

A-2 エルミート演算子

2.1 固有値・固有関数

演算子 $\hat{A}$ の固有値方程式。

$$(A2.1) \quad \hat{A}\psi_n = A_n\psi_n$$

ここで、 ψ_n は固有関数、 A_n は固有値である。

2.2 エルミート共役な演算子

任意の複素関数 Φ と Ψ について

$$(A2.2) \quad \langle \Psi | \Phi \rangle^* = \langle \Phi | \Psi \rangle$$

次の条件を満たす時、2つの演算子 $\hat{C}$ 、 $\hat{C}^+$ はエルミート共役であるという。

$$(A2.3) \quad \langle \Psi | \hat{C} | \Phi \rangle^* = \langle \hat{C} \Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | \hat{C}^+ | \Psi \rangle$$

2.3 エルミート演算子

特に、自分自身とエルミート共役である演算子をエルミート演算子という

$$(A2.4) \quad \langle \Psi | \hat{C} | \Phi \rangle^* = \langle \Phi | \hat{C} | \Psi \rangle$$

物理量を表す演算子は必ずエルミート演算子である。これは、物理量が必ず実数であることと対応している。

エルミート演算子の固有値は必ず実数である。

$\Phi = \Psi = \psi$ がエルミート演算子 $\hat{C}$ の固有関数、 C を対応する固有値とする

$$(A2.5) \quad \langle \psi | \hat{C} | \psi \rangle = C \langle \psi | \psi \rangle$$

複素共役

$$(A2.6) \quad \langle \psi | \hat{C} | \psi \rangle^* = C^* \langle \psi | \psi \rangle^* = C^* \langle \psi | \psi \rangle$$

組みあわせると

$$(A2.7) \quad C = C^*$$

だから C は実数

2.4 直交性

エルミート演算子の異なる固有値に属する固有関数は直交する。

$$(A2.8) \quad \hat{C}\psi_n = C_n\psi_n$$

$$(A2.9) \quad \hat{C}\psi_m = C_m\psi_m$$

とすると

$$(A2.10) \quad \langle \psi_m | \hat{C} | \psi_n \rangle = C_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle$$

$$(A2.11) \quad \langle \psi_n | \hat{C} | \psi_m \rangle = C_m \langle \psi_n | \psi_m \rangle$$

ところで $\hat{C}$ はエルミート演算子だから

$$(A2.12) \quad \langle \psi_m | \hat{C} | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | \hat{C} | \psi_m \rangle$$

すなわち

$$(A2.13) \quad C_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = C_m \langle \psi_n | \psi_m \rangle$$

ただし異なる固有値に属する固有関数を考えているので $C_n \neq 0$, $C_m \neq 0$, $C_n \neq C_m$ だから

$$(A2.14) \quad \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | \psi_m \rangle = 0$$

2.5 完全性

任意の複素関数について

$$(A2.15) \quad \Phi = \sum_n^{\infty} c_n \psi_n$$

係数 c_n を求めるには、左から ψ_m^* を掛けて全空間で積分する

$$(A2.16) \quad \langle \psi_m | \Phi \rangle = \sum_n^{\infty} c_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = c_m$$

$$(A2.17) \quad \langle \Phi | \Phi \rangle = \sum_n^{\infty} |c_n|^2$$

$$(A2.18) \quad \Phi = \sum_n^{\infty} \langle \psi_m | \Phi \rangle \psi_n$$