

第5講 企業行動の理論 (4) 費用最小化 (テキスト p. 83-85)

父「生産水準を下げるわけにはいかない」

父「コストを1円でも下げる？当たり前だ」

父「人件費がどんなに高くても、クビを切るわけにはいかない」

企業は、生産要素の価格を所与として、ある生産水準を達成できる生産要素の組合せの中から、費用が最小となるものを選択する。

(前回の復習) 等量線 (等産出量曲線) は右下がり。原点に関して凸。

1. 限界代替率

等量線 $\bar{q} = F(z_1, z_2)$ の接線の傾きの絶対値を、限界代替率 (marginal rate of substitution, MRS) という。限界代替率は、限界生産性の比に一致する。

$$MRS_{21} = -\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{F_1(z_1, z_2)}{F_2(z_1, z_2)} \quad (1)$$

MRS_{21} は、生産量一定のもとで、生産要素1を1単位増やしたときに節約できる生産要素2の投入量を表している。

例題 次の等量線の限界代替率 MRS_{21} を求めよ。

(1) $\bar{q} = 2z_1 + 3z_2$

(2) $\bar{q} = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}$

解答

(1) 傾きが $-2/3$ の直線。 $MRS_{21} = 2/3$ 。

(1) の別解

$$MRS_{21} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{2}{3}$$

(2)

$$MRS_{21} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{1}{2} z_1^{-\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{z_2}{z_1}$$

2. 等費用線

生産要素の価格を w_1, w_2 とする。各生産要素を z_1, z_2 だけ投入するときの費用 c は、

$$c = w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad (2)$$

である。費用 c が一定となる生産要素の組合せ (z_1, z_2) の軌跡を、等費用線 (isocost) という。

等費用線の性質 (図 3.6)

(1) 右下がり。傾き $-w_1/w_2$ 。

(2) 費用 c が小さいほど左下にある。

3. 費用最小化

目標とする生産水準を q とする。「企業は、生産要素の価格を所与として、ある生産水準を達成できる生産要素の組合せの中から、費用が最小となるものを選択する」という問題は、次のように定式化される。

$$\min_{z_1, z_2} c = w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad \text{subject to} \quad q = F(z_1, z_2)$$

この問題の主体的均衡は、図 3.6 の点 P で表される。

最適化の条件は、

$$MRS_{21} = \frac{w_1}{w_2} \quad (3)$$

$$q = F(z_1, z_2) \quad (4)$$

である。

(4) 式は均衡が等量線上にあることを意味する。(3) 式は均衡において、等費用線と等量線が接していることを意味する。

(3), (4) 式を z_1, z_2 の連立方程式とみなして解けば、均衡解 (z_1^*, z_2^*) が求められる。

4. 費用関数

主体的均衡における生産要素の投入量 z_1^*, z_2^* は、要素価格 w_1, w_2 と生産水準 q の関数となる。

$$z_1^* = z_1(w_1, w_2, q) \quad (5)$$

$$z_2^* = z_2(w_1, w_2, q) \quad (6)$$

(5), (6) 式を (2) 式に代入すると、主体的均衡における費用も要素価格 w_1, w_2 と生産水準 q の関数となる。費用関数という。

$$c^* = w_1 z_1^* + w_2 z_2^* = C(w_1, w_2, q) \quad (7)$$

費用関数は、一般的に、要素価格 w_1, w_2 、生産水準 q の増加関数である。

問題

生産要素の価格を w_1, w_2 とし、目標とする生産水準を q とする。生産関数が次式で与えられるとき、要素需要および費用関数を求めよ。

$$(1) F(z_1, z_2) = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}$$

$$(2) F(z_1, z_2) = \min \left\{ \frac{z_1}{3}, \frac{z_2}{2} \right\}$$

解答

(1) 企業の最適化問題は、次のように定式化できる。

$$\min_{z_1, z_2} c = w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad \text{subject to} \quad q = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}$$

最適化の条件は、

$$MRS_{21} = \frac{w_1}{w_2} \quad (8)$$

$$q = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

ここで、

$$MRS_{21} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{1}{2} z_1^{-\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{z_2}{z_1}$$

(8) 式より,

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{w_1}{w_2} \Leftrightarrow w_1 z_1 = w_2 z_2 \quad (10)$$

他方, (9) 式より, $q^2 = z_1 z_2$. $z_2 = q^2/z_1$ を (10) 式に代入し, z_2 を消去する.

$$w_1 z_1 = w_2 \times \frac{q^2}{z_1}$$

したがって,

$$z_1^* = q \sqrt{\frac{w_2}{w_1}}$$

同様にして,

$$z_2^* = q \sqrt{\frac{w_1}{w_2}}$$

費用関数は,

$$c = w_1 z_1^* + w_2 z_2^* = 2q \sqrt{w_1 w_2}$$

(2) 企業の最適化問題は, 次のように定式化できる.

$$\min_{z_1, z_2} c = w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad \text{subject to} \quad q = \min \left\{ \frac{z_1}{3}, \frac{z_2}{2} \right\}$$

レオンチェフ型はとがっているので微分できない. 等量線を図示する. まず,

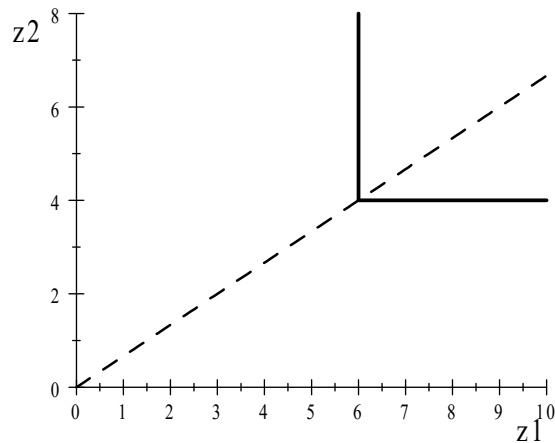
$$\min \left\{ \frac{z_1}{3}, \frac{z_2}{2} \right\} = \begin{cases} \frac{z_1}{3} & \text{if } \frac{z_1}{3} \leq \frac{z_2}{2} \\ \frac{z_2}{2} & \text{if } \frac{z_1}{3} \geq \frac{z_2}{2} \end{cases}$$

したがって, 等量線の式は,

$$\begin{cases} q = \frac{z_1}{3} & \text{if } z_2 \geq \frac{2}{3} z_1 \\ q = \frac{z_2}{2} & \text{if } z_2 \leq \frac{2}{3} z_1 \end{cases}$$

$q = \frac{z_1}{3} \Leftrightarrow z_1 = 3q$ は垂直線, $q = \frac{z_2}{2} \Leftrightarrow z_2 = 2q$ は水平線であることに注意して図を書く.

図. 等量線 ($q = 2$ のとき)



図より, 明らかに, 要素需要は, $(z_1^*, z_2^*) = (3q, 2q)$.

費用関数は, $c = w_1 z_1^* + w_2 z_2^* = (3w_1 + 2w_2)q$.

花子「パパの会社の技術はレオンチェフね」
