすると,

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{A.89})$$

$$u_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{A.90})$$

$$u_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{A.91})$$

逆の関係が次のように一価関数として

$$x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3) \quad (\text{A.92})$$

$$x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3) \quad (\text{A.93})$$

$$x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3) \quad (\text{A.94})$$

で与えられているとき, 位置ベクトル \mathbf{r} は,

$$\mathbf{r} = x_1(u_1, u_2, u_3)\mathbf{i} + x_2(u_1, u_2, u_3)\mathbf{j} + x_3(u_1, u_2, u_3)\mathbf{k} \quad (\text{A.95})$$

ただし, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は, x_1, x_2, x_3 方向の各々単位ベクトルである. これより, u_i ($i = 1, 2, 3$) で微分すると,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = \frac{\partial x_1}{\partial u_i} \mathbf{i} + \frac{\partial x_2}{\partial u_i} \mathbf{j} + \frac{\partial x_3}{\partial u_i} \mathbf{k} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.96})$$

したがって, h_i ($i = 1, 2, 3$) は,

$$h_i = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_i}\right)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_i}\right)^2} \quad (\text{A.97})$$

A.3.2 勾配 (gradient)

勾配は、スカラ場の変化の割合をベクトルで表したもので、スカラ関数を Φ とすると、 $\nabla\Phi$ あるいは $\text{grad } \Phi$ と書く。勾配 $\nabla\Phi$ (あるいは $\text{grad } \Phi$) の方向は、スカラ関数の変化の割合が最大となる向きを示し、等高線表示においてはその等高線に垂直にとった方向となる。また、大きさは、変化の割合の最大値を意味している。

直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) の関数としてスカラー $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ が与えられているとき、 $d\mathbf{r}$ だけ微小変位したときの Φ の微小変化 $d\Phi$ は、次のように表すことができる。

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}du_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial u_i}du_i \quad (\text{A.98})$$

一方、勾配 (gradient) の定義より、 $d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r}$ 。よって、

$$\nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial u_i}du_i \quad (\text{A.99})$$

ただし、 $d\mathbf{r}$ は、式 (A.73) より、

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 h_i \mathbf{i}_i du_i \quad (\text{A.100})$$

両辺に \mathbf{i}_j のスカラー積をとると、

$$\mathbf{i}_j \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{i}_j \cdot \sum_{i=1}^3 h_i \mathbf{i}_i du_i = h_j du_j \quad (\text{A.101})$$

これより、 du_i は、

$$du_i = \frac{\mathbf{i}_i \cdot d\mathbf{r}}{h_i} \quad (\text{A.102})$$

したがって、

$$\nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} \frac{\mathbf{i}_i \cdot d\mathbf{r}}{h_i} \quad (\text{A.103})$$

$$\therefore \left(\nabla\Phi - \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{i}_i}{h_i} \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} \right) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (\text{A.104})$$

上式が任意の $d\mathbf{r}$ に対して成り立つためには、

$$\nabla\Phi - \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{i}_i}{h_i} \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} = 0 \quad (\text{A.105})$$

よって、スカラー関数 Φ の勾配 $\nabla\Phi$ は、

$$\nabla\Phi = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} \mathbf{i}_i \quad (\text{A.106})$$

A.3.3 発散 (divergence)

発散は、ベクトル場の源がどのように分布しているかを表す目安で、ベクトル関数を \mathbf{F} とすると、 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ あるいは $\operatorname{div} \mathbf{F}$ と書く。発散の定義式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.107})$$

で与えられ、単位体積当たり閉曲面の表面を通り抜ける正味の flux の量（流束）を求めるものである。ただし、 \mathbf{n} は曲面の法線ベクトル、積分記号 \iint は閉曲面 S にわたる面積分を表している。

いま、ベクトル \mathbf{F} が、直交曲線座標系の単位ベクトル \mathbf{i}_i ($i = 1, 2, 3$) を用いて、次式で与えられているとする。

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i}_1 + F_2 \mathbf{i}_2 + F_3 \mathbf{i}_3 = \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{i}_i \quad (\text{A.108})$$

このとき、 u_1 -曲面 (u_1 一定)、 u_2 -曲面 (u_2 一定)、 u_3 -曲面 (u_3 一定) で囲まれる微小体積から出るこのベクトル \mathbf{F} の流束を考えてみる。

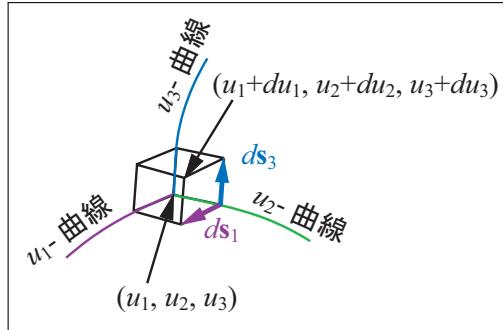


図 A.2. 微小な体積要素

まず、 u_2 曲面上の面要素から出るベクトル \mathbf{F} の流束は、

$$\begin{aligned} & \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \Big|_{u_2+du_2} + \mathbf{F} \cdot (-d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \Big|_{u_2} \\ & \simeq \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \Big|_{u_2} + \frac{\partial}{\partial u_2} \{ \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \} du_2 - \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \Big|_{u_2} \\ & = \frac{\partial}{\partial u_2} \{ \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \} du_2 \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

