第 1 回レポート

1. 1 私的財，1 公共財，2 個人 $i = A, B$ からなる経済を考える．個人 i の効用関数を，

$$u^i = x^i Y \tag{1}$$

とする（x^i は個人 i の私的財消費，Y は公共財）．

私的財の総量を 300，公共財生産の限界費用を 2 とすると，資源制約式は，

$$300 = x^A + x^B + 2Y \tag{2}$$

と表せる．

(1) 個人 A にとっての公共財の価値を表す限界代替率 MRS^A を，x^A, Y を用いて表せ．

(2) サミュエルソンルールを用いて，公共財の最適水準 Y^* を求めよ．

公共財を個人が自発的に供給するケースを考える．私的財の総量 300 のうち，個人 A の保有量を 160，個人 B のそれを 140 とする．公共財の価格が限界費用 2 に等しいとすると，各個人の予算制約式はそれぞれ，

$$160 = x^A + 2y^A \tag{3}$$
$$140 = x^B + 2y^B \tag{4}$$

と表せる（y^A, y^B は個人が自発的に購入する公共財）．

また公共財の性質より，

$$y^A + y^B = Y \tag{5}$$

が成り立つ．

(3) 個人 A のナッシュ反応関数 $y^A = v^A(y^B)$ を求めよ．

(4) 平面 (y^A, y^B) 上に 2 本のナッシュ反応曲線を図示し，ナッシュ均衡 $(\hat{y}^A, \hat{y}^B)$ を求めよ．

経済にせり人を追加したリンダールメカニズムを考える．個人 A の負担率を τ，個人 B の負担率を $(1-\tau)$ とする．各個人の予算制約式はそれぞれ，

$$160 = x^A + 2\tau Y^A \tag{6}$$
$$140 = x^B + 2(1-\tau)Y^B \tag{7}$$

となる（Y^A, Y^B は個人が申告する公共財を表す）．

(5) 個人 A のリンダール反応関数 $Y^A = l^A(\tau)$ を求めよ．

(6) 平面 (Y, τ) 上に 2 本のリンダール反応曲線を図示し，リンダール均衡 $(\bar{Y}, \bar{\tau})$ を求めよ．

2. 2 つの企業 $i = 1, 2$ が，環境に負荷を与える財を生産している．各企業の利潤関数を，

$$\pi_1 = 200x_1 - (x_1)^2 \tag{1}$$
$$\pi_2 = 240x_2 - 2(x_2)^2 \tag{2}$$

とする（x_i は企業 i の生産量）．

(1) 利潤が最大となる生産量 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ を求めよ．また，このときの利潤 $(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2)$ を求めよ．

生産物 1 単位あたり 1 単位の汚染物質が排出されると仮定する（排出量を Q_i とすると，$Q_i = x_i$）．環境基準を達成するために，総生産量に上限を設定する．

$$x_1 + x_2 \leqq 100 \tag{3}$$

(2) (3) 式の制約のもとで，総利潤が最大となる生産量 (x_1^*, x_2^*) と利潤 (π_1^*, π_2^*) を求めよ．

政府は，(3) 式の環境基準を達成するために，各企業に税率 t の従量税を課す．

税があるときの企業の最適化問題は，次のように定式化される．

$$\max_{x_1} \pi_1 = 200x_1 - (x_1)^2 - tx_1 \tag{4}$$

$$\max_{x_2} \pi_2 = 240x_2 - 2(x_2)^2 - tx_2 \tag{5}$$

(3) 企業の最適生産量 x_1^*, x_2^* を税率 t を用いて表せ．また，(3) 式の環境基準を達成する税率の最小値 t^* を求めよ．

企業への課税を廃止し，排出権を取引きする市場を導入する．当初の排出権の割当てを $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (40, 60)$ とする．割当以上の排出を望むときは，排出権を購入する．割当以下の排出を望むときは，排出権を売却する．

排出権価格が p_r のときの企業の最適化問題は，次のように定式化される．

$$\max_{x_1} \pi_1 = 200x_1 - (x_1)^2 - p_r(x_1 - \bar{x}_1) \tag{6}$$

$$\max_{x_2} \pi_2 = 240x_2 - 2(x_2)^2 - p_r(x_2 - \bar{x}_2) \tag{7}$$

(4) 企業の最適生産量 x_1^*, x_2^* を価格 p_r を用いて表せ．また，市場均衡価格 p_r^* を求めよ．
(5) 排出権取引による企業 1，企業 2 の利得をそれぞれ求めよ．

