解答例：問題セット—集合論の基本

集合、部分集合

LLT1.1　次の集合のうち、どれとどれが等しいか。{r,t,s}, {s,t,r,s}, {t,s,t,r}, {s,r,s,t}

すべて等しい。

LLT1.2　次の集合の要素をリストせよ。ただし、$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ とする。

(a) $A = \{x : x \in \mathbf{N}, 3 < x < 12\}$

(b) $B = \{x : x \in \mathbf{N}, x \text{ is even}, x < 15\}$

(c) $C = \{x : x \in \mathbf{N}, 4 + x = 3\}$

(a) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
(b) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
(c) $C = \emptyset$

LLT1.3　次の集合を考える。

$$\emptyset, \quad A = \{1\}, \quad B = \{1, 3\}, \quad C = \{1, 5, 9\}, \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$
$$E = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad U = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$$

次にあげる集合の各ペアに対し、$\subseteq$ か $\not\subseteq$ かの正しい記号を入れよ。

(a) $\emptyset,\ A$　(c) $B,\ C$　(e) $C,\ D$　(g) $D,\ E$
(b) $A,\ B$　(d) $B,\ E$　(f) $C,\ E$　(h) $D,\ U$

(a) $\emptyset \subseteq A$　(c) $B \not\subseteq C$　(e) $C \not\subseteq D$　(g) $D \not\subseteq E$
(b) $A \subseteq B$　(d) $B \subseteq E$　(f) $C \subseteq E$　(h) $D \subseteq U$

LLT1.4　$A = \{2, 3, 4, 5\}$ が $B = \{x : x \in \mathbf{N}, x \text{ is even}\}$ の部分集合でないことを示せ。

5 は 偶数であるため、集合 B の定義により $5 \notin B$. しかし、$5 \in A$. このように、A のすべての要素が B に含まれるわけではない。したがって、$A \not\subseteq B$ である。

LLT1.5　$A = \{2, 3, 4, 5\}$ が $C = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$ の真部分集合であることを示せ。

$2, 3, 4, 5$ はいずれも C の用そであるので、$A \subseteq C$ である。また、たとえば 8 は C の要素であるが、A の要素ではない。よって、$A \neq C$ である。したがって、A は C の真部分集合である。

集合演算

問題 LLT1.6 から LLT1.8 では、次のように仮定する。

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad C = \{5, 6, 7, 8, 9\} \quad E = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$B = \{4, 5, 6, 7\} \quad D = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad F = \{1, 5, 9\}$$

LLT1.6　次の各集合を求めよ。

(a) $A \cup B$ と $A \cap B$　(c) $A \cup C$ と $A \cap C$　(e) $E \cup E$ と $E \cap E$
(b) $B \cup D$ と $B \cap D$　(d) $D \cup E$ と $D \cap E$　(f) $D \cup F$ と $D \cap F$

(a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,　$A \cap B = \{4, 5\}$.
(b) $B \cup D = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$,　$B \cap D = \{5, 7\}$.
(c) $A \cup C = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$,　$A \cap C = \{5\}$.
(d) $D \cup E = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$,　$D \cap E = \emptyset$.
(e) $E \cup E = \{2, 4, 6, 8\}$,　$E \cap E = \{2, 4, 6, 8\}$.
(f) $D \cup F = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,　$D \cap F = \{1, 5, 9\}$.

LLT1.7　次の各集合を求めよ。(a) $A - B$, $B - A$, $D - E$, $F - D$; (b) $A \oplus B$, $C \oplus D$, $E \oplus F$

(a) $A - B = \{1, 2, 3\}$,　$B - A = \{6, 7\}$,　$D - E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,　$F - D = \emptyset$;
(b) $A \oplus B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$,　$C \oplus D = \{1, 3, 6, 8\}$,　$E \oplus F = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$

LLT1.8　次の各集合を求めよ。

(a) $A \cap (B \cup E)$;　(b) $(A \cap D) - B$;
(c) $(B \cap F) \cup (C \cap E)$.

(a) $A \cap (B \cup E) = \{2, 4, 5\}$;　(b) $(A \cap D) - B = \{1, 3\}$;
(c) $(B \cap F) \cup (C \cap E) = \{5, 6, 8\}$.

LLT1.9　$A \cap B = A \cap C$ が成り立つのに、$B = C$ が成り立たないことがあり得ることを示せ.

