

9 行列の計算と連立一次方程式の解法

実験データの解析でも、理論的な計算でも、連立一次方程式を解かなければならないことが多い。連立一次方程式に関する数学的な議論は「線形代数学 I」で学習しているはずである。ここでは、Excel を用いて解ける場合について、その方法を紹介する。これは、次回に学ぶ最小二乗法の準備でもある。

この節では主に次の書物を参考にした。

- 趙 華安, 『Excel による数値計算法』, 共立出版, 東京, 2000
- 縄田和満, 『Excel による線形代数入門』, 朝倉書店, 東京, 1999

9.1 Excel による行列の演算

行列の演算は煩雑なものが多いので、この資料にはいちいち記述しないが、各自必ず手計算で検算してみる。たとえ一般的に使われているソフトでも、いくつかの例で検算して動作確認してから使用するのが正しい使い方である。他人が作ったものを鵜呑みにしてはいけぬ。自分が使用法を誤っていることもある。

ここでは、簡単な例として、次の 2 つの行列について計算する。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

Excel 2007

- Web ページから行列計算説明用ファイルをダウンロードし、Excel で開く。

	A	B	C
1	A	1	2
2		3	4
3			
4	B	5	6
5		7	8

- ワークシート名を「gyouretsu」から「行列」に変更する。
- 課題提出用のファイル名で、Excel 形式で保存する。

9.1.1 和

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

和を計算するためには、 \mathbf{A} が $n \times l$ (n 行 l 列) の行列なら、 \mathbf{B} も $n \times l$ でなければならない。当然 \mathbf{C} も $n \times l$ になる。Excel 2007 には、行列の和を計算する特別な関数はない(と思う)。したがって、単純に対応する要素を足して計算する。

Excel 2007

- A7 に「C」と書き、B7:C8 の四角い範囲に行列 \mathbf{C} を計算する。
 1. B7 に「=B1+B4」と入力する
 2. B7 をコピーし B8, C7, C8 に貼り付ける。

9.1.2 積

$$\mathbf{D} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \sum_i a_{1i}b_{i1} & \sum_i a_{1i}b_{i2} \\ \sum_i a_{2i}b_{i1} & \sum_i a_{2i}b_{i2} \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

行列のサイズが大きくなると、積の計算は非常にじゃまぐさい。積を計算するためには、 \mathbf{A} が $n \times l$ (n 行 l 列) の行列なら、 \mathbf{B} は $l \times m$ でなければならない。このとき \mathbf{D} も $n \times m$ になる。Excel には、行列の積を計算する「MMULT」という関数がある。

Excel 2007

- A10 に「D」と書き、B10:C11 の四角い範囲に行列 \mathbf{D} を計算する。
 1. B10:C11 の四角い範囲を選択した状態で「=MMULT(B1:C2,B4:C5)」と入力し **Ctrl**+**Shift**+**Enter** で確定する。この確定の仕方は、「配列関数」(1 つのセルではなく複数のセルに結果を出力する関数) に用いる方法で、以前にも出てきた。

	A	B	C
10	D	=MMULT(B1:C2,B4:C5)	
11			

- 「MMULT」は 2 つの引数をとる関数で、どちらも行列を表すセルの範囲である。
- 「MMULT」で引数と結果の範囲設定が正しくなければエラーが表示される。
- 何かエラーがおきて抜け出せなくなった場合、**Esc** キーを押してみる。

9.1.3 転置 transpose

$${}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

様々な計算で、行と列を入れ替えた転置が必要になることがある。 \mathbf{A} が $n \times l$ の行列なら ${}^t\mathbf{A}$ は $l \times n$ になる。Excel には、転置行列を計算する「TRANSPOSE」という関数がある。

Excel 2007

- A13 に「tA」と書き、B13:C14 の四角い範囲に \mathbf{A} の転置行列 ${}^t\mathbf{A}$ を計算する。
 1. B13:C14 の四角い範囲を選択した状態で「=TRANSPOSE(B1:C2)」と入力し **Ctrl**+**Shift**+**Enter** で確定する。
- 「TRANSPOSE」で引数と結果の範囲設定が正しくなければエラーが表示される。
- 何かエラーがおきて抜け出せなくなった場合、**Esc** キーを押してみる。

9.1.4 行列式 determinant

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (9.6)$$

2×2 や 3×3 の行列の行列式なら、上のような「たすきがけ」と呼ばれる簡単な計算法があるが、それ以上の大きさになると、行列式の計算は非常に煩雑である。行列式を計算するためには、 \mathbf{A} が正方行列でなければならない。 $\det(\mathbf{A})$ はスカラーである。Excel には、行列式を計算する「MDETERM」という関数がある。

- A16 に「det(A)」と書き，B16 に A の行列式 det(A) を計算する。
 1. B16 に「=MDETERM(B1:C2)」と入力する。「MDETERM」は配列関数ではないので，普通に で確定する。
- 「MDETERM」の引数が正方配列でなければエラーが表示される。
- 何かエラーがおきて抜け出せなくなった場合， キーを押してみることに。

