

所得分配の指標 ジニ係数

1. ジニ係数とはなにか

まず所得階層を n 個に等分する. 下から i 番目の階層内の所得の平均を y_i とする ($y_1 < y_2 < \dots < y_n$).

ジニ係数は,

$$g = \frac{1}{2n^2\bar{y}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_i - y_j| \quad (1)$$

で定義される. ただし, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ は平均所得である.

$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_i - y_j|$ のことを**平均差**という. ジニ係数とは, 所得のばらつきを表す平均差を平均所得を用いて相対化したものである.

例 $n = 3$ のとき

$ y_i - y_j $	y_1	y_2	y_3
y_1	0	$y_2 - y_1$	$y_3 - y_1$
y_2	$y_2 - y_1$	0	$y_3 - y_2$
y_3	$y_3 - y_1$	$y_3 - y_2$	0

表より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_i - y_j| &= 2 \{ (y_2 - y_1) + (y_3 - y_1) + (y_3 - y_2) \} \\ &= 4(y_3 - y_1) \end{aligned}$$

である. $n = 3, \bar{y} = (y_1 + y_2 + y_3)/3$ を (1) 式に代入すると,

$$g = \frac{2}{3} \frac{y_3 - y_1}{y_1 + y_2 + y_3}$$

が得られる.

2. ローレンツ曲線

$n = 3$ のときの度数分布および累積度数分布は次の表で表せる.

階級	階級累積度数	所得度数	所得累積度数
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{y_1}{y_1+y_2+y_3}$	$\alpha_1 = \frac{y_1}{y_1+y_2+y_3}$
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{y_2}{y_1+y_2+y_3}$	$\alpha_2 = \frac{y_1+y_2}{y_1+y_2+y_3}$
3	1	$\frac{y_3}{y_1+y_2+y_3}$	1

横軸を階級累積度数, 縦軸を所得累積度数としてグラフにしたものをローレンツ曲線という.

ローレンツ曲線の性質

- (1) 2点 $(0,0)$, $(1,1)$ を通る.
- (2) 45度線の下にある.
- (3) 各線分の傾きは右にいくほど大きくなる.

3. ジニ係数とローレンツ曲線

一般に次の関係が成立する.

$$(\text{ジニ係数}) = (45 \text{ 度線とローレンツ曲線の間の面積}) \times 2 \quad (2)$$

例 $n = 3$

ローレンツ曲線の下領域は1つの三角形と2つの台形からなる. 面積を計算すると,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} [\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_2 + 1)] = \frac{1}{6} (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)$$

となる. したがって, 関係式 (2) の右辺は,

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cdot \frac{1}{6} (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1) &= \frac{2}{3} (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \\ &= \frac{2}{3} \frac{y_3 - y_1}{y_1 + y_2 + y_3} \end{aligned}$$

となり, ジニ係数に一致する.

レポート

問題 1 定義を用いて, $n = 4$ のときのジニ係数が

$$g = \frac{3y_4 + y_3 - y_2 - 3y_1}{4(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}$$

となることを示しなさい.

問題 2 $n = 4$ のとき関係式 (2) が成立することを確認しなさい.

問題 3 $n = 10$ のとき, ジニ係数は

$$g = 0.9 - 0.2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_9) \quad (3)$$

で与えられることを示しなさい.

問題 4 次の表は平成 26 年の日本の当初所得および再分配所得の 10 分位の所得階層を表したものである.

- (1) 累積度数を求め, 表を完成しなさい.
- (2) ローレンツ曲線を図示しなさい.
- (3) (3) 式を用いて各所得分布のジニ係数を求めなさい.

表 日本の所得分配 (平成 26 年)

所得階層	当初所得		再分配所得	
	度数 (%)	累積度数 (%)	度数 (%)	累積度数 (%)
0-10%	0.0	0.0	1.9	1.9
10-20%	0.0		3.5	
20-30%	0.6		4.7	
30-40%	2.7		6.0	
40-50%	5.2		7.4	
50-60%	8.0		8.9	
60-70%	11.5		10.9	
70-80%	15.6		13.2	
80-90%	20.5		16.5	
90-100%	35.9	100	27.0	100