

第 11 講 公共投資 (2) 最適な公共投資 (テキスト p.189–193)

先生「今日は最適な公共投資について説明します」

太郎「出た，最適」

2 期モデル

効用関数

$$u = U(c_1, c_2)$$

c_1 第 1 期の消費, c_2 第 2 期の消費

第 1 期, 第 2 期の資源制約式

$$w = c_1 + i_P + i_G \quad (1)$$

$$f(k, g) = c_2 \quad (2)$$

w 初期資源 (定数), i_P 民間投資, i_G 公共投資, k 民間資本, g 公共資本
資本形成

$$k = i_P \quad (3)$$

$$g = i_G \quad (4)$$

(3), (4) 式を (1) 式に代入すると, 第 1 期の資源制約式は,

$$w = c_1 + k + g \quad (5)$$

と表すことができる. 以下, 文脈に応じて g のことを公共資本と呼んだり, 公共投資と呼んだりする (k も同じ).

例題 1 (社会的最適)

次の最適化問題を考える.

$$\max_{c_1, c_2, k, g} u = (1 - \alpha) \log c_1 + \alpha \log c_2 \quad (6)$$

subject to

$$w = c_1 + k + g \quad (7)$$

$$Ak^{1-\beta}g^\beta = c_2 \quad (8)$$

ただし, $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, A > 0$ は定数.

(1) 4 つの変数 c_1, c_2, k, g をコントロールするときの最適な資源配分を求めよ.

(2) $\alpha = 0.3, \beta = 0.2$ とする. 最適な民間投資率 k^*/w と公共投資率 g^*/w を求めよ.

解答

(1) (8) 式を (6) 式に代入する.

$$u = (1 - \alpha) \log c_1 + \alpha [\log A + (1 - \beta) \log k + \beta \log g] \quad (9)$$

ラグランジュ関数を,

$$L = (1 - \alpha) \log c_1 + \alpha [\log A + (1 - \beta) \log k + \beta \log g] + \lambda(w - c_1 - k - g)$$

とおく ($\lambda > 0$ はラグランジュ乗数).

c_1, k, g に関する最適化条件は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial c_1} &= \frac{1-\alpha}{c_1} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1-\alpha}{\lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial k} &= \frac{\alpha(1-\beta)}{k} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\alpha(1-\beta)}{\lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial g} &= \frac{\alpha\beta}{g} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{\alpha\beta}{\lambda}\end{aligned}$$

(7) 式に代入する.

$$w = \frac{1-\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha(1-\beta)}{\lambda} + \frac{\alpha\beta}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

したがって,

$$\begin{aligned}c_1^* &= (1-\alpha)w \\ k^* &= \alpha(1-\beta)w\end{aligned}\tag{10}$$

$$g^* = \alpha\beta w\tag{11}$$

(10), (11) 式を (8) 式に代入すると,

$$c_2^* = A[\alpha(1-\beta)w]^{1-\beta}(\alpha\beta w)^\beta = A\alpha(1-\beta)^{1-\beta}\beta^\beta w$$

(2) (10), (11) 式より, $k^*/w = \alpha(1-\beta) = 0.24$, $g^*/w = \alpha\beta = 0.06$. 民間投資 24%, 公共投資 6%.

分権化経済における最適な公共投資

3 つの変数 c_1, c_2, k は民間部門が決める. g は政府が決める. 政府を先手番, 民間部門を後手番とするシュタッケルベルク均衡を求め, 最適な g を導出する.

先に後手番の問題を解き, 次に先手番の問題を解く. 後ろ向き帰納法 (backward induction) という.

1. 民間部門の問題

$$\max_{c_1, c_2, k} u = U(c_1, c_2)$$

subject to (5) and (2).

これを解いて, $c_1 = c_1(g), c_2 = c_2(g), k = k(g)$ を得る. 間接効用関数 $V(g) = U(c_1(g), c_2(g))$ が得られる.

2. 政府の問題

$$\max_g V(g) \quad \text{subject to} \quad (5) \text{ and } (2)$$

(2), (5) 式を目的関数に代入する.

$$V(g) = U(w - k(g) - g, f(k(g), g))\tag{12}$$

g で微分すると,

$$\begin{aligned}V'(g) &= U_1 \times \left(-\frac{dk}{dg} - 1\right) + U_2 \times \left(f_k \frac{dk}{dg} + f_g\right) \\ &= U_2 \left[f_k \frac{dk}{dg} + f_g - \frac{U_1}{U_2} \left(1 + \frac{dk}{dg}\right)\right]\end{aligned}$$

したがって,

$$V'(g) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_g = f_k \left(-\frac{dk}{dg}\right) + \frac{U_1}{U_2} \left(1 + \frac{dk}{dg}\right)\tag{13}$$

他方, $c_1 = c_1(g), k = k(g)$ を (5) 式に代入すると,

$$w = c_1(g) + k(g) + g$$

この式の両辺を g で微分すると,

$$0 = \frac{dc_1}{dg} + \frac{dk}{dg} + 1 \quad (14)$$

(13), (14) 式より, 次の命題が得られる.

命題 1 公共投資の最適水準は, 次式で与えられる.

$$f_g = f_k \left(-\frac{dk}{dg} \right) + \frac{U_1}{U_2} \left(-\frac{dc_1}{dg} \right) \quad (15)$$

ただし,

$$\left(-\frac{dc_1}{dg} \right) + \left(-\frac{dk}{dg} \right) = 1$$

(15) 式の左辺は, 公共投資の 限界便益 を表す. 右辺は公共投資の 限界費用 を表す. 公共投資を 1 単位増やすと将来の生産量が f_g だけ増える. つまり, 限界便益は公共資本の限界生産力に一致する.

