2項分布の平均と分散

毎回，ある事象が確率 p で起こるとする．
n 回試行したとき，その事象が k 回起こる確率は，

$$P_n(k) = {}_nC_k p^k q^{n-k}$$

である．ただし，$q = 1 - p$.
確率分布は次の通り．

X	0	$\cdots$	k	$\cdots$	n	
$P_n(X)$	q^n	$\cdots$	${}_nC_k p^k q^{n-k}$	$\cdots$	p^n	1

注　2 項定理より，

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

定理 1 平均，分散は，

$$E[X] = np \tag{1}$$
$$V[X] = np(1-p) \tag{2}$$

である．

［証明］
1. 平均

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k p^k q^{n-k} \tag{3}$$

組合せの定義より，

$$k\,{}_nC_k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\,{}_{n-1}C_{k-1}$$

と変形できる．

これを (3) 式に代入する．

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}C_{k-1} p^k q^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \\ &= np(p+q)^{n-1} \\ &= np \end{aligned}$$

2. 分散

$$V[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 \tag{4}$$

$E[X^2]$ を求める．まず，

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{k=0}^{n} k^2\,{}_nC_k p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot n\,{}_{n-1}C_{k-1} p^k q^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_{n-1}C_{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \end{aligned} \tag{5}$$

次に，(5) 式の和の部分は，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_{n-1}C_{k-1} p^{k-1} q^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,{}_{n-1}C_k p^k q^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k\,{}_{n-1}C_k p^k q^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k p^k q^{n-1-k} \end{aligned}$$

と変形できる．

上と同様にして，

$$\sum_{k=0}^{n-1} k\,{}_{n-1}C_k p^k q^{n-1-k} = (n-1)p \sum_{k=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{k-1} p^{k-1} q^{n-1-k} = (n-1)p(p+q)^{n-2} = (n-1)p$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k p^k q^{n-1-k} = (p+q)^{n-1} = 1$$

これらを (5) 式に代入すると，

$$E[X^2] = np[(n-1)p + 1] \tag{6}$$

が得られる．最後に，(1), (6) 式を (4) 式に代入すると (2) 式が得られる．