$A = B = \emptyset$ とし、$C = \{1\}$ とせよ。すると、$A \cap B = \emptyset = A \cap C$ である。しかし、$B \neq C$ である。

LLT1.13　次のうち、いずれの集合が有限であるかを答えよ。

(a) $A = \{$ 一年の季節 $\}$　(d) $D = \{$ 奇数の整数 $\}$
(b) $B = \{$ 合衆国の州 $\}$　(e) $E = \{$ 12 を割り切る正の整数 $\}$
(c) $C = \{$ 1 未満の正の整数 $\}$　(f) $F = \{$ 合衆国にすむ猫 $\}$

(a) 有限　(d) 有限でない
(b) 有限　(e) 有限
(c) 有限　(f) 有限

集合のクラス

LLT1.19　集合 $A = [\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7,8\}]$ の要素をすべて書け.

A の要素は $\{1,2,3\}$ と $\{4,5\}$ と $\{6,7,8\}$ とである。

LLT1.20　問題 LLT1.19 でみた集合 A について考える。次の各主張について、それが真であるか偽であるかを答えよ。

(a) $1 \in A$　(c) $\{6,7,8\} \in A$　(e) $\emptyset \in A$
(b) $\{1,2,3\} \subseteq A$　(d) $\{\{4,5\}\} \subseteq A$　(f) $\emptyset \subseteq A$

(a) 偽　(c) 真　(e) 偽
(b) 偽　(d) 真　(f) 真

LLT1.21　集合 $A = \{a,b,c,d\}$ のべき集合 Power(A) を求めよ。

$\mathrm{Power}(A) = [\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},$
$\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}]$

集合に関する証明

LLT1.18　等式 $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ を証明せよ。

外延性の公理により、このことを証明するためには、すべての対象 x について、$x \in (A \cup B) - (A \cap B) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (B - A)$ を示せば十分である。そこで、c を任意の対象とせよ。まず、$c \in (A \cup B) - (A \cap B)$ という仮定のもとで、$c \in (A - B) \cup (B - A)$ を示す。そこで、$c \in (A \cup B) - (A \cap B)$ と仮定せよ。すると、$-$ の定義より、(i) $c \in A \cup B$ かつ (ii) $c \notin A \cap B$ である。(i) の結果と $\cup$ の定義により、$c \in A$ または $c \in B$ である。場合による証明のために、まず、$c \in A$ と仮定せよ。先の (ii) の結果と $\cap$ の定義により、$c \in A$ と $c \in B$ とが両方成り立つことはない。しかし、仮定により、$c \in A$ である。したがって、$c \notin B$ である。これと、$c \in A$ という仮定から、$c \in A - B$ が導ける。よって、明らかに、$c \in A - B$ または $c \in B - A$ である。したがって、$\cup$ の定義により、

$c \in (A - B) \cup (B - A)$ である。次に、$c \in B$ と仮定せよ。すると、同様の論証により、$c \in B - A$ が導け、したがって、$c \in (A - B) \cup (B - A)$ である。このように、どちらの場合にも $c \in (A - B) \cup (B - A)$ が導けたので、$c \in (A - B) \cup (B - A)$ と結論してよい。次に、$c \in (A - B) \cup (B - A)$ という仮定のもとで、$c \in (A \cup B) - (A \cap B)$ を示す。そこで、$c \in (A - B) \cup (B - A)$ と仮定せよ。すると、$\cup$ の定義により、$c \in A - B$ または $c \in B - A$ である。場合による証明のために、まず、$c \in A - B$ と仮定せよ。すると、$-$ の定義により、(iii) $c \in A$ かつ (iv) $c \notin B$ である。(iii) から、明らかに、$c \in A$ または $c \in B$ である。したがって、$\cup$ の定義により、$c \in A \cup B$ である。(iv) から、$c \in A$ かつ $c \in B$ ではありえない。よって、$c \notin A \cap B$ である。これと、先の $c \in A \cup B$ という結果により、$c \in (A \cup B) - (A \cap B)$ である。次に、$c \in B - A$ と仮定せよ。同様の論証により、この仮定からも、$c \in (A \cup B) - (A \cap B)$ が導ける。このように、どちらの場合にも同じ結果が導けたので、$c \in (A \cup B) - (A \cap B)$ と結論してよい。

