Ramsey model (3) Labor-leisure choice

次の最適化問題を考える．

$$U_0 = \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\log c_t + \gamma \log L_t) \tag{1}$$

subject to

$$\text{資源制約} \quad y_t = c_t + i_t \tag{2}$$

$$\text{時間制約} \quad 1 = l_t + L_t \tag{3}$$

$$\text{資本蓄積} \quad k_{t+1} = i_t \tag{4}$$

$$\text{マクロ生産関数} \quad y_t = f(k_t, l_t) \tag{5}$$

下付きの t は時点を表す．c は消費，L は余暇，l は労働，y は GDP，i は投資，k は資本である．$0 < \beta < 1$ は割引要素を表す定数，$\gamma > 0$ は余暇選好の大きさを表す定数である．

1. 式を整理すると，最適化問題を次のように定式化できることを示せ．

$$U_0 = \max_{c_t,\, l_t,\, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log c_t + \gamma \log(1 - l_t)] \quad \text{subject to} \quad f(k_t, l_t) = c_t + k_{t+1} \tag{6}$$

ラグランジュ関数を，

$$L_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \log c_t + \gamma \log(1 - l_t) + \mu_t [f(k_t, l_t) - c_t - k_{t+1}] \right\}$$

とおく．$\mu_t > 0$ はラグランジュ乗数である．

2. 最適化の 1 階の条件

$$\frac{1}{c_t} - \mu_t = 0 \tag{7}$$

$$-\frac{\gamma}{1 - l_t} + \mu_t \frac{\partial y_t}{\partial l_t} = 0 \tag{8}$$

$$-\mu_t + \beta \mu_{t+1} \frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}} = 0 \tag{9}$$

を導出せよ．なお，横断性条件 (transversality condition) は，

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \mu_t k_{t+1} = 0 \tag{10}$$

である．

生産関数を次のように特定化する．

$$y_t = f(k_t, l_t) = A k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \tag{11}$$

ただし，$0 < \alpha < 1$，$A > 0$ は定数である．

3. (11) 式の技術のもとで，資本の限界生産力と平均生産力の間に，

$$\frac{\partial y_t}{\partial k_t} = \alpha \frac{y_t}{k_t} \tag{12}$$

の関係が成立することを示せ．

4. (6), (7) 式を用いて，次の方程式を導出せよ．

$$\mu_t y_t = 1 + \mu_t k_{t+1} \tag{13}$$

5. (9), (12) 式を用いて，次の方程式を導出せよ．

$$\mu_t k_{t+1} = \beta\alpha\mu_{t+1} y_{t+1} \tag{14}$$

6. $\mu_t k_{t+1}$ は効用で測った t 時点の資本の価値を表す．これを x_t とおく．

$$x_t = \mu_t k_{t+1} \tag{15}$$

(13), (14) 式を用いて，次の x_t の漸化式を導出せよ．

$$x_{t+1} = \frac{1}{\beta\alpha} x_t - 1 \tag{16}$$

7. 平面 (x_t, x_{t+1}) 上に，(16) 式と 45 度線を図示せよ．定常値は，

$$x^* = \frac{\beta\alpha}{1-\beta\alpha} \tag{17}$$

であり，均衡は広域的に不安定であることを示せ．

8. 7 の結果から，すべての時点 t において，

$$x_t = x^*$$

が成り立つ．このとき，(10) 式の横断性条件が満たされることを示せ．

9. (13), (17) 式より，

$$\mu_t y_t = \frac{1}{1-\beta\alpha} \tag{18}$$

を得る．この式を用いて，次の投資関数，消費関数を導出せよ．

$$i_t = \beta\alpha y_t \tag{19}$$

$$c_t = (1-\beta\alpha) y_t \tag{20}$$

10. (11) 式の技術のもとで，労働の限界生産力と平均生産力の間に，

$$\frac{\partial y_t}{\partial l_t} = (1-\alpha)\frac{y_t}{l_t} \tag{21}$$

の関係が成立する．(8), (18), (21) 式を用いて，次の労働 l_t の方程式を導出せよ．

$$\frac{\gamma}{1-l_t} = \frac{1-\alpha}{1-\beta\alpha}\frac{1}{l_t} \tag{22}$$

11. 労働と余暇の時間が次式で与えられることを示せ．

$$\begin{aligned} l_t &= \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\gamma(1-\beta\alpha)} \\ L_t &= \frac{\gamma(1-\beta\alpha)}{1-\alpha+\gamma(1-\beta\alpha)} \end{aligned} \tag{23}$$

12. (23) 式を l^* とおく．このとき，資本の漸化式

$$k_{t+1} = \beta\alpha A (l^*)^{1-\alpha} k_t^{\alpha} \tag{24}$$

を導出せよ．

13. 平面 (k_t, k_{t+1}) 上に (24) 式の曲線と 45 度線を図示せよ．また，k_0 が与えられたときの，k_1, k_2, k_3 を図示せよ．

1. 略
2. 略
3. 略
4.
$$y_t = \frac{1}{\mu_t} + k_{t+1} \Rightarrow \mu_t y_t = 1 + \mu_t k_{t+1}$$
5.
$$\mu_t = \beta \mu_{t+1} \frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_{t+1}} \Rightarrow \mu_t k_{t+1} = \beta\alpha\mu_{t+1} y_{t+1}$$
6.
$$x_t = \mu_t k_{t+1} = \beta\alpha\mu_{t+1} y_{t+1} = \beta\alpha\left(1 + \mu_t k_{t+1}\right) = \beta\alpha(1 + x_{t+1})$$
7. 図は略．$x_t = x_{t+1} = x^*$ とおくと，
$$x^* = \frac{\beta\alpha}{1 - \beta\alpha}$$
8. 横断性条件は,
$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \mu_t k_{t+1} = \lim_{t\to\infty} \beta^t x^* = 0$$
9.
$$\mu_t y_t = \frac{1}{1 - \beta\alpha}$$
より，
$$\frac{k_{t+1}}{y_t} = \frac{\mu_t k_{t+1}}{\mu_t y_t} = \beta\alpha \Rightarrow i_t = \beta\alpha y_t$$
$$c_t = y_t - i_t = (1 - \beta\alpha) y_t$$
10.
$$\frac{\gamma}{1 - l_t} = \mu_t \frac{\partial y_t}{\partial l_t} = \mu_t \times (1 - \alpha) \frac{y_t}{l_t} = \frac{1 - \alpha}{1 - \beta\alpha} \frac{1}{l_t}$$
11. (22) 式を解く．
12.
$$k_{t+1} = \beta\alpha y_t = \beta\alpha A k_t^{\alpha} (l^*)^{1-\alpha}$$
13. 略