第 2 回レポート

1. 次のような 2 期モデルを考える．

家計

	1 期	2 期
所得	Y_1	$Y_2 + (1+r)(S+B)$
消費	C_1	C_2
貯蓄＋国債購入	$S+B$	0
税	T_1	T_2

政府

	1 期	2 期
税	T_1	T_2
国債発行	B	0
国債償還	0	$(1+r)B$
政府支出	G_1	G_2

所得 Y_1, Y_2 および政府支出 G_1, G_2 は一定である．r は利子率を表す．
(1) 家計の 1 期，2 期の予算制約式をそれぞれ求めよ．
(2) 政府の 1 期，2 期の予算制約式をそれぞれ求めよ．
(3) 家計消費の割引現在価値の合計は，可処分所得の割引現在価値の合計に一致することを示せ．
(4) 政府支出の割引現在価値の合計は，税の割引現在価値の合計に一致することを示せ．
(5) リカードの中立命題を，このモデルを用いて説明せよ．

2. 2 期間世代重複モデルを考える．世代 t の労働期，引退期の予算制約式は次式で与えられる．

$$(1-\tau)w_t = c_{1t} + s_t \tag{1}$$

$$(1+r)s_t + P_{t+1} = c_{2t+1} \tag{2}$$

c_{1t} 労働期消費，c_{2t+1} 引退期消費，s_t 貯蓄，w_t 労働所得（定数），$0 \leqq \tau < 1$ 年金保険料率（定数），P_{t+1} 年金給付（定数），r 利子率（定数）
(1) 生涯の予算制約式が，

$$(1-\tau)w_t + \frac{P_{t+1}}{1+r} = c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+r} \tag{3}$$

となることを示せ．

世代 t の人口を N_t で表す．賦課方式年金の $(t+1)$ 期の収支均衡条件は，

$$N_t \times P_{t+1} = N_{t+1} \times \tau w_{t+1} \tag{4}$$

で与えられる．また，人口成長率が n で一定，賃金上昇率が g で一定と仮定すると，

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = 1 + n$$
$$\frac{w_{t+1}}{w_t} = 1 + g$$

が成り立つ．
(2) 世代 t の受け取る年金給付は，

$$P_{t+1} = (1+n)(1+g)\tau w_t \tag{5}$$

であることを示せ．
(3) 引退期に受け取る年金給付の割引現在価値 $P_{t+1}/(1+r)$ を，労働期に納めた保険料 τw_t で割ったものを，年金収益率という．1 期 30 年とし，人口成長率が年 1% ，賃金上昇率が年 1.5% ，利子率が年 2% であるときの年金収益率を求めよ．ただし，$1.01^{30} = 1.348$，$1.015^{30} = 1.563$，$1.02^{30} = 1.811$ とする．

3. 次のような 3 つのプロジェクトがある．内部収益率を用いて優先順位を決定せよ．

	初期費用 C	毎年の便益 b
プロジェクト 1	50	10
プロジェクト 2	100	15
プロジェクト 3	200	50

補足．費用 C の投資をおこなうと，次の期以降，毎期便益 b が生じる．

4. 次のマクロモデルを考える．

$$\text{財市場均衡式}\quad Y_t = C_t + I_t + G_t \tag{6}$$
$$\text{投資関数}\quad I_t = s(1-\tau)Y_t \tag{7}$$
$$\text{政府予算制約式}\quad G_t = \tau Y_t \tag{8}$$
$$\text{資本蓄積}\quad K_{t+1} = I_t \tag{9}$$
$$\text{マクロ生産関数}\quad Y_t = AK_t^{\alpha}G_t^{1-\alpha} \tag{10}$$

Y 国民所得，C 消費，I 投資，G 政府支出，K 資本，$0 < s < 1$ 貯蓄率（定数），$0 < \tau < 1$ 所得税率（定数），$A > 0$ 全要素生産性（定数）
(1) (6), (7), (8) 式を用いて，消費関数 $C_t = (1-s)(1-\tau)Y_t$ を導出せよ．
(2) (8), (10) 式を用いて，

$$Y_t = (A\tau^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}K_t \tag{11}$$