限界費用は 2 つある. たとえば, 公共投資を 1 単位増やしたとき, 民間投資が 1 単位減ったとしよう ($dk/dg = -1$). このとき, 将来の生産量は f_k だけ減る. (15) 式の右辺第 1 項は, 生産サイドで測った費用を表している. 次に, 公共投資を 1 単位増やしたとき, 第 1 期消費 c_1 が 1 単位減ったとしよう ($dc_1/dg = -1$). 無差別曲線の性質を利用すると, この厚生損失は, 第 2 期消費が $MRS = U_1/U_2$ 単位だけ減った効果を持つ. (15) 式の右辺第 2 項は, 消費サイドで測った費用を表している. 一般的には, 公共投資が 1 単位増えると, 消費 c_1 も投資 k も減る. (15) 式の右辺は, 投資減少の大きさ ($-dk/dg$) と消費減少の大きさ ($-dc_1/dg$) を用いて, f_k と MRS の加重平均により限界費用を算出できることを意味している.

例題 2 (分権化経済)

民間部門の問題は, 次のように定式化できる.

$$\max_{c_1, c_2, k} u = (1 - \alpha) \log c_1 + \alpha \log c_2 \quad (16)$$

subject to

$$w = c_1 + k + g \quad (17)$$

$$Ak^{1-\beta}g^\beta = c_2 \quad (18)$$

taking g as given.

(1) 反応関数 $c_1 = c_1(g), k = k(g)$ を求めよ.

(2) 間接効用関数 $V(g)$ を求め, $V(g)$ を最大にする g^* を求めよ.

(3) シュタッケルベルク均衡は, 社会的最適に一致することを示せ. また, (15) 式が成立することを確かめよ.

解答

(1) 例題 1 のラグランジュ関数を用いる. c_1, k に関する最適化条件より,

$$c_1 = \frac{1 - \alpha}{\lambda}$$

$$k = \frac{\alpha(1 - \beta)}{\lambda}$$

(7) 式に代入すると,

$$w - g = \frac{1 - \alpha}{\lambda} + \frac{\alpha(1 - \beta)}{\lambda} = \frac{1 - \alpha\beta}{\lambda}$$

したがって,

$$c_1 = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}(w - g) \quad (19)$$

$$k = \frac{\alpha(1 - \beta)}{1 - \alpha\beta}(w - g) \quad (20)$$

(2) (19), (20) 式を (9) 式に代入する.

$$\begin{aligned} V(g) &= (1 - \alpha) \log \left[\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}(w - g) \right] + \alpha \left\{ \log A + (1 - \beta) \log \left[\frac{\alpha(1 - \beta)}{1 - \alpha\beta}(w - g) \right] + \beta \log g \right\} \\ &= (1 - \alpha\beta) \ln(w - g) + \alpha\beta \log g + (\text{定数}) \end{aligned}$$

g で微分すると,

$$V'(g) = -\frac{1 - \alpha\beta}{w - g} + \frac{\alpha\beta}{g} = \frac{\alpha\beta w - g}{(w - g)g}$$

したがって, $V(g)$ が最大になるのは, $g^* = \alpha\beta w$ のとき.

(3) $g^* = \alpha\beta w$ を (16), (17) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} c_1^* &= (1 - \alpha)w \\ k^* &= \alpha(1 - \beta)w \end{aligned}$$

(8) 式より,

$$c_2^* = A(k^*)^{1-\beta}(g^*)^\beta = A[\alpha(1 - \beta)w]^{1-\beta}(\alpha\beta w)^\beta = A\alpha(1 - \beta)^{1-\beta}\beta^\beta w$$

したがって, シュタッケルベルク均衡は, 例題 1 の社会的最適に一致する.

最後に, (15) 式が成立しているかを確認する.

(i) 限界代替率

$$MRS = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\frac{1-\alpha}{c_1}}{\frac{\alpha}{c_2}} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{c_2}{c_1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{A\alpha(1-\beta)^{1-\beta}\beta^\beta w}{(1-\alpha)w} = A(1-\beta)^{1-\beta}\beta^\beta$$

(ii) 限界生産力

$$\begin{aligned} f_g &= \beta A k^{1-\beta} g^{\beta-1} = \beta A \left(\frac{k}{g} \right)^{1-\beta} = \beta A \left[\frac{\alpha(1-\beta)w}{\alpha\beta w} \right]^{1-\beta} = A(1-\beta)^{1-\beta}\beta^\beta \\ f_k &= (1-\beta) A k^{-\beta} g^\beta = (1-\beta) A \left(\frac{g}{k} \right)^\beta = (1-\beta) A \left[\frac{\alpha\beta w}{\alpha(1-\beta)w} \right]^\beta = A(1-\beta)^{1-\beta}\beta^\beta \end{aligned}$$

(ii) 公共投資の民間投資, 消費への影響

(16), (17) 式より,

$$\begin{aligned} -\frac{dc_1}{dg} &= \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} \\ -\frac{dk}{dg} &= \frac{\alpha(1 - \beta)}{1 - \alpha\beta} \end{aligned}$$

以上から, $f_g = f_k = MRS$ が成り立つので, たしかに (15) 式が成立している.

太郎「難しい！」

花子「効用が最大になる公共投資が最適ってところが経済学っぽいね」
