要素代替の弾力性

宮澤和俊

2019 年度大学院「家族の経済学」の補足

費用最小化問題

$$\min_{K,L} c = wL + rK \quad \text{subject to } Y = F(K, L) \tag{1}$$

L 労働，K 資本，w 賃金率，r 利子率，Y 生産量（一定）

最適化条件は，限界代替率イコール要素価格比．

$$\frac{F_L(K,L)}{F_K(K,L)} = \frac{w}{r} \tag{2}$$

(1), (2) 式より，要素需要関数

$$K^* = K\left(\frac{w}{r}\right)$$
$$L^* = L\left(\frac{w}{r}\right)$$

が得られる．

要素価格比 $\frac{w}{r}$ が上昇すると，投入要素の比率 $\frac{L^*}{K^*}$ が低下する．「要素価格比が 1% 上昇したとき，投入要素の比率が何パーセント低下するのか」を調べる．要素代替の弾力性という．

$$\varepsilon = \frac{-\frac{d\left(\frac{L^*}{K^*}\right)}{\left(\frac{L^*}{K^*}\right)}}{\frac{d\left(\frac{w}{r}\right)}{\left(\frac{w}{r}\right)}} = -\frac{d\ln\left(\frac{L^*}{K^*}\right)}{d\ln\left(\frac{w}{r}\right)} = \frac{d\ln\left(\frac{K^*}{L^*}\right)}{d\ln\left(\frac{w}{r}\right)} \tag{3}$$

例 1．コブ＝ダグラス生産関数

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1, A > 0)$$

限界代替率は，

$$\frac{F_L}{F_K} = \frac{(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}}{\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L}$$

(2) 式より，

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L} = \frac{w}{r}$$

対数をとる．

$$\ln\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) + \ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln\left(\frac{w}{r}\right)$$

全微分する．

$$d\ln\left(\frac{K}{L}\right) = d\ln\left(\frac{w}{r}\right)$$

したがって，要素代替の弾力性は，

$$\varepsilon = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln\left(\frac{w}{r}\right)} = 1$$

例 2．CES 生産関数

$$Y = [\alpha K^{\sigma} + (1-\alpha)L^{\sigma}]^{\frac{1}{\sigma}} \quad (0 < \alpha < 1, \sigma < 1)$$

限界代替率は,

$$\frac{F_L}{F_K} = \frac{\frac{1}{\sigma}[.]^{\frac{1}{\sigma}-1} \cdot (1-\alpha)\sigma L^{\sigma-1}}{\frac{1}{\sigma}[.]^{\frac{1}{\sigma}-1} \cdot \alpha\sigma K^{\sigma-1}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\sigma}$$

(2) 式より,

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\sigma} = \frac{w}{r}$$

対数をとる．

$$\ln\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) + (1-\sigma)\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln\left(\frac{w}{r}\right)$$

全微分する．

$$(1-\sigma)d\ln\left(\frac{K}{L}\right) = d\ln\left(\frac{w}{r}\right)$$

したがって，要素代替の弾力性は,

$$\varepsilon = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln\left(\frac{w}{r}\right)} = \frac{1}{1-\sigma}$$

一般解

1 人あたり資本を k，1 人あたり生産量を y とする．

$$k = \frac{K}{L}$$
$$y = \frac{Y}{L}$$

定理 1 規模に関して収穫一定を仮定すると，

(i) 1 人あたり生産量 y は，1 人あたり資本 k の関数 $y = f(k)$ として表せる．

(ii) 資本，労働の限界生産力は，それぞれ,

$$F_K = f'(k) \tag{4}$$
$$F_L = f(k) - kf'(k) \tag{5}$$

で与えられる．

証明. (i) 規模に関して収穫一定なので,

$$y = \frac{1}{L} \cdot F(K, L) = F\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = F(k, 1)$$

が成り立つ．$F(k, 1) = f(k)$ とおくと，$y = f(k)$ と表せる．

(ii) $Y = yL = f(k)L$, $k = K/L$ を用いると，資本の限界生産力は,

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(k) \cdot \frac{1}{L} \cdot L = f'(k)$$

労働の限界生産力は,

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = f(k) \cdot 1 + f'(k) \cdot \left(-\frac{K}{L^2}\right) \cdot L = f(k) - kf'(k)$$

□

定理 2 要素代替の弾力性は，$y = f(k)$ を用いると，

$$\varepsilon = -\frac{[f(k) - kf'(k)]f'(k)}{kf(k)f''(k)} \tag{6}$$

で与えられる．

証明. (4), (5) 式を (2) 式に代入する．

$$\frac{f(k)}{f'(k)} - k = \frac{w}{r} \tag{7}$$

(7) 式から，$k = k(\frac{w}{r})$ が得られる．
(7) 式を全微分する．

$$\left[\frac{f'(k) \cdot f'(k) - f(k) \cdot f''(k)}{[f'(k)]^2} - 1\right] dk = d\left(\frac{w}{r}\right)$$

整理すると，

$$\frac{dk}{d\left(\frac{w}{r}\right)} = -\frac{[f'(k)]^2}{f(k)f''(k)} > 0$$

したがって，要素代替の弾力性は，

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{w}{r}\right)}{k} \frac{dk}{d\left(\frac{w}{r}\right)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{f(k) - kf'(k)}{f'(k)} \cdot - \frac{[f'(k)]^2}{f(k)f''(k)} = -\frac{[f(k) - kf'(k)]f'(k)}{kf(k)f''(k)}$$

□

問題
以下の関数について，(i) 1 人あたり資本 k と 1 人あたり生産量 y の関係式 $y = f(k)$ を求めよ．
(ii) (6) 式を用いて，要素代替の弾力性 ε を求めよ．

(1) $Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$　($0 < \alpha < 1$, $A > 0$ は定数)

(2) $Y = F(K, L) = [\alpha K^{\sigma} + (1 - \alpha)L^{\sigma}]^{\frac{1}{\sigma}}$　($0 < \alpha < 1$, $\sigma < 1$ は定数)

(3) $Y = F(K, L) = AK - B\frac{K^2}{L}$　（$A > 0, B > 0$ は定数．また，$\frac{K}{L} < \frac{A}{2B}$）．