

第 12 講 公共投資 (3) 公共投資と経済成長

先生「今日は、公共投資を含む経済成長モデルを説明します」

花子「経済成長モデルって何だろ」

太郎「難しいとやだな」

例題 1

次のソロー・モデルを考える.

$$\text{財市場均衡式 } Y_t = C_t + I_t \quad (1)$$

$$\text{投資関数 } I_t = sY_t \quad (2)$$

$$\text{資本蓄積 } K_{t+1} = I_t \quad (3)$$

$$\text{マクロ生産関数 } Y_t = AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (4)$$

$$\text{人口成長 } \frac{L_{t+1}}{L_t} = n \quad (5)$$

Y_t 国民所得, C_t 消費, I_t 投資, K_t 資本, L_t 労働, $0 < s < 1$ 貯蓄率 (一定), $0 < \alpha < 1$ 資本分配率 (一定), $n > 0$ 粗人口成長率 (一定)

- 消費関数が, $C_t = (1-s)Y_t$ となることを示せ.
- 資本 K_t と労働 L_t に関する次の 2 本の漸化式を導出せよ.

$$\begin{cases} K_{t+1} = sAK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \\ L_{t+1} = nL_t \end{cases}$$

1 人あたり資本を k_t , 1 人あたり所得を y_t とおく.

$$k_t = \frac{K_t}{L_t}, \quad y_t = \frac{Y_t}{L_t}$$

- 1 人あたり所得が, $y_t = Ak_t^\alpha$ で与えられることを示せ.
- 1 人あたり資本に関する次の漸化式を導出せよ.

$$k_{t+1} = \frac{s}{n} Ak_t^\alpha \quad (6)$$

- 平面 (k_t, k_{t+1}) 上に, (6) 式の曲線と 45 度線を図示せよ. 長期均衡がただ 1 つ存在し, 広域的に安定であることを示せ.
- 長期均衡における 1 人あたり資本 k^* が,

$$k^* = \left(\frac{sA}{n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (7)$$

となることを示せ.

- 長期の経済成長率は, 人口成長率に一致することを示せ.
- 問題 1, 3, 6 の結果を用いて, 長期均衡における 1 人あたり消費が次式で与えられることを示せ.

$$\frac{C_t}{L_t} = (1-s)A \left(\frac{sA}{n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (8)$$

- 長期均衡における 1 人あたり消費が最大となる貯蓄率 s^* を求めよ.

解答

- (1), (2) 式より, $C_t = Y_t - I_t = (1 - s)Y_t$.
- (2), (3), (4), (5) 式より.
- (4) 式の両辺を L_t で割る.
- 問題 2 の 2 式を辺々で割る.
- 略
- (6) 式で, $k_t = k_{t+1} = k^*$ とおく.
- $Y_{t+1}/Y_t = (y^* L_{t+1})/(y^* L_t) = n$.
- 略
- (8) 式中の s の項に注目する.

$$f(s) = (1 - s)s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - s^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

とおく. s で微分すると,

$$f'(s) = \frac{\alpha}{1-\alpha} s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} - \frac{1}{1-\alpha} s^{\frac{1}{1-\alpha}-1} = \frac{1}{1-\alpha} s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{s} - 1 \right)$$

s	0	α	1
$f'(s)$		+	-
$f(s)$	0	↗ 極大	↘ 0

増減表より, $s^* = \alpha$.

例題 2

次のマクロ経済モデルを考える.

$$\text{財市場均衡式 } Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (9)$$

$$\text{投資関数 } I_t = s(1 - \tau)Y_t \quad (10)$$

$$\text{政府予算制約式 } G_t = \tau Y_t \quad (11)$$

$$\text{資本蓄積 } K_{t+1} = I_t + G_t \quad (12)$$

$$\text{マクロ生産関数 } Y_t = AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (13)$$

$$\text{人口成長 } \frac{L_{t+1}}{L_t} = n \quad (14)$$

Y_t 国民所得, C_t 消費, I_t 民間投資, G_t 公共投資, K_t 資本, L_t 労働, $0 < s < 1$ 貯蓄率 (一定), $0 < \alpha < 1$ 資本分配率 (一定), $n > 0$ 粗人口成長率 (一定), $0 < \tau < 1$ 所得税率 (一定)

- 消費関数が, $C_t = (1 - s)(1 - \tau)Y_t$ となることを示せ.
- 資本 K_t と労働 L_t に関する次の 2 本の漸化式を導出せよ.

$$\begin{cases} K_{t+1} = [(1 - \tau)s + \tau]AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \\ L_{t+1} = nL_t \end{cases}$$

1 人あたり資本を k_t , 1 人あたり所得を y_t とおく.

$$k_t = \frac{K_t}{L_t}, \quad y_t = \frac{Y_t}{L_t}$$

- 1 人あたり所得が, $y_t = Ak_t^\alpha$ で与えられることを示せ.

4. 1人あたり資本に関する次の漸化式を導出せよ.

$$k_{t+1} = \frac{(1-\tau)s + \tau}{n} A k_t^\alpha \quad (15)$$

5. 平面 (k_t, k_{t+1}) 上に, (15) 式の曲線と 45 度線を図示せよ. 長期均衡がただ 1 つ存在し, 広域的に安定であることを示せ.

6. 長期均衡における 1 人あたり資本 k^* が,

$$k^* = \left\{ \frac{[(1-\tau)s + \tau]A}{n} \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (16)$$

となることを示せ.

7. 長期の経済成長率は, 人口成長率に一致することを示せ.

8. 問題 1, 3, 6 の結果を用いて, 長期均衡における 1 人あたり消費が次式で与えられることを示せ.

$$\frac{C_t}{L_t} = (1-s)(1-\tau)A \left\{ \frac{[(1-\tau)s + \tau]A}{n} \right\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (17)$$

9. 長期均衡における 1 人あたり消費が最大となる所得税率 τ^* を求めよ.

解答

1. (9), (10), (11) 式より, $C_t = Y_t - I_t - G_t = (1-\tau)Y_t - s(1-\tau)Y_t = (1-s)(1-\tau)Y_t$.

2. (10), (11), (12), (13), (14) 式より.

3. (13) 式の両辺を L_t で割る.

4. 問題 2 の 2 式を辺々で割る.

5. 略

6. (6) 式で, $k_t = k_{t+1} = k^*$ とおく.

7. $Y_{t+1}/Y_t = (y^*L_{t+1})/(y^*L_t) = n$.

8. 略

9. (17) 式中の τ の項に注目する.

$$f(\tau) = (1-\tau)[(1-\tau)s + \tau]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

ここで,

$$x = (1-\tau)s + \tau$$

とおくと,

$$\tau = \frac{x-s}{1-s} \Rightarrow 1-\tau = \frac{1-x}{1-s}$$

したがって,

$$f(\tau) = \frac{1}{1-s}(1-x)x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = g(x)$$

例題 1 の問題 8 と同じなので, $g(x)$ が最大になるのは, $x^* = \alpha$ のとき. 最適所得税率は,

$$(1-\tau)s + \tau = \alpha \Rightarrow \tau^* = \frac{\alpha-s}{1-s}$$

である. 民間の貯蓄率が小さいとき ($s < \alpha$), 課税して公共投資をおこなうのが望ましい.

このモデルでの公共投資の目的は, マクロの貯蓄率 $(1-\tau)s + \tau$ が, 民間資本の生産弾力性 $\frac{K}{Y} \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha$ に一致するように誘導することである.

花子「先生, コピペ」

太郎「ソローモデルってちょっとかつこいい」
