# A-1　簡単な微積分の公式

老婆心ながら，プリントに登場する初歩的な微積分の公式をまとめておく。

## 1.1　微分公式

まず，簡単な関数の微分公式をまとめる。微分はダッシュ記号で表すものとする。つまり $df(x)/dx = f'(x) = f'$ である。

(A-1.1)　$f(x) = c$ (定数),　$f'(x) = 0$

(A-1.2)　$f(x) = x^{\alpha}, \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

(A-1.3)　$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x$

(A-1.4)　$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

(A-1.5)　$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x$

(A-1.6)　$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x$

(A-1.7)　$f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \sec^2 x$

(A-1.8)　$f(x) = \sin^{-1} x, \quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(A-1.9)　$f(x) = \cos^{-1} x, \quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(A-1.10)　$f(x) = \tan^{-1} x, \quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

三角関数の引数は全てラジアンで表す。
実際の計算には，次のような公式も必要になる。

(A-1.11)　$(f+g)' = f' + g'$

(A-1.12)　$(f-g)' = f' - g'$

(A-1.13)　$(fg)' = f'g + fg'$

(A-1.14)　$(cf)' = cf'$　($c$ は定数)

(A-1.15)　$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}, \quad g \neq 0$

(A-1.16)　$\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}, \quad g \neq 0$

合成関数の微分も頻繁に必要になる。$y = f(z)$, $z = g(x)$ である時

(A-1.17)　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx}$

## 1.2　積分公式

まず，簡単な関数の不定積分をまとめる。積分定数は省略する。

(A-1.18)　$$\int c dx = cx \qquad (c \text{ は定数})$$

(A-1.19)　$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (\alpha \neq -1)$$

(A-1.20)　$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

(A-1.21)　$$\int e^x dx = e^x$$

(A-1.22)　$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x$$

(A-1.23)　$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x$$

実際の計算には，次のような公式も必要になる。

(A-1.24)　$$\int [f(x)+g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

(A-1.25)　$$\int [f(x)-g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

(A-1.26)　$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx \qquad (c \text{ は定数})$$

置換積分は日常的に用いる。$x = \phi(t)$ とかけるとき

(A-1.27)　$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt} dt$$

部分積分は頻繁に用いる。

(A-1.28)　$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

三角関数の積分がよくでてくる。

(A-1.29)　$$\int \sin x dx = -\cos x$$

(A-1.30)　$$\int \cos x dx = \sin x$$

加法定理

(A-1.31)　$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

(A-1.32)　$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

特に $x = y$ の場合

(A-1.33)　$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

(A-1.34)　$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

これを思い出すと次のような積分は簡単にわかる

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \tag{A-1.35}$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \tag{A-1.36}$$

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{4} = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{1}{4} \tag{A-1.37}$$

最後の積分は置換積分でもできる。$t = \cos x$ とすれば $dt = -\sin x dx$ だから

$$\int \sin x \cos x dx = -\int t dt = -\frac{t^2}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2} \tag{A-1.38}$$

また $s = \sin x$ とすれば $ds = \cos x dx$ だから

$$\int \sin x \cos x dx = \int s ds = \frac{s^2}{2} = \frac{\sin^2 x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos^2 x}{2} \tag{A-1.39}$$

ここでは積分定数を省略している，本来，不定積分には任意の積分定数を加える必要があるので，上の３式は同等である。

次のような形の積分も必要になる。

$$\int x \sin^2 x dx = x\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right) - \int \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right) dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x \tag{A-1.40}$$

つまり $f(x) = x$, $g'(x) = \sin^2 x$ として部分積分を行った。

$\int x^2 \sin^2 x dx$ のような積分も必要になる。この計算は各自で確認すること。

$$\int x^2 \sin^2 x dx = \frac{x^3}{6} - \frac{2x^2 - 1}{8}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x \tag{A-1.41}$$

指数関数のからむ積分も必要である。$a > 0$, $n$ は正の整数。

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \tag{A-1.42}$$

積分範囲がこれ以外の場合は，各自部分積分で求めること。

$e^{-ax^2}$ に関連する積分については別に述べる。