ただし、 du_2 は座標の増分を意味するもので、直接、線要素になるわけではない。ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) &= \left\{ \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{i}_i \right\} \cdot (h_3 h_1 \mathbf{i}_2 du_3 du_1) \\ &= F_2 h_3 h_1 du_3 du_1 \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

より,

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \{ \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}_3 \times d\mathbf{s}_1) \} du_2 = \frac{\partial}{\partial u_2} \{ F_2 h_3 h_1 \} du_1 du_2 du_3 \quad (\text{A.111})$$

同様にして, u_3 曲面上の面要素から出るベクトル \mathbf{F} の流束は,

$$\frac{\partial}{\partial u_3} \{ F_3 h_1 h_2 \} du_1 du_2 du_3$$

また, u_1 曲面上の面要素から出るベクトル \mathbf{F} の流束は,

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \{ F_1 h_2 h_3 \} du_1 du_2 du_3$$

よって, u_1 -曲面, u_2 -曲面, u_3 -曲面で囲まれる微小体積から出るベクトル \mathbf{F} の流束は, これらの総和をとつて次のようになる.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \{ h_2 h_3 F_1 \} + \frac{\partial}{\partial u_2} \{ h_3 h_1 F_2 \} + \frac{\partial}{\partial u_3} \{ h_1 h_2 F_3 \} \right] \cdot du_1 du_2 du_3 \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \{ h_2 h_3 F_1 \} + \frac{\partial}{\partial u_2} \{ h_3 h_1 F_2 \} + \frac{\partial}{\partial u_3} \{ h_1 h_2 F_3 \} \right] dv \end{aligned} \quad (\text{A.112})$$

発散の定義より,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \{ h_2 h_3 F_1 \} + \frac{\partial}{\partial u_2} \{ h_3 h_1 F_2 \} + \frac{\partial}{\partial u_3} \{ h_1 h_2 F_3 \} \right] \quad (\text{A.113})$$

A.3.4 ラプラシアン (Laplacian operator)

$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi$ の ∇^2 (ラプラシアン) を考える. いま, $\nabla \Phi$ をベクトル \mathbf{F}' とおき,

$$\nabla \Phi = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \mathbf{i}_i \equiv \sum_{i=1}^3 F'_i \mathbf{i}_i \equiv \mathbf{F}' \quad (\text{A.114})$$

ベクトル \mathbf{F}' の成分 F'_i は,

$$F'_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.115})$$

ベクトル \mathbf{F}' の発散を求めれば,

$$\nabla \cdot \mathbf{F}' = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \{ h_2 h_3 F'_1 \} + \frac{\partial}{\partial u_2} \{ h_3 h_1 F'_2 \} + \frac{\partial}{\partial u_3} \{ h_1 h_2 F'_3 \} \right] \quad (\text{A.116})$$

このとき,

$$\nabla \cdot \mathbf{F}' = \nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi \quad (\text{A.117})$$

したがって,

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} & \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \left. \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right\}\end{aligned}\quad (\text{A.118})$$

A.3.5 回転 (rotation)

回転は、ベクトル関数を \mathbf{F} とすると、 $\nabla \times \mathbf{F}$, $\text{rot } \mathbf{F}$ あるいは $\text{curl } \mathbf{F}$ と書く。このベクトルの回転は、単位面積当たりの最大の回転量（渦）を与える面に垂直な方向をもち、回転量の最大値を大きさとするベクトルであり、この垂直な方向に沿う単位ベクトルを \mathbf{n} とおくと、その大きさは、

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \frac{1}{S} \iint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A.119})$$

で与えられる。このとき、 $\nabla \times \mathbf{F}$ を、

$$\nabla \times \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \{(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i}_i\} \mathbf{i}_i \quad (\text{A.120})$$

とおくと、次のように単位ベクトル \mathbf{i}_i に直交する微小面 S_i の周回積分路 C_i に沿って計算すれば、 $\nabla \times \mathbf{F}$ の各成分が得られる。

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i}_i = \lim_{\Delta C_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \iint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.121})$$

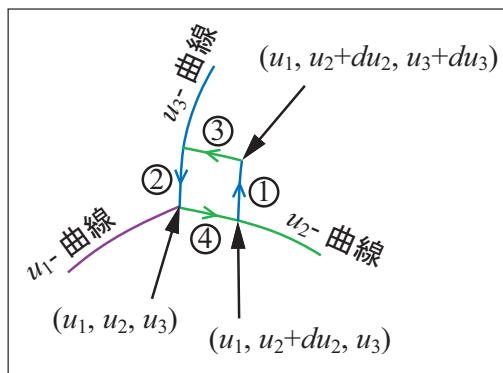


図 A.3. 微小な周回積分路 C_1

そこで、まず、 $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i}_1$ について求めることにする。このとき、周回積分路 C_1 のうち、同図の(1)の $(u_1, u_2 + du_2, u_3)$ から $(u_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$ までの線積分 (u_3 -曲線上)

