

第 6 講 国債 (1) 財政の維持可能性

花子「国債って国の借金だよな。日本は多いって聞くけど、返せるのかな」

太郎「誰も困らないなら、返さなくてもいいんじゃないの」

t 期の政府の予算制約式

$$T_t + x_t = G_t + rB_t \quad (\text{A1})$$

T_t 税, x_t 公債金 (新規国債発行), G_t 政府支出, $r > 0$ 利子率 (一定), B_t 期首 の国債残高

(A1) 式の左辺が歳入を表し, 右辺が歳出を表す.

公債金と国債残高の関係式

$$B_{t+1} = B_t + x_t \quad (\text{A2})$$

(A2) 式を (A1) 式に代入して, x_t を消去する.

$$B_{t+1} = (1+r)B_t + G_t - T_t \quad (\text{9.1})$$

均衡予算を仮定する.

$$T_t = G_t \quad (\text{A3})$$

(9.1) 式より,

$$B_t = B_0(1+r)^t \quad (\text{A4})$$

を得る. $\{B_t\}$ は, $(1+r)$ を公比とする等比数列. $t \rightarrow \infty$ のとき無限大に発散する.

現実的には, (A3) 式は成立しない. 「税マイナス政府支出」

$$A_t = T_t - G_t \quad (\text{A5})$$

を, 基礎的財政収支 (プライマリ・バランス) という.

(A1) 式を用いると,

$$A_t = rB_t - x_t \quad (\text{A6})$$

と表すこともできる. 右辺は, 「国債費マイナス公債金」を意味する.

(A5) 式を (9.1) 式に代入する.

$$B_{t+1} = (1+r)B_t - A_t \quad (\text{A7})$$

(A7) 式が国債残高 B_t の基本方程式. 利子率が高いと国債残高は急増する. プライマリ・バランスを黒字にすると, 国債の累積を抑えることができる.

仮定 1. 経済成長率 $g > 0$ は一定.

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = 1 + g \quad (\text{A8})$$

仮定 2. プライマリ・バランス対 GDP 比率はマイナスで一定.

$$\frac{A_t}{Y_t} = -a < 0$$

国債残高対 GDP 比率を b_t とおく.

$$b_t = \frac{B_t}{Y_t} > 0$$

b_t が長期的に収束するとき, 財政は維持可能であると定義する.

(A7) 式の両辺を Y_t で割る. (A8) 式より, $Y_t = Y_{t+1}/(1+g)$ なので,

$$(1+g)b_{t+1} = (1+r)b_t + a \quad (\text{A9})$$

を得る.

(A9) 式は, 隣接 2 項間漸化式. 一般解を求めることができる.

(i) $r = g$ のとき

(A9) 式より,

$$b_{t+1} = b_t + \frac{a}{1+r}$$

数列 $\{b_t\}$ は, $a/(1+r) > 0$ を公差とする等差数列. 一般項は, $b_t = b_0 + at/(1+r)$. 無限大に発散する.

(ii) $r \neq g$ のとき

(A9) 式で, $b_{t+1} = b_t = b^*$ とおくと,

$$(1+g)b^* = (1+r)b^* + a \quad \Rightarrow \quad b^* = \frac{a}{g-r} \quad (\text{A10})$$

(A9) 式は次のように変形できる.

$$b_{t+1} - b^* = \frac{1+r}{1+g} (b_t - b^*)$$

数列 $\{b_t - b^*\}$ は, $(1+r)/(1+g)$ を公比とする等比数列. 一般項は,

$$b_t - b^* = (b_0 - b^*) \left(\frac{1+r}{1+g} \right)^t \quad (\text{A11})$$

$r > g$ のとき, $b_0 > b^*$ のもとで, $\lim_{t \rightarrow \infty} b_t = \infty$.

$r < g$ のとき, $\lim_{t \rightarrow \infty} b_t = b^*$.

以上から, 財政が維持可能であるのは, $r < g$ のときに限られる. ドーマーの条件という.

問題

マーストリヒト条約では, EU への加盟の条件として,

(1) 国債残高対 GDP 比率が 60 パーセント以下

(2) 財政赤字対 GDP 比率が 3 パーセント以下

という財政健全化基準を設けている.

条件 (2) にもとづき, 財政赤字対 GDP 比率を 3 パーセントに固定したとする ($a = 0.03$). このとき, 条件 (1) が長期的に成立するための経済成長率 g に関する必要条件を求めよ.

$$b^* \leq 0.6 \text{ より, } g \geq r + 0.05$$

花子「完済する必要はないってことね」

太郎「ドーマーの条件ってちょっとかつこいい」

第6講の補足．国債償還と元金払い

命題 償還時の元金払いを考慮しても (9.1) 式は成立する．

証明

t 期の政府の予算制約式と， t 期期首の国債残高を分けて考える．

(1) 1 期償還のとき

$$T_t + x_{t+1} = G_t + (1+r)x_t \quad (\text{A12})$$

x_{t+1} t 期に発行し， $t+1$ 期に償還する国債

x_t $t-1$ 期に発行し， t 期に償還する国債

t 期期首の国債残高

$$B_t = x_t \quad (\text{A13})$$

(A13) 式を用いると，(A12) 式から次式を得る．

$$T_t + B_{t+1} = G_t + (1+r)B_t$$

(2) 2 期償還のとき

$$T_t + x_{t+2} = G_t + (1+r)x_t + rx_{t+1} \quad (\text{A14})$$

$(1+r)x_t$ が元利払い， rx_{t+1} が利払いを表す．

t 期期首の国債残高

$$B_t = x_t + x_{t+1} \quad (\text{A15})$$

(A14) 式の両辺に x_{t+1} を加える． (A15) 式を用いると，次式を得る．

$$T_t + B_{t+1} = G_t + (1+r)B_t$$

(3) i 期償還のとき ($i = 1, 2, \dots$)

$$T_t + x_{t+i} = G_t + (1+r)x_t + r(x_{t+1} + x_{t+2} + \dots + x_{t+i-1}) \quad (\text{A16})$$

t 期期首の国債残高

$$B_t = x_t + x_{t+1} + x_{t+2} + \dots + x_{t+i-1} \quad (\text{A17})$$

(A16) 式の両辺に $(x_t + x_{t+1} + x_{t+2} + \dots + x_{t+i-1})$ を加える．(A17) 式を用いると，次式を得る．

$$T_t + B_{t+1} = G_t + (1+r)B_t$$

以上から，任意の償還期間について，(9.1) 式が成立する．[Q.E.D.]