LLT1.26　等式 $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$ と $(A \cap B) \subseteq B \subseteq (A \cup B)$ を証明せよ。

$(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$ について。まず、$(A \cap B) \subseteq A$ を示すために、c を任意の対象とし、$c \in A \cap B$ と仮定せよ。すると、$c \in A$ かつ $c \in B$ である。よって、$c \in A$ である。このことから、すべての対象 x について、$x \in A \cap B$ のとき、$x \in A$ であると言える。したがって、$\subseteq$ の定義により、$(A \cap B) \subseteq A$ である。次に、$A \subseteq (A \cup B)$ を示すために、c を任意の対象とし、$c \in A$ と仮定せよ。すると、明らかに、$c \in A$ または $c \in B$ である。よって、$c \in A \cup B$ である。このことから、すべての対象 x について、$x \in A$ のとき、$x \in A \cup B$ であると言える。したがって、$\subseteq$ の定義により、$A \subseteq (A \cup B)$ である。

$(A \cap B) \subseteq B \subseteq (A \cup B)$ についても、同様に証明できる。まず、$(A \cap B) \subseteq B$ を示すために、c を任意の対象とし、$c \in A \cap B$ と仮定せよ。すると、$c \in A$ かつ $c \in B$ である。よって、$c \in B$ である。このことから、すべての対象 x について、$x \in A \cap B$ のとき、$x \in B$ であると言える。したがって、$\subseteq$ の定義により、$(A \cap B) \subseteq B$ である。次に、$B \subseteq (A \cup B)$ を示すために、任意の対象 c について、$c \in B$ と仮定せよ。すると、明らかに、$c \in A$ または $c \in B$ である。よって、$c \in A \cup B$ である。このことから、すべての対象 x について、$x \in B$ のとき、$x \in A \cup B$ であると言える。したがって、$\subseteq$ の定義により、$B \subseteq (A \cup B)$ である。

LLT1.27　次の命題を証明せよ。

次の三つの条件はすべて同値である: $A \subseteq B, A \cap B = A, A \cup B = B$.

これを示すためには、次の３つのことが証明できればよい。

(a) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

(b) $A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B$

(c) $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

(a) を証明するために、$A \subseteq B$ と仮定せよ。外延性の公理により、$A \cap B = A$ を示すためには、任意の対象 x について、$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ を示せばよい。そこで、c を任意

の対象とせよ。まず、$c \in A \cap B$ という仮定のもとで、$c \in A$ を示す。そこで、$c \in A \cap B$ と仮定せよ。すると、$\cap$ の定義により、$c \in A$ かつ $c \in B$ である。したがって、$c \in A$ である。次に、$c \in A$ という仮定のもとで、$c \in A \cap B$ を示す。そこで、$c \in A$ と仮定せよ。仮定により、$A \subseteq B$ である。$\subseteq$ の定義により、これは、A のすべての要素が B の要素であることを意味する。しかし、仮定により、$c \in A$ である。よって、$c \in B$ である。このように、$c \in A$ かつ $c \in B$ であるから、$\cap$ の定義により $c \in A \cap B$ である。

(b) を証明するために、$A \cap B = A$ と仮定せよ。外延性の公理により、$A \cup B = B$ を示すためには、任意の対象 x について、$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B$ を示せばよい。まず、$c \in A \cup B$ という仮定のもとで、$c \in B$ を示す。そこで、$c \in A \cup B$ と仮定せよ。すると、$\cup$ の定義により、$c \in A$ または $c \in B$ である。場合による証明のために、まず、$c \in A$ と仮定せよ。しかし、仮定により、$A \cap B = A$ である。よって代入により、$c \in A \cap B$ である。これは、$\cap$ の定義により、$c \in A$ かつ $c \in B$ であることを意味する。よって、$c \in B$ である。次に $c \in B$ と仮定せよ。すると、当然、$c \in B$ である。どちらの場合にも、同じ結果が得られたので、$c \in B$ と結論してよい。次に、$c \in B$ という仮定のもとで、$c \in A \cup B$ を示す。そこで、$c \in B$ と仮定せよ。すると明らかに、$c \in A$ または $c \in B$ である。よって、$\cup$ の定義により、$c \in A \cup B$ である。