は、線要素 $ds_3 = h_3 du_3$ より、

$$F_3 ds_3 \Big|_{u_2+du_2} \simeq F_3 h_3 du_3 + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_3 h_3 du_3) du_2$$

また、同図の(2)の $(u_1, u_2, u_3 + du_3)$ から (u_1, u_2, u_3) までの線積分 (u_3 -曲線上) は、

$$-F_3 ds_3 \Big|_{u_2} = -F_3 h_3 du_3$$

同図の(3)の $(u_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$ から $(u_1, u_2, u_3 + du_3)$ までの線積分 (u_2 -曲線上) は、線要素 $ds_2 = h_2 du_2$ より、

$$-F_2 ds_2 \Big|_{u_3+du_3} \simeq -F_2 h_2 du_2 - \frac{\partial}{\partial u_3} (F_2 h_2 du_2) du_3$$

同図の(4)の (u_1, u_2, u_3) から $(u_1, u_2 + du_2, u_3)$ までの線積分は、

$$F_2 ds_2 \Big|_{u_3} = F_2 h_2 du_2$$

これらの総和をとれば、 C_1 の周回積分が得られ次のようになる。

$$\left\{ \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_3} \right\} du_2 du_3$$

また、 C_1 に囲まれた面積は、面要素 da_1 に対応し、再記すると、 $da_1 = h_2 h_3 du_2 du_3$ 。したがって、

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i}_1 &= \frac{\left\{ \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_3} \right\} du_2 du_3}{h_2 h_3 du_2 du_3} \\ &= \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_3} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.122})$$

同様にして、

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i}_2 = \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_1} \right\} \quad (\text{A.123})$$

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i}_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_2} \right\} \quad (\text{A.124})$$

よって、 $\nabla \times \mathbf{F}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_3} \right\} \mathbf{i}_1 \\
&\quad + \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_1} \right\} \mathbf{i}_2 \\
&\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_2} \right\} \mathbf{i}_3 \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i}_1 & h_2 \mathbf{i}_2 & h_3 \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} \tag{A.125}
\end{aligned}$$

以上をまとめると、

$$\begin{aligned}
\nabla \Phi &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \mathbf{i}_3 \\
&= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \mathbf{i}_i \tag{A.126}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \{h_2 h_3 F_1\} + \frac{\partial}{\partial u_2} \{h_3 h_1 F_2\} + \frac{\partial}{\partial u_3} \{h_1 h_2 F_3\} \right] \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \{h_j h_k F_i\} \tag{A.127}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \Phi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_j h_k}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) \tag{A.128}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_3} \right\} \mathbf{i}_1 \\
&\quad + \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_1} \right\} \mathbf{i}_2 \\
&\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_2} \right\} \mathbf{i}_3 \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 h_i \left\{ \frac{\partial(h_k F_k)}{\partial u_j} - \frac{\partial(h_j F_j)}{\partial u_k} \right\} \mathbf{i}_i \tag{A.129}
\end{aligned}$$

また, (u_1, u_2) に関する 2 次元微分演算子 ∇_s の場合 (導出省略),

$$\nabla_s \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \{h_2 F_1\} + \frac{\partial}{\partial u_2} \{h_1 F_2\} \right] \quad (\text{A.130})$$

$$\nabla_s \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 \mathbf{i}_1 \times \mathbf{F})}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 \mathbf{i}_2 \times \mathbf{F})}{\partial u_2} \right\} \quad (\text{A.131})$$

A.3.6 球座標系

球座標系 (Spherical coordinates system) (r, θ, φ) では,

$$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = \varphi \quad (\text{A.132})$$

とおくと, 位置ベクトル \mathbf{r} は次のようになる.

$$\mathbf{r} = r \{ \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + \cos \theta \mathbf{k} \} \quad (\text{A.133})$$

これより,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + \cos \theta \mathbf{k} \quad (\text{A.134})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \{ \cos \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) - \sin \theta \mathbf{k} \} \quad (\text{A.135})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r \sin \theta (-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}) \quad (\text{A.136})$$

よって, h_1, h_2, h_3 は,

$$h_1 = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}} = 1 \quad (\text{A.137})$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}} = r \quad (\text{A.138})$$

$$h_3 = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}} = r \sin \theta \quad (\text{A.139})$$

また, r, θ, φ に沿う単位ベクトル $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi$ は, 上の結果を基にして各単位ベクトルを求めるべく次のようになる.

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + \cos \theta \mathbf{k} \quad (\text{A.140})$$

$$\mathbf{u}_\theta = \mathbf{i}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \cos \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) - \sin \theta \mathbf{k} \quad (\text{A.141})$$

$$\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{i}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \quad (\text{A.142})$$

スカラ関数 Φ , ベクトル関数 $\mathbf{F} = F_r \mathbf{u}_r + F_\theta \mathbf{u}_\theta + F_\varphi \mathbf{u}_\varphi$ について, 次式が成り立つ.

