

公共財の自発的供給

宮澤和俊

「公共経済学」(小川・西森) 4章の補足

構成

1. モデルの設定
2. 公共財の自発的供給
 - 2.1 太郎の問題
 - 2.2 花子の問題
 - 2.3 均衡
 - 2.4 比較静学
 - 2.5 完全ただ乗り
3. 公共財の最適水準
 - 3.1 モデルの最適解
 - 3.2 一般化

1 モデルの設定

太郎くんと花子さんがいる。太郎くんの効用関数を,

$$u_1 = U_1(x, y_1) = xy_1 \quad (1)$$

とする。 x は公園のサイズ, y_1 はリンゴの個数を表す。

太郎くんの予算制約式を,

$$m_1 = g_1 + py_1 \quad (2)$$

とする。 m_1 は太郎くんの所得 (一定), p はリンゴの価格 (一定) である。 g_1 は, 公園建設のための寄付を表す。

花子さんの効用関数, 予算制約式を,

$$u_2 = U_2(x, y_2) = xy_2$$

$$m_2 = g_2 + py_2$$

とする。添え字の 1 が太郎くんを, 添え字の 2 が花子さんを表している。

寄付が多ければ, 公園のサイズは大きくなる。以下,

$$x = g_1 + g_2 \quad (3)$$

とする。

2 公共財の自発的供給

2.1 太郎の問題

花子さんの寄付 g_2 が多ければ、公園のサイズ x が大きくなり、太郎くんはありがたいと思う。でも、太郎くんは花子さんがどのくらい寄付をするのか分からない。分からないなりに、自分の寄付 g_1 を決める必要がある。(3) 式を (2) 式に代入すると、

$$m_1 + g_2 = x + py_1 \quad (4)$$

が得られる。

太郎くんの最適化問題は、次のように定式化される。

$$\max_{x, y_1} u_1 = xy_1 \quad \text{subject to} \quad m_1 + g_2 = x + py_1$$

ラグランジュ関数を、

$$L = xy_1 + \lambda(m_1 + g_2 - x - py_1)$$

とおく。 λ はラグランジュ乗数である。

1 階の条件は、

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y_1 - \lambda = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = x - \lambda p = 0 \quad (6)$$

である。(4), (5), (6) 式から、 x, y_1, λ が求められる。

(5), (6) 式で λ を消去する。

$$x = py_1$$

これを (4) 式に代入すると、

$$x^* = \frac{1}{2}(m_1 + g_2) \quad (7)$$

$$y_1^* = \frac{1}{2p}(m_1 + g_2) \quad (8)$$

が得られる。

2.2 花子の問題

太郎と同じように考えると、花子さんの最適化問題は、次のように定式化される。

$$\max_{x, y_2} u_2 = xy_2 \quad \text{subject to} \quad m_2 + g_1 = x + py_2$$

これを解くと、

$$x^* = \frac{1}{2}(m_2 + g_1) \quad (9)$$

$$y_2^* = \frac{1}{2p}(m_2 + g_1) \quad (10)$$

が得られる。

問題 1 (9), (10) 式を導出せよ。

2.3 均衡

(7) 式は、太郎くんの希望する公園のサイズ. (9) 式は、花子さんの希望する公園のサイズ. 均衡では一致する. 均衡条件は,

$$x^* = \frac{1}{2}(m_1 + g_2^*)$$

$$x^* = \frac{1}{2}(m_2 + g_1^*)$$

$$x^* = g_1^* + g_2^*$$

である. 3つの変数 x^*, g_1^*, g_2^* について方程式が 3 本あるので解ける. これを解くと,

$$x^* = \frac{1}{3}(m_1 + m_2) \quad (11)$$

$$g_1^* = \frac{2}{3}m_1 - \frac{1}{3}m_2 \quad (12)$$

$$g_2^* = \frac{2}{3}m_2 - \frac{1}{3}m_1 \quad (13)$$

が得られる.

(8), (10), (11) 式より, リンゴの消費量は次式で与えられる.

$$y_1^* = \frac{1}{3p}(m_1 + m_2)$$

$$y_2^* = \frac{1}{3p}(m_1 + m_2)$$

問題 2 (11), (12), (13) 式を導出せよ.

2.4 比較静学

(12) 式より,

$$\frac{\partial g_1^*}{\partial m_1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial g_1^*}{\partial m_2} = -\frac{1}{3}$$

が成り立つ.

太郎くんは, 自分の所得 m_1 が増えれば, 寄付を増やそうと思っている. また, 花子さんの所得 m_2 が増えたとき, 自分の寄付を減らそうと思っている. 完全ではないが, ただ乗りの誘因があることが分かる.