9.1.5 逆行列 inverse matrix

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad (9.7)$$

逆行列を求める際，A は正方行列である。A⁻¹ は常に存在するわけではなく，det(A) ≠ 0 でなければならない。

Excel には，逆行列を計算する「MINVERSE」という関数がある。

- A18 に「A(inv)」と書き，B18:C19 の四角い範囲に A の逆行列 A⁻¹ を計算する。
 1. B18:C19 の四角い範囲を選択した状態で「=MINVERSE(B1:C2)」と入力し，++ で確定する。
 2. A21 に「AA(inv)」と書き，B21:C22 の四角い範囲に「MMULT」を使って AA⁻¹ を計算して検算してみることに。対角項は厳密に 1 に，非対角項は厳密に 0 になっているか？
- 「MINVERSE」で引数と結果の範囲設定が正しくなければエラーが表示される。
- 逆行列が存在しないときもエラーになる。
- 何かエラーがおきて抜け出せなくなった場合， キーを押してみることに。

9.2 連立一次方程式の解法

例として次のような連立一次方程式を考える。

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 7z &= 10 \\ 4x - 2y + 2z &= -5 \\ 5x + 7y - 4z &= 11 \end{aligned} \quad (9.8)$$

これは，行列，ベクトルを用いれば次のように書ける。

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (9.9)$$

ただし A, x, b は次のように定義される。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \\ 5 & 7 & -4 \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

さて、方程式の両辺に左から \mathbf{A}^{-1} をかける。

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (9.13)$$

これをさらに $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ を用いて書き直す。

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (9.14)$$

これで、方程式が解けた。

このような方法で連立一次方程式が解けるのは、 \mathbf{A} が正則行列である場合で、つまり \mathbf{A} の行列式が $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ である場合に限られる。

Excel 2007

1. Web ページから連立一次方程式用のファイルをダウンロードし、Excel で開く。

	A	B	C	D	E	F	G
1	A	3	5	7		b	10
2		4	-2	2			-5
3		5	7	-4			11

2. 「ホーム」 「セル」 「書式」 「ワークシートの移動またはコピー」で、「行列」と同じファイルにワークシートを移動する。
 3. ワークシート名を「renritsu」から「連立一次方程式」に変更する。
 4. A5 に「A(inv)」と書き、B5:D7 の四角い範囲に \mathbf{A}^{-1} を計算する (B5:D7 を選択した状態で「=MINVERSE(B1:D3)」と入力し、Ctrl+Shift+Enterで確定)。
 5. A9 に「x=A(inv)b」と書き、B9:B11 に積 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ を計算する (B9:B11 を選択した状態で「=MMULT(B5:D7,G1:G3)」と入力し、Ctrl+Shift+Enterで確定)。
 6. 検算するために、A13 に「b=Ax」と書き、B13:B15 に積 \mathbf{Ax} を計算する (B13:B15 を選択した状態で「=MMULT(B1:D3,B9:B11)」と入力し、Ctrl+Shift+Enterで確定)。
-

9.3 Excel によるベクトルの計算

補足として、Excel を用いてベクトルの計算が行える場合について説明する。ただし、Excel 2007 にはベクトル計算のための特別な関数は用意されていない(と思う)。

例としてベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} を考える。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (9.16)$$

Excel 2007

1. Web ページからベクトル計算用のファイルをダウンロードし、Excel で開く。

	A	B	C	D	E
1	a			b	
2		1			4
3		2			5
4		3			6

2. 「ホーム」 「セル」 「書式」 「ワークシートの移動またはコピー」で、「行列」、「連立一次方程式」と同じファイルにワークシートを移動する。
 3. ワークシート名を「vector」から「ベクトル」に変更する。
-

9.3.1 和

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

Excel 2007

- A5に「a+b」と書き、B5:B7の範囲に和を計算する。
 1. B5に「=B1+E1」と入力。
 2. B5をコピーしB6, B7貼り付ける。
-

9.3.2 絶対値

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (9.18)$$

Excel 2007

- A9に「|a|」と書き、B9に絶対値を計算する。
 1. B9に「=SQRT(SUMSQ(B1:B3))」と入力する。

[Excel 関数の説明] 「SQRT」は平方根を計算する関数。「SUMSQ」は指定された範囲のセル値の2乗の和をとる関数。「SQRT」の引数としてさらに「SUMSQ」という関数を用いている。このような使い方を「入れ子」という。
-

9.3.3 内積

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (9.19)$$

Excel 2007

- 内積を正直に計算する。
 1. A11に「a・b」と書く。
 2. B11に「=B1*E1+B2*E2+B3*E3」と入力する。
- \mathbf{a} , \mathbf{b} がともに 3×1 の行列だと思えば、内積は \mathbf{a} の転置行列 \mathbf{a}^t と \mathbf{b} の積として書ける。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^t \mathbf{b} \quad (9.20)$$

1. B12に「=MMULT(TRANSPOSE(B1:B3),E1:E3)」と入力して、**Ctrl+Shift+Enter**で確定する。この計算は1つのセルのみに計算結果を表示するが、「MMULT」は「配列関数」なので、確定するには**Ctrl+Shift+Enter**を用いる必要がある。
-

9.3.4 外積

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

残念ながら、ベクトルの外積は Excel 2007 では正直に計算するほかなさそうである。誰か、いい方法を知っていたら教えてください。