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi \quad (\text{A.143})$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (\text{A.144})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{A.145})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\varphi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right\} \mathbf{u}_r \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) \right\} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right\} \mathbf{u}_\varphi \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r \mathbf{u}_\theta & r \sin \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\varphi \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.146})$$

A.3.7 円筒座標系

円筒座標系 (Cylindrical coordinates system) (ρ, ϕ, z) では,

$$u_1 = \rho, \quad u_2 = \phi, \quad u_3 = z \quad (\text{A.147})$$

とおくと, 位置ベクトル \mathbf{r} は次のようになる.

$$\mathbf{r} = \rho(\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) + z \mathbf{k} \quad (\text{A.148})$$

これより,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j} \quad (\text{A.149})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \rho(-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) \quad (\text{A.150})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k} \quad (\text{A.151})$$

よって, h_1, h_2, h_3 は,

$$h_1 = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}} = 1 \quad (\text{A.152})$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}} = \rho \quad (\text{A.153})$$

$$h_3 = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}} = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}} = 1 \quad (\text{A.154})$$

また, ρ, ϕ, z に沿う単位ベクトル $\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_z$ は, 上の結果より,

$$\mathbf{u}_\rho = \mathbf{i}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j} \quad (\text{A.155})$$

$$\mathbf{u}_\phi = \mathbf{i}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j} \quad (\text{A.156})$$

$$\mathbf{u}_z = \mathbf{i}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k} \quad (\text{A.157})$$

スカラ関数 Φ , ベクトル関数 $\mathbf{F} = F_\rho \mathbf{u}_\rho + F_\phi \mathbf{u}_\phi + F_z \mathbf{u}_z$ について,

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad (\text{A.158})$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (\text{A.159})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{A.160})$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{u}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{u}_\phi + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\phi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right\} \mathbf{u}_z$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho \mathbf{u}_\phi & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.161})$$

A.3.8 直角座標系

直角座標系 (Rectangular coordinates system) (x, y, z) では,

$$u_1 = x, \quad u_2 = y, \quad u_3 = z \quad (\text{A.162})$$

よって,

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1 \quad (\text{A.163})$$

スカラ関数 Φ , ベクトル関数 $\mathbf{F} = F_x \mathbf{u}_x + F_y \mathbf{u}_y + F_z \mathbf{u}_z$ について,

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad (\text{A.164})$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (\text{A.165})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{A.166})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.167})$$

A.4 ガウスの発散定理の応用

A.4.1 ガウスの発散定理

ガウスの発散定理 (divergence theorem) は, 次式で与えられる.

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.168})$$

ただし, 積分記号 \oint の \circ は積分経路が閉曲面であることを示し, \mathbf{n} は閉曲面上の外向き法線ベクトルである.

A.4.2 ガウスの回転定理

いま, ベクトル \mathbf{F} を $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$ で定義し,

$$\mathbf{a} \equiv F_z \mathbf{j} - F_y \mathbf{k} \quad (\text{A.169})$$

とおくと, ガウスの発散定理の式 (A.168) の左辺の被積分関数は次のようになる.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_z \mathbf{j} - F_y \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ &= (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i} \end{aligned} \quad (\text{A.170})$$

次に, 法線ベクトル \mathbf{n} を,

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k} \quad (\text{A.171})$$

とおくと, ガウスの発散定理の右辺の被積分関数は次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} &= (F_z \mathbf{j} - F_y \mathbf{k}) \cdot (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}) \\ &= F_z n_y - F_y n_z \\ &= (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i} \end{aligned} \quad (\text{A.172})$$

これらの結果をガウスの発散定理の式に代入すると, 次のようになる.

$$\iiint_V (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i} \, dV = \iint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i} \, dS = - \iint_S (\mathbf{F} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{i} \, dS \quad (\text{A.173})$$

同様にして, \mathbf{j} , \mathbf{k} に関する式が得られるので, 次のガウスの回転定理 (curl theorem) が得られる.

$$\iiint_V (\nabla \times \mathbf{F}) \, dV = - \iint_S (\mathbf{F} \times \mathbf{n}) \, dS \quad (\text{A.174})$$

A.4.3 ガウスの勾配定理

いま, \mathbf{b} を定ベクトルとして, $\mathbf{a} \equiv f\mathbf{b}$ とおくと, ガウスの発散定理の式 (A.168) の左辺の被積分関数は次のようになる.

