産業連関分析　実物体系

1. 投入係数行列

産業連関表　中間投入　(兆円)

	農　業	工　業	サービス業	最終需要	産出合計
農業財	20	50	60	70	200
工業財	30	150	40	280	500
サービス	10	100	140	150	400

中間投入と産出の比を**投入係数**という．生産技術がレオンチェフ型であり，かつ生産者が費用を最小にしているならば，投入係数は一定になる．

第 j 部門に投入された i 番目の生産要素の投入係数を a_{ij} とする．上の産業連関表から，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{200} & \frac{50}{500} & \frac{60}{400} \\ \frac{30}{200} & \frac{150}{500} & \frac{40}{400} \\ \frac{10}{200} & \frac{100}{500} & \frac{140}{400} \end{pmatrix} \tag{1}$$

が得られる．A を**投入係数行列**という．

短期的には各産業の生産技術は変わらない．しかし最終需要は，景気や政策，災害などのいろいろな理由で変動する．以下では，ある部門の最終需要が増えたとき，各部門の生産がどのように変化するかを分析する．

たとえば，農業財の最終需要が 1 兆円増えたとする．まず，需要を満たすように，農業部門の生産が 1 兆円増える（直接効果）．しかし話はこれだけでは終わらない．農業財を生産するには生産要素として農業財，工業財，サービスを仕入れる必要がある．(1) 式より，農業財を 1 兆円生産するために，農業財 $a_{11} = 0.1$ 兆円，工業財 $a_{21} = 0.15$ 兆円，サービス $a_{31} = 0.05$ 兆円の要素需要が発生する．そして，新たな需要を満たすように各部門で生産が増える．つまり，最終需要の増えた農業部門以外でも生産が増えることになる（間接効果）．話はまだ終わらない．各部門で生じた追加的な生産のために，さらに要素需要が生ずるからである．以下では,「生産が生産を呼ぶプロセス」が収束した後で，どのくらい生産が増えるのかを調べる．

2. レオンチェフ行例

農業財，工業財，サービスの産出量を y_1, y_2, y_3 とし，対応する最終需要を c_1, c_2, c_3 とする．産業連関表を行列を用いて表すと，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる．産出ベクトルをまとめると，

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

となる．ここで，

$$I - A = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

を**レオンチェフ行列**という（I は単位行列）．

例　(1) 式を (4) 式に代入すると，

$$I - A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.15 \\ -0.15 & 0.7 & -0.1 \\ -0.05 & -0.2 & 0.65 \end{pmatrix} \tag{5}$$

となる．行列式を計算すると，$|I-A| = 0.3715$ である．

$|I-A| \neq 0$ のとき，逆行列 $(I-A)^{-1}$ が存在する．**レオンチェフ逆行列**という．

(3) 式の両辺左から $(I-A)^{-1}$ をかけると，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (I-A)^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

が得られる．(6) 式は，最終需要ベクトルが与えられると産出ベクトルが一意に決まることを意味している．また，$(I-A)^{-1}$ の成分はすべて定数なので，産出 y_1, y_2, y_3 はいずれも，最終需要 c_1, c_2, c_3 の 1 次式で表されることがわかる．

3. クラーメルの公式ふたたび

逆行列 $(I-A)^{-1}$ を求めるのは面倒なので，クラーメルの公式を利用する．

いま，c_2, c_3 は一定のまま，c_1 だけ増加したとしよう．(3) 式の両辺を c_1 で偏微分すると，

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial y_1/\partial c_1 \\ \partial y_2/\partial c_1 \\ \partial y_3/\partial c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．

ここで，$|I-A| = 0.3715$ であって，(5) 式より，

$$\begin{vmatrix} 1 & -0.1 & -0.15 \\ 0 & 0.7 & -0.1 \\ 0 & -0.2 & 0.65 \end{vmatrix} = 0.4350$$

$$\begin{vmatrix} 0.9 & 1 & -0.15 \\ -0.15 & 0 & -0.1 \\ -0.05 & 0 & 0.65 \end{vmatrix} = 0.1025$$

$$\begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 & 1 \\ -0.15 & 0.7 & 0 \\ -0.05 & -0.2 & 0 \end{vmatrix} = 0.0650$$

であるから，クラーメルの公式より，

$$\frac{\partial y_1}{\partial c_1} = \frac{0.4350}{0.3715} = 1.17$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial c_1} = \frac{0.1025}{0.3715} = 0.28$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial c_1} = \frac{0.0650}{0.3715} = 0.17$$

が得られる．

農業財の最終需要 c_1 が 1 兆円増えたとする．このとき農業部門の生産は 1.17 兆円増える．工業部門は 0.28 兆円，サービス部門は 0.17 兆円増える．合計すると経済全体では，1.62 兆円増える．つまり，直接効果が 1 兆円，間接効果が 0.62 兆円である．

問題

次のような最終需要の変化が生じたとき，各産業の生産はそれぞれどのくらい増えるか．

(1) 工業財の最終需要が 1 兆円増えたとき．($\partial y_i/\partial c_2$ を求める)

(2) サービスの最終需要が 1 兆円増えたとき．($\partial y_i/\partial c_3$ を求める)

4. 2 部門産業連関表

	中間投入			
	産業 1	産業 2	最終需要	産出合計
産業 1	20	60	20	100
産業 2	40	120	40	200

投入係数行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{60}{200} \\ \frac{40}{100} & \frac{120}{200} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

産業連関表の行列表記

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

ただし，y_i, c_i は産業 i の産出，最終需要を表す.

(7) 式より，

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.3 \\ -0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

ここで，

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.3 \\ -0.4 & 0.4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

を (8) 式の両辺左からかけると，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

が得られる．つまり，

$$y_1 = 2c_1 + 1.5c_2 \tag{9.1}$$

$$y_2 = 2c_1 + 4c_2 \tag{9.2}$$

である．産出 y_1, y_2 はともに，最終需要 c_1, c_2 の 1 次式で表されることが分かる．特に，$(c_1, c_2) = (20, 40)$ のとき，$(y_1, y_2) = (100, 200)$ である.

$$\frac{\partial y_1}{\partial c_1} = 2, \quad \frac{\partial y_2}{\partial c_1} = 2$$

であるから，産業 1 の最終需要 c_1 が 1 兆円増えると，産業 1 で 2 兆円，産業 2 で 2 兆円，計 4 兆円生産が増える.

$$\frac{\partial y_1}{\partial c_2} = 1.5, \quad \frac{\partial y_2}{\partial c_2} = 4$$

であるから，産業 2 の最終需要 c_2 が 1 兆円増えると，産業 2 で 4 兆円，産業 1 で 1.5 兆円，計 5.5 兆円生産が増える.