となることを示せ．
(3) (7), (9), (11) 式を用いて，資本の成長率が，

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = s(1-\tau)(A\tau^{1-\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} \tag{12}$$

で与えられることを示せ．
(4) 経済成長率 Y_{t+1}/Y_t が (12) 式に一致することを示せ．
(5) 経済成長率を最大にする税率 τ を求めよ．
(6) 0 期の消費 $C_0 = (1-s)(1-\tau)Y_0$ を最大にする税率 τ を求めよ．なお，K_0 は所与とする．

第 3 回レポート

1. 3 つの政策 L, M, H についての有権者の選好順序が，次の a, b, c の 3 タイプに分類できるとする．数字が小さいほど望ましいことを意味する．たとえば，グループ a の選好順序は，$L \succ M \succ H$ である．

	L	M	H
a	1	2	3
b	2	1	3
c	3	2	1

(1) グループ a とグループ c の人数が同じであるとき，M がコンドルセ勝者となることを示せ．
(2) グループ a が 10 人，グループ c が 20 人のとき，コンドルセ勝者を求めよ．

2. 3 人の有権者，2 つの政策について考える．
テキスト 225 ページの点 A, B, C は，各有権者がもっとも望ましいと思う政策の組合せを表している．選好は単峰性を満たし，かつ無差別曲線が同心円を描くとする．このとき，構造誘導均衡 E を図中に図示せよ．

3. テキスト 12.4 節の確率的投票均衡のモデルで，グループサイズが異なるとする．引退世代の人口を 1，労働世代の人口を $n > 0$ とする．労働世代の頻度（密度）は，$n/(2h_b)$ である．
(1) 均衡政策 x^* を，a, b, h_a, h_b, n を用いて表せ．
(2) 少子高齢化により n が減少したとする．均衡政策 x^* はどのように変化するか．

4. 2 地域 $i = 1, 2$ に地方公共財を供給するケースを考える．
地域 1 の公共財の限界便益を $MB_1(g_1) = 100 - g_1$，地域 2 の限界便益を $MB_2(g_2) = 100 - 0.5g_2$ とする (g_i は地域 i の公共財供給量)．公共財生産の限界費用は $c = 40$ で両地域で同じであるとする．
(1) 地域 1 の最適水準 g_1^*，地域 2 の最適水準 g_2^* を求めよ．また，各地域の純便益を求めよ．
(2) 中央政府が，一律の地方公共財の水準を定め（$g_1 = g_2 = g$），各地域がそれぞれ費用 $40g$ を負担するとする．このとき，地域 1 の純便益 $NB_1(g)$，地域 2 の純便益 $NB_2(g)$ を求めよ．ただし，$g_1^* \leqq g \leqq g_2^*$ とする．
(3) 純便益の和 $NB_1(g) + NB_2(g)$ の最大値を求めよ．またそのときの公共財水準 g^* を求めよ．

5. 対称な 2 地域 $i = 1, 2$ を考える．
地域 1，地域 2 の住民の効用関数を，それぞれ，

$$u_1 = \log g_1 + \varepsilon \log g_2 - c_1 g_1$$
$$u_2 = \log g_2 + \varepsilon \log g_1 - c_2 g_2$$

とする．g_i は地域 i の地方政府が供給する地方公共財を表す．$c_i > 0$ は地域 i の住民が負担する公共財生産の限界費用を表す定数，$\varepsilon > 0$ は他地域の公共財のスピルオーバー効果の大きさを表す定数である．
(1) 他地域の公共財供給を所与とするとき，各地方政府の決める公共財供給量 g_1^o, g_2^o を求めよ．
(2) 2 地域が合併したときの公共財供給量 g_1^*, g_2^* を求めよ．
(3) 中央政府が，地方公共財の最適供給を達成するために課税補助金政策をおこなうとする．各地域の住民の効用関数は，

$$u_1 = \log g_1 + \varepsilon \log g_2 - (1 - t_1)c_1 g_1 - T_1$$
$$u_2 = \log g_2 + \varepsilon \log g_1 - (1 - t_2)c_2 g_2 - T_2$$

で与えられる．t_i は地域 i の公共財生産に対する補助率を表し，T_i は地域 i の一括税を表す．
このとき，均衡予算のもとでの中央政府の最適政策 (t_i^*, T_i^*) を求めよ．