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot (f\mathbf{b}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{b} \quad (\text{A.175})$$

このとき, ガウスの発散定理は次のようになる.

$$\iiint_V (\nabla f) \cdot \mathbf{b} \, dV = \iint_S (f\mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{A.176})$$

ここで, \mathbf{b} は定ベクトルゆえ,

$$\mathbf{b} \cdot \iiint_V \nabla f \, dV = \mathbf{b} \cdot \iint_S f \mathbf{n} \, dS \quad (\text{A.177})$$

よって, 次のガウスの勾配定理 (gradient theorem) が得られる.

$$\iiint_V \nabla f \, dV = \iint_S f \mathbf{n} \, dS \quad (\text{A.178})$$

A.4.4 2次元発散定理

軸方向を z 軸 (単位ベクトルは \mathbf{a}_z) とする円柱領域 V を考える. この軸に直交する面内の 2 次元ベクトル \mathbf{A}_t , および 2 次元微分演算子 ∇_t を用いると, \mathbf{A} および ∇ は, 次のよ

うになる。

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_t + A_z \mathbf{a}_z \quad (\text{A.179})$$

$$\mathbf{A}_t \equiv A_t \mathbf{a}_t \quad (\text{A.180})$$

$$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (\text{A.181})$$

これらを 3 次元の発散定理に代入すると,

$$\iiint_V \left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (\mathbf{A}_t + A_z \mathbf{a}_z) dV = \iint_S (\mathbf{A}_t + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.182})$$

領域 V を囲む閉曲面 S を円筒にとり, $z = z_1, z_2$ における断面 (z 軸に直交する面) を S_1, S_2 とすると,

$$\begin{aligned} & \int \left(\iint_S \nabla_t \cdot \mathbf{A}_t dS \right) dz + \iint_S \left(\int \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \right) dS \\ &= \iint_{S_1} -A_z(z_1) dS + \iint_{S_2} A_z(z_2) dS + \int \left(\oint_C \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{n} d\sigma \right) dz \end{aligned} \quad (\text{A.183})$$

面 S_2 が面 S_1 に十分接近しているとき ($z_2 = z_1 + \Delta z$), $A_z(z_2)$ を次のように近似する.

$$A_z(z_2) \simeq A_z(z_1) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z \quad (\text{A.184})$$

これより,

$$\begin{aligned} & \int \left(\iint_S \nabla_t \cdot \mathbf{A}_t dS \right) dz + \iint_S \left(A_z(z_1) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z - A_z(z_1) \right) dS \\ & \simeq \iint_S -A_z(z_1) dS + \iint_S \left(A_z(z_1) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z \right) dS + \int \left(\oint_C \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{n} d\sigma \right) dz \end{aligned} \quad (\text{A.185})$$

上式において $\Delta z \rightarrow 0$ の極限をとると, 次のように 2 次元発散定理が得られる.

$$\iint_S \nabla_t \cdot \mathbf{A}_t dS = \oint_C \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (\text{A.186})$$

ただし, 面 S およびその周回積分経路 C は平面上にとられ, \mathbf{n} は閉じた経路 C の外向きの法線ベクトルを示す. または, \mathbf{A} を用いて,

$$\iint_S \nabla_t \cdot \mathbf{A} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (\text{A.187})$$

A.4.5 2 次元勾配定理

$$\iint_S \nabla_t f dS = \oint_C f \mathbf{n} d\sigma \quad (\text{A.188})$$

A.5 ダイアディック公式

ダイアディックの公式 (dyadic identities) をまとめると、次のようになる。

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \bar{\mathbf{c}}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{c}}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \bar{\mathbf{c}} \quad (\text{A.189})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \bar{\mathbf{c}}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{c}}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \bar{\mathbf{c}} \quad (\text{A.190})$$

$$\nabla(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{a}\nabla\mathbf{b} + (\nabla\mathbf{a})\mathbf{b} \quad (\text{A.191})$$

$$\nabla \cdot (a\bar{\mathbf{b}}) = a\nabla \cdot \bar{\mathbf{b}} + (\nabla a) \cdot \bar{\mathbf{b}} \quad (\text{A.192})$$

$$\nabla \times (a\bar{\mathbf{b}}) = a\nabla \times \bar{\mathbf{b}} + (\nabla a) \times \bar{\mathbf{b}} \quad (\text{A.193})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{\mathbf{a}}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{a}}) + \nabla^2 \bar{\mathbf{a}} \quad (\text{A.194})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{a}}) = 0 \quad (\text{A.195})$$

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{b}} = (\bar{\mathbf{b}})^T \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.196})$$

$$\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{b}} = - \left[(\bar{\mathbf{b}})^T \times \mathbf{a} \right]^T \quad (\text{A.197})$$

$$(\bar{\mathbf{c}})^T \cdot (\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{b}}) = -(\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{c}})^T \cdot \bar{\mathbf{b}} \quad (\text{A.198})$$

A.6 グリーンの定理のまとめ

A.6.1 グリーンの第一定理

グリーンの第一定理 (first Green's theorems) をまとめると、次のようになる。

Scalar form

$$\iiint_V (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS \left(= \oint_S \mathbf{n} \cdot (f \nabla g) dS \right) \quad (\text{A.199})$$

Vector form

$$\begin{aligned} & \iiint_V \{ (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) \} dV \\ &= \iint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{G}) dS \end{aligned} \quad (\text{A.200})$$

Composite vector-dyadic form

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}) \right\} dV \\ &= \iint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F} \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}) dS \end{aligned} \quad (\text{A.201})$$

Dyadic form

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ (\nabla \times \bar{\mathbf{G}})^T \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{F}}) - (\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}})^T \cdot \bar{\mathbf{F}} \right\} dV \\ &= \iint_S (\nabla \times \bar{\mathbf{G}})^T \cdot (\mathbf{n} \times \bar{\mathbf{F}}) dS \end{aligned} \quad (\text{A.202})$$