(c) を証明するために、$A \cup B = B$ と仮定せよ。$A \subseteq B$ を示すために、c を任意の対象とし、$c \in A$ と仮定せよ。すると、あきらかに、$c \in A$ または $c \in B$ である。したがって、$\cup$ の定義により、$c \in A \cup B$ である。しかし、仮定により、$A \cup B = B$ である。よって、代入により、$c \in B$ である。このことから、すべての対象 x について、$x \in A$ のとき、$x \in B$ であると言える。したがって、$\subseteq$ の定義により、$A \subseteq B$ である。

CPZ 4.18* A と B を集合とする。$A \cup B = A$ である必要十分条件は $B \subseteq A$ である。これを証明せよ。

上記の問題 LLT1.27 と重複するので、解答例は省略。

CPZ 4.19* 任意の集合 A, B, C について、以下が成り立つことをそれぞれ証明せよ。

1. 交換法則
   (a) $A \cup B = B \cup A$
   (b) $A \cap B = B \cap A$
2. 結合法則
   (a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. 分配法則
   (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. ド・モルガンの法則

 (a) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$

 (b) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$

1. 交換法則

 (a) $A \cup B = B \cup A$ について。c を任意の対象とする。すると、

$$\begin{aligned} c \in A \cup B &\Leftrightarrow c \in A \text{ または } c \in B \text{（$\cup$ の定義より）} \\ &\Leftrightarrow c \in B \text{ または } c \in A \\ &\Leftrightarrow c \in B \cup A \text{（$\cup$ の定義より）} \end{aligned}$$

 このことから、すべての対象 x について、$x \in A \cup B \Leftrightarrow c \in B \cup A$ と言える。よって、外延性の公理により、$A \cup B = B \cup A$ である。

 (b) $A \cap B = B \cap A$ について。c を任意の対象とする。すると、

$$\begin{aligned} c \in A \cap B &\Leftrightarrow c \in A \text{ かつ } c \in B \text{（$\cap$ の定義より）} \\ &\Leftrightarrow c \in B \text{ かつ } c \in A \\ &\Leftrightarrow c \in B \cap A \text{（$\cap$ の定義より）} \end{aligned}$$

 このことから、すべての対象 x について、$x \in A \cap B \Leftrightarrow c \in B \cap A$ と言える。よって、外延性の公理により、$A \cap B = B \cap A$ である。

2. 結合法則

 (a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ について。c を任意の対象とする。すると、

$$\begin{aligned} c \in A \cup (B \cup C) &\Leftrightarrow c \in A \text{ または } c \in B \cup C \text{（$\cup$ の定義より）} \\ &\Leftrightarrow c \in A \text{ または } c \in B \text{ または } c \in C \text{（$\cup$ の定義より）} \\ &\Leftrightarrow c \in A \cup B \text{ または } c \in C \text{（$\cup$ の定義より）} \\ &\Leftrightarrow c \in (A \cup B) \cup C \text{（$\cup$ の定義より）} \end{aligned}$$

 このことから、すべての対象 x について、$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow c \in (A \cup B) \cup C$ と言える。よって、外延性の公理により、$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ である。

 (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ について。c を任意の対象とする。すると、

$$\begin{aligned} c \in A \cap (B \cap C) &\Leftrightarrow c \in A \text{ かつ } c \in B \cap C \text{（$\cap$ の定義より）} \\ &\Leftrightarrow c \in A \text{ かつ } c \in B \text{ かつ } c \in C \text{（$\cap$ の定義より）} \\ &\Leftrightarrow c \in A \cap B \text{ かつ } c \in C \text{（$\cap$ の定義より）} \\ &\Leftrightarrow c \in (A \cap B) \cap C \text{（$\cap$ の定義より）} \end{aligned}$$

 このことから、すべての対象 x について、$x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow c \in (A \cap B) \cap C$ と言える。よって、外延性の公理により、$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ である。