リンゴの消費量については,

$$\frac{\partial y_1^*}{\partial m_1} = \frac{\partial y_1^*}{\partial m_2} = \frac{1}{3p}$$

が成り立つ.

太郎くんは, 自分の所得 m_1 が増えれば, リンゴの消費量を増やそうと思っている (所得効果). さらに, 花子さんの所得 m_2 が増えたとき, 自分の寄付を減らして, リンゴの消費量を増やそうと思っている. 共同で公共財を生産するとき, 相手の所得や寄付に応じて自分の寄付を決めるという戦略的依存関係が生じる. その結果, 自分の私的財の消費量は, 自分の所得だけでなく, 相手の所得にも依存する.

2.5 完全ただ乗り

(12) 式より,

$$g_1^* = 0 \quad \text{if} \quad m_1 \leq 0.5m_2$$

となりそうである. 所得格差が大きいとき, 完全ただ乗りが生じる可能性がある. この点を明らかにするために, (7) 式を変形する. 太郎にとって最適な公園サイズは,

$$x^* = g_1^* + g_2$$

である. この式を (7) 式に代入すると,

$$g_1^* = g_1(g_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(m_1 - g_2) & \text{if } g_2 \leq m_1 \\ 0 & \text{if } g_2 \geq m_1 \end{cases} \quad (14)$$

が得られる. $g_1(g_2)$ を反応関数という. 反応関数を平面 (g_1, g_2) 上に描いたものを, 反応曲線という. 太郎の反応曲線は, 2 点 $(0, m_1), (0.5m_1, 0)$ を端点とする線分と, 半直線 $g_1 = 0$ ($g_2 \geq m_1$) から成る.

問題 3 (14) 式を平面 (g_1, g_2) 上に図示せよ.

花子の最適な公園サイズ $x^* = g_1 + g_2^*$ を (9) 式に代入すると, 花子の反応関数が得られる.

$$g_2^* = g_2(g_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(m_2 - g_1) & \text{if } g_1 \leq m_2 \\ 0 & \text{if } g_1 \geq m_2 \end{cases} \quad (15)$$

花子の反応曲線は, 2 点 $(0, 0.5m_2), (m_2, 0)$ を端点とする線分と, 半直線 $g_2 = 0$ ($g_1 \geq m_2$) から成る.

問題 4 (14) 式を平面 (g_1, g_2) 上に図示せよ.

均衡は, 反応曲線の交点で与えられる. 2 つの線分が交わる時, 交点の座標は, (12), (13) 式で与えられる.

所得格差が大きいとき, 2 つの線分が交わるとは限らない. $m_1 \leq 0.5m_2$ のとき, 反応曲線の交点は, $(0, 0.5m_2)$ である. $m_2 \leq 0.5m_1$ のとき, 反応曲線の交点は, $(0.5m_1, 0)$ である.

以上の結果を, 太郎の所得 m_1 で場合分けしてまとめると,

$$(g_1^*, g_2^*) = \begin{cases} (0, \frac{1}{2}m_2) & m_1 \leq \frac{1}{2}m_2 \\ (\frac{1}{3}(2m_1 - m_2), \frac{1}{3}(2m_2 - m_1)) & \text{if } \frac{1}{2}m_2 \leq m_1 \leq 2m_2 \\ (\frac{1}{2}m_1, 0) & 2m_2 \leq m_1 \end{cases} \quad (16)$$

となる. 公園のサイズは,

$$x^* = g_1^* + g_2^* = \begin{cases} \frac{1}{2}m_2 & m_1 \leq \frac{1}{2}m_2 \\ \frac{1}{3}(m_1 + m_2) & \text{if } \frac{1}{2}m_2 \leq m_1 \leq 2m_2 \\ \frac{1}{2}m_1 & 2m_2 \leq m_1 \end{cases} \quad (17)$$

である.

太郎の所得が花子の半分以下であるとき, 太郎は寄付をしない. 花子の所得が太郎の半分以下であるとき, 花子は寄付をしない. 所得格差が大きいとき, 完全ただ乗りが生じることが分かる.

問題 5 花子の所得を $m_2 = 100$ とする. 太郎の所得 m_1 と公園のサイズ x^* の関係を, 平面 (m_1, x^*) 上に図示せよ.