A.6.2 グリーンの第二定理

グリーンの第二定理 (second Green's theorems) をまとめると、次のようになる。

Scalar form

$$\iiint_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS \quad (\text{A.203})$$

Vector form, Stratton's theorem

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{G}) - \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}) \right\} dV \\ &= \iint_S \mathbf{n} \cdot \left\{ \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) \right\} dS \end{aligned} \quad (\text{A.204})$$

Composite vector-dyadic form

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \bar{\mathbf{G}} \right\} dV \\ &= - \iint_S \mathbf{n} \cdot \left\{ (\nabla \times \mathbf{F}) \times \bar{\mathbf{G}} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}) \right\} dS \end{aligned} \quad (\text{A.205})$$

Modified composite vector-dyadic form

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}} \right\} dV \\ &= - \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}} + (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \cdot \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}} \right\} dS \end{aligned} \quad (\text{A.206})$$

Dyadic form

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}})^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}} - \bar{\bar{\mathbf{G}}}^T \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{F}}}) \right\} dV \\ &= - \iint_S \left\{ \bar{\bar{\mathbf{G}}}^T \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{F}}}) + (\nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}})^T \cdot (\mathbf{n} \times \bar{\bar{\mathbf{F}}}) \right\} dS \end{aligned} \quad (\text{A.207})$$

A.7 関連する不定積分

A.7.1 置換積分 $t = x + \sqrt{x^2 + a^2}$

次の不定積分を導出、確認しよう。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| \quad (\text{A.208})$$

まず、 $t = x + \sqrt{x^2 + a^2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= 1 + \frac{1}{2} (x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{t}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.209})$$

これより、

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (\text{A.210})$$

よって、次のように不定積分が行える。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| \quad (\text{A.211})$$

逆に、右辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|] &= \frac{dt}{dx} \frac{t}{dt} (\ln |t|) \\ &= \frac{t}{\sqrt{x^2 + a^2}} \frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.212})$$

A.8 Cauchy の積分表示式

A.8.1 Cauchy の定理

複素数 z , および複素関数 $f(z)$ が,

$$z = x + jy \quad (\text{A.213})$$

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y) \quad (\text{A.214})$$

で表されるとき, 関数 $f(z)$ の複素積分について, 次のような式変形ができる.

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u + jv) d(x + jy) \\ &= \int_C (u + jv)(dx + jdy) \\ &= \int_C (udx - vdy) + j \int_C (vdx + udy) \end{aligned} \quad (\text{A.215})$$

さらに変形するにあたって必須の関係式を導出しておく. まず, ストークスの定理は,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A.216})$$

ベクトル \mathbf{A} は任意でよいので, 次のようにおく.

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{u}_x + A_y \mathbf{u}_y \quad (\text{A.217})$$

また, 面 S のとり方も任意でよいので xy 面にとり, 法線方向を z 軸方向にとると, $\mathbf{n} = \mathbf{u}_z$ より,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} &= \{\nabla \times (A_x \mathbf{u}_x + A_y \mathbf{u}_y)\} \cdot \mathbf{u}_z \\ &= \{(\nabla A_x) \times \mathbf{u}_x\} \cdot \mathbf{u}_z + \{(\nabla A_y) \times \mathbf{u}_y\} \cdot \mathbf{u}_z \\ &= (\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z) \cdot (\nabla A_x) + (\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z) \cdot (\nabla A_y) \\ &= -\mathbf{u}_y \cdot (\nabla A_x) + \mathbf{u}_x \cdot (\nabla A_y) \\ &= -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{A.218})$$

また,

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = (A_x \mathbf{u}_x + A_y \mathbf{u}_y) \cdot (\mathbf{u}_x dx + \mathbf{u}_y dy) = A_x dx + A_y dy \quad (\text{A.219})$$

よって, ストークスの定理は, 左辺と右辺を交換して次のようになる.

$$\oint_C (A_x dx + A_y dy) = \iint_S \left(-\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) dx dy \quad (\text{A.220})$$

いま, $A_x \rightarrow u$, $A_y \rightarrow -v$ に置き換えると ($S \rightarrow R$),

$$\oint_C (udx - vdy) = - \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy \quad (\text{A.221})$$

また, $A_x \rightarrow v$, $A_y \rightarrow u$ に置き換えると,

$$\oint_C (vdx + udy) = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy \quad (\text{A.222})$$

積分路 C を閉曲線にとり, 上の結果を用いて関数 $f(z)$ の複素積分を変形すると次のようになる.

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C (udx - vdy) + j \oint_C (vdx + udy) \\ &= - \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + j \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy \end{aligned} \quad (\text{A.223})$$

ここで, 複素関数 $f(z)$ が正則な場合, Cauchy-Riemann の条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.224})$$

より,

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.225})$$

となり, 被積分項がゼロであるから, 関数 $f(z)$ が正則のとき, 次式が成り立つ.