3. 分配法則

 (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ について。外延性の公理により、これを証明するためには、任意の対象 x について、$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ を示せば十分である。そこで、c を任意の対象とする。まず、$d \in A \cup (B \cap C)$ という仮定のもとで、$d \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ を示す。そこで、$d \in A \cup (B \cap C)$ と仮定せよ。すると、$\cup$ の定義により、$d \in A$ または $d \in B \cap C$ である。場合による証明のために、まず、$d \in A$ と仮定せよ。すると、当然、$d \in A$ または $d \in B$ である。よって、$\cup$ の定義により、$d \in A \cup B$ である。同様の仕方で、$d \in A$ という仮定からは、$d \in A \cup C$ が導ける。このように、$d \in A \cup B$ かつ $d \in A \cup C$ であるから、$\cap$ の定義により、$d \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ である。つぎに、$d \in B \cap C$ と仮定せよ。すると、$\cap$ の定義により、$d \in B$ かつ $d \in C$ である。$d \in B$ という結果から、当然、$d \in A$ または $d \in B$ であり、よって、$\cup$ の定義により、$d \in A \cup B$ である。また、$d \in C$ という結果から、当然、$d \in A$ または $d \in C$ であり、よって、$\cup$ の定義により、$d \in A \cup C$ である。以上により、$d \in A \cup B$ かつ $d \in A \cup C$ となり、$\cap$ の定

義により、$d \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ である。このようにいずれの場合にも同じ結果が得られたので、$d \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ と結論できる。

つぎに、$d \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ という仮定のもとで、$d \in A \cup (B \cap C)$ を示す。そこで、$d \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ と仮定せよ。すると、$\cap$ の定義により、次の結果が得られる。

(*) $d \in A \cup B$ かつ $d \in A \cup C$

(*) より、当然、$d \in A \cup B$ である。すると、$\cup$ の定義により、$d \in A$ または $d \in B$ である。場合による証明のために、$d \in A$ と仮定せよ。すると、当然、$d \in A$ または $d \in B \cap C$ である。よって、$\cap$ の定義により、$d \in A \cup (B \cap C)$ である。次に、$d \in B$ と仮定せよ。先に得られた (*) より、$d \in A \cup C$ であり、これは、$\cup$ の定義により、$d \in A$ または $d \in C$ であることを意味する。そこで、場合による証明のために、まず、$d \in A$ と仮定せよ。すると、当然、$d \in A$ または $d \in B \cap C$ である。よって、$\cap$ の定義により、$d \in A \cup (B \cap C)$ である。次に、$d \in C$ と仮定せよ。この仮定と、先の仮定 $d \in B$ より、$d \in B \cap C$ である。よって、当然、$d \in A$ または $d \in B \cap C$ である。したがって、$d \in A \cup (B \cap C)$ と言える。このように、いずれの場合にも、$d \in A \cup (B \cap C)$ が導けるので、$d \in B$ という仮定のもとでは、$d \in A \cup (B \cap C)$ であると言える。先に、$d \in A$ という仮定のもとで同じことが導けたらから、$d \in A \cup (B \cap C)$ と結論できる。

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ について。上記の $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ の証明と同様の仕方で証明できるので、解答例は省略する。

4. ド・モルガンの法則

(a) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$ について。外延性の公理により、これを証明するためには、任意の対象 x について、$x \in C - (A \cup B) \Leftrightarrow x \in (C - A) \cap (C - B)$ を示せば十分である。そこで、d を任意の対象とする。まず、$d \in C - (A \cup B)$ という仮定のもとで、$d \in (C - A) \cap (C - B)$ を示す。この仮定と $-$ の定義により、(i) $d \in C$ かつ (ii) $d \notin A \cup B$ が得られる。$\cup$ の定義により、(ii) は、$d \in A$ と $d \in B$ ののどちらかがが真ということはないということを意味する。すなわち、$d \in A$ も $d \in B$ も成り立たないことを意味する。よって、$d \notin A$ かつ $d \notin B$ である。(i) により、$d \in C$ であるので、$d \notin A$ という結果からは $d \in C - A$ が得られ、$d \notin B$ という結果からは $d \in C - B$ が得られる。よって、$\cap$ の定義により、$d \in (C - A) \cap (C - B)$ である。次に、$d \in (C - A) \cap (C - B)$ という仮定のもとで、$d \in C - (A \cup B)$ を示す。この仮定と $\cap$ の定義により、$d \in C - A$ かつ $d \in C - B$ である。したがって、$-$ の定義により、すなわち、(iii) $d \in C$ かつ (iv) $d \notin A$ かつ (v) $d \notin B$ である。このうち、(iv) と (v) により、$d \in A$ と $d \in B$ のどちらかがが真ということはない。すなわち、$d \notin A \cup B$ である。しかし、(iii) により、$d \in C$ である。よって、$-$ の定義により、$d \in C - (A \cup B)$ である。

(b) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$ について。上記の $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ の証明と同様の仕方で証明できるので、解答例は省略する。