3 公共財の最適供給

3.1 モデルの最適解

パレート基準を用いて、望ましい公園のサイズを求めよう¹。花子の効用を一定に保ちながら、太郎の効用を最大にする問題を考える。

$$\max_{x, g_1, g_2, y_1, y_2} u_1 = xy_1$$

subject to

$$\begin{cases} m_1 = g_1 + py_1 \\ m_2 = g_2 + py_2 \\ x = g_1 + g_2 \\ \bar{u} = xy_2 \end{cases}$$

ここで、 \bar{u} は、花子の効用水準（一定）を表す。

このまま解いても良いが、式をまとめて、変数を減らすことができる。

$$\max_{x, y_1, y_2} u_1 = xy_1$$

subject to

$$m_1 + m_2 = x + p(y_1 + y_2) \quad (18)$$

$$\bar{u} = xy_2 \quad (19)$$

ラグランジュ関数を、

$$L = xy_1 + \lambda[m_1 + m_2 - x - p(y_1 + y_2)] + \mu(xy_2 - \bar{u})$$

とおく (λ, μ はラグランジュ乗数)。

1階の条件は、

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y_1 - \lambda + \mu y_2 = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = x - \lambda p = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = -\lambda p + \mu x = 0 \quad (22)$$

である。5つの変数 $x, y_1, y_2, \lambda, \mu$ に関して、(18), (19), (20), (21), (22) の5つの方程式があるので解ける。

実際に解くと、

$$x^* = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \quad (23)$$

$$y_1^* = \frac{1}{2p}(m_1 + m_2) - \frac{2\bar{u}}{m_1 + m_2} \quad (24)$$

$$y_2^* = \frac{2\bar{u}}{m_1 + m_2} \quad (25)$$

$$\lambda^* = \frac{1}{2p}(m_1 + m_2)$$

$$\mu^* = 1$$

¹ある配分の変更により、(1) 誰も損をせず、(2) 少なくとも1人が得をするとき、この変更はパレート改善であるという。これ以上パレート改善できない配分を、パレート最適という。

が得られる。

(11) 式 (あるいは (17) 式) と (23) 式を比較する。自発的供給での公園サイズは、最適水準よりも小さくなる。公共財の供給を市場に委ねると失敗する。ではどうしよう (5 章に続く)。

問題 6 (23), (24), (25) 式を導出せよ。

4 一般化

太郎と花子の効用関数を特定化せずに、パレート最適を求める。

$$\max_{x, y_1, y_2} u_1 = U_1(x, y_1)$$

subject to

$$m_1 + m_2 = x + p(y_1 + y_2) \quad (26)$$

$$\bar{u} = U_2(x, y_2) \quad (27)$$

ラグランジュ関数を,

$$L = U_1(x, y_1) + \lambda[m_1 + m_2 - x - p(y_1 + y_2)] + \mu[U_2(x, y_2) - \bar{u}]$$

とおく (λ, μ はラグランジュ乗数)。

1 階の条件は,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial U_1}{\partial x} - \lambda + \mu \frac{\partial U_2}{\partial x} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = \frac{\partial U_1}{\partial y_1} - \lambda p = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = -\lambda p + \mu \frac{\partial U_2}{\partial y_2} = 0 \quad (30)$$

である。前節同様、5 つの変数 $x, y_1, y_2, \lambda, \mu$ に関して、5 つの方程式があるので解ける。

(29), (30) 式より、ラグランジュ乗数は,

$$\lambda = \frac{1}{p} \frac{\partial U_1}{\partial y_1}$$

$$\mu = \frac{\frac{\partial U_1}{\partial y_1}}{\frac{\partial U_2}{\partial y_2}}$$

である。これらを (28) 式に代入し、整理すると,

$$\frac{\frac{\partial U_1}{\partial x}}{\frac{\partial U_1}{\partial y_1}} + \frac{\frac{\partial U_2}{\partial x}}{\frac{\partial U_2}{\partial y_2}} = \frac{1}{p} \quad (31)$$

が得られる。あとは、(26), (27), (31) を用いて、 x, y_1, y_2 を解けばよい。

(31) 式の左辺第 1 項は、太郎の限界代替率を、第 2 項は花子の限界代替率を表す。限界代替率とは、リンゴで測った公園の価値である。リンゴの個数で測るということは、太郎の価値と花子の価値は比較可能であり、足したり引いたりしてもよいことを意味する。左辺は、公園建設に対する太郎と花子の評価の和、つまり、社会的限界評価を表している。

公園を 1 単位増やすと、リンゴの消費量が $1/p$ だけ減る。つまり、リンゴで測った公園建設の限界費用は、 $1/p$ である。(31) 式の右辺は、公園建設の限界費用を表している。

公共財は、社会的限界評価 ($\sum_i MRS_i$) と限界費用 ($1/p$) が一致する水準で供給するのが望ましい。