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (\text{A.226})$$

これは, Cauchy の定理 (いわゆる大定理と呼ばれる定理) で, 「 $f(z)$ が単連結な領域 D で正則ならば, D 内に含まれる閉曲線 C 上にとった周回積分はゼロとなる」.

【例題 1】

$\oint_C f(z) dz$ の積分を, $f(z) = \frac{1}{z}$, 積分路 C は複素平面の原点を中心とする単位円一周 (反時計周り) として求めよ.

略解 いま, $z = re^{jt}$ で表すと,

$$f(z) = 1/z = 1/(re^{jt}) \quad (\text{A.227})$$

また, $dz = jre^{jt} dt$. ただし, 積分路 C 上では, 単位円故 $r = 1$ である. よって,

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{re^{jt}} \frac{dz}{dt} \Big|_{r=1} dt = \int_0^{2\pi} \frac{je^{jt}}{e^{jt}} dt = j \int_0^{2\pi} dt = j2\pi \quad (\text{A.228})$$

$f(z)$ が $z = 0$ で発散するため、積分路 C 内部にこのような点を含めば積分はゼロにはならない。

【例題 2】

$f(z) = \frac{1}{z}$ (例題 1 と同じ)、積分路 C は原点を中心とする半径 R の円一周 (反時計周り) にとり、 $\oint_C f(z) dz$ を求めよ。

略解

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_{t=0}^{2\pi} \left. \frac{1}{re^{jt}} \frac{dz}{dt} \right|_{r=R} dt = \int_0^{2\pi} \frac{jRe^{jt}}{Re^{jt}} dt = j \int_0^{2\pi} dt = j2\pi \quad (\text{A.229})$$

積分値は、積分路 C の円の半径 R に依らないことを示す例である。

【例題 3】

積分路 C は例題 1 と同じ単位円一周とし、 $f(z) = z^m$ (m : 整数) として、 $\oint_C f(z) dz$ を求めよ。

略解 単位円上では、 $z = e^{jt}$ とおけ、 $dz = je^{jt} dt$,

$$f(z)|_{r=1} = (e^{jt})^m = e^{jmt} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (\text{A.230})$$

こより、

$$\oint_C z^m dz = \int_{t=0}^{2\pi} e^{jmt} \cdot je^{jt} dt = j \int_0^{2\pi} e^{j(m+1)t} dt \quad (\text{A.231})$$

場合分けして、まず、 $m = -1$ のとき、

$$j \int_0^{2\pi} e^{j(m+1)t} dt = j \int_0^{2\pi} dt = j2\pi \quad (\text{A.232})$$

これは、例題 1 そのもので、

$$\oint_C z^{-1} dz = \oint_C \frac{dz}{z} = j2\pi \quad (\text{A.233})$$

一方、 $m \neq -1$ のとき、

$$j \int_0^{2\pi} e^{j(m+1)t} dt = j \left[\frac{e^{j(m+1)t}}{j(m+1)} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (\text{A.234})$$

結果をまとめると、

$$\oint_C z^m dz = \begin{cases} j2\pi & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1) \end{cases} \quad (\text{A.235})$$

$m \neq -1$ のときだけ値をもつ。

A.8.2 Cauchy の積分表示式

さて、次の積分を考える。

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (\text{A.236})$$

ただし、複素関数 $f(z)$ は正則、積分路 C は $z=a$ を囲む閉曲線（向きは正方向、左回り）とする。まず、次のように変形する。

$$I = f(a) \oint_C \frac{dz}{z-a} + \oint_C \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \quad (\text{A.237})$$

そして、第1項の積分項について、積分路を次のように変形する。

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \left(\oint_{C_1} + \oint_{C_2} \right) \frac{dz}{z-a} \quad (\text{A.238})$$

ただし、 C_1 は $z=a$ を中心とする半径 R の円、 C_2 は单一連結な領域を囲む閉じた積分路である。上式第1項の計算を行うため、 $z=a$ を原点とする極座標系 (r, θ) を考え、半径 R の円上では、

$$z-a = Re^{j\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (\text{A.239})$$

で表され、

$$dz = R \cdot je^{j\theta} d\theta \quad (\text{A.240})$$

より、

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z-a} = \oint_0^{2\pi} \frac{R \cdot je^{j\theta} d\theta}{Re^{j\theta}} = j \oint_0^{2\pi} d\theta = j2\pi \quad (\text{A.241})$$

一方、積分路 C_2 には $1/(z-a)$ の特異点である $z=a$ を含まないので、Cauchy の定理より、

$$\oint_{C_2} \frac{dz}{z-a} = 0 \quad (\text{A.242})$$

したがって、

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \left(\oint_{C_1} + \oint_{C_2} \right) \frac{dz}{z-a} = j2\pi \quad (\text{A.243})$$

次に、式 (A.237) の第2項についても同じように2つの積分路を考える。

$$\oint_C \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = \left(\oint_{C_1} + \oint_{C_2} \right) \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \quad (\text{A.244})$$

上式の被積分関数は $z = a$ 以外で正則であり、積分路 C_2 内部に $z = a$ を含まないので、Cauchy の定理より、上式の第 2 項はゼロである。上式の第 1 項については次のようになる。いま、

$$|f(z) - f(a)| < \epsilon \quad (\text{A.245})$$

を満たす $|z - a| = \rho$ を考えると、

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right| = \frac{|f(z) - f(a)|}{\rho} < \frac{\epsilon}{\rho} \quad (\text{A.246})$$

より、積分路 C_1 を $z = a$ を中心とする半径 ρ の円として、

$$\begin{aligned} \left| \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz \right| &< \oint_{C_1} \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right| |dz| \\ &< \oint_{C_1} \frac{\epsilon}{\rho} |dz| = \frac{\epsilon}{\rho} \oint_{C_1} |dz| \\ &= \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon \end{aligned} \quad (\text{A.247})$$

そして、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を考えれば、上の積分はゼロになる。よって、

$$\oint_C \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = \left(\oint_{C_1} + \oint_{C_2} \right) \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = 0 \quad (\text{A.248})$$

したがって、

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz = j2\pi f(a) \quad (\text{A.249})$$

正確には、「 $f(z)$ が領域 D で正則ならば、内部の 1 点 a における値は、この点を正の方向に 1 周し、 D 内にある閉曲線 C 上の周回積分：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz \quad (\text{A.250})$$

で与えられる」。この公式を Cauchy の積分表示式という。

Bibliography

- [1] 森口繁一, 宇田川かね久, 一松信, “岩波 数学公式 II,” 岩波書店 (1960), ISBN: 9784000055086.
- [2] G. A. Thiele, “Wire antennas,” in Computer Techniques for Electromagnetics, Chapter 2, R. Mittra, Ed., Permagon (1973), ISSN: 0074-803X.
- [3] Samuel Silver, “*Microwave Antenna Theory and Design*,” 3.8. General Solution of the Field Equations in Terms of the Sources, for a Time-periodic Field, McGraw Hill (1949), IEE, reprint (1984), ISBN-13: 978-0863410178.
- [4] A. Ishimaru, “*Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering From Fundamentals to Applications*,” 2.8. Duality Principle and Symmetry of Maxwell’s Equations, 2dn ed., p.27, IEEE Press, Wiley (2017), ISBN: 978-1-119-07969-9.
- [5] Samuel Silver, “*Microwave Antenna Theory and Design*,” 3.9. Field Due to Sources in an Unbounded Region, McGraw Hill (1949), IEE, reprint (1984), ISBN-13: 978-0863410178.
- [6] Samuel Silver, “*Microwave Antenna Theory and Design*,” 3.10. The far-zone Fields, McGraw Hill (1949), IEE, reprint (1984), ISBN-13: 978-0863410178.
- [7] Julius Adams Stratton, “*Electromagnetic Theory*,” 8.16. Discontinuous Surface Distributions, p.468, McGraw-Hill, New York (1941), Wiley-IEEE Press (2007), ISBN-13: 978-0470131534, Kindle Edition (2013).
- [8] Samuel Silver, “*Microwave Antenna Theory and Design*,” 5.11. The Aperture-field Method, McGraw Hill (1949), IEE, reprint (1984), ISBN-13: 978-0863410178.
- [9] R.C.Hansen, “*Microwave Scanning Antennas*,” Peninsula Pub. (1986), ISBN-13: 978-0932146120.
- [10] Robert E. Collin, “*Field Theory of Guided Waves*,” 2nd ed., IEEE Press (1991), ISBN-13: 978-0879422370.
- [11] C. T. Tai, “*Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*,” 2nd ed., IEEE Press, New York (1991), ISBN-13: 978-0780304499.
- [12] Roger F. Harrington, “Matrix Methods for field problems,” *Proc. of IEEE*, vol.55,

no.2, pp.136-149 (1967), doi: 10.1109/PROC.1967.5433.

- [13] Roger F. Harrington, “*Field Computation by Moment Methods*,” Chapter 4. Wire antennas and scatters, Wiley-IEEE Press (1993), ISBN-13: 978-0780310148.
- [14] “*Method of Moments in Antennas and Scattering*,” R. C. Hansen, Editor, Artech House (1990), ISBN-13: 978-0890064665.
- [15] M.Rao, D.R.Wilton and A.W.Glisson, “Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol.30, no.3, pp.409-418 (1982), doi: 10.1109/TAP.1982.1142818.
- [16] D. R. Wilton, S. M. Rao, A. W. Glisson, D. H. Schaubert, O. M. Al-Bundak, and C. M. Butler, “Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol.32, no.3, pp.276-281 (1984), doi: 10.1109/TAP.1984.1143304.
- [17] Walton C. Gibson, “*The Method of Moments in Electromagnetics*,” 2nd Ed., p.267, CRC Press (2015), ISBN-13: 978-0367365066.
- [18] A. J. Poggio and E. K. Miller, “Integral equation solutions of three dimensional scattering problems,” in *Computer Techniques for Electromagnetics*, Chapter 4, R. Mittra, Ed. Elmsford, NY: Permagon (1973), ISSN: 0074-803X.