「財政 1」（宮澤和俊）　2024/6/19

第 10 講　所得再分配 (2) 格差の指標の補足：期待効用と確実性等価

---

先生「10% の確率で 100 万円が当たるくじがあります．いくらなら買ってもよいと思いますか」
太郎「そりゃ10 万円でしょ」
花子「私は 3 万円かな」

---

1. くじ

確率 $\alpha_1$ で $x_1$ 円，確率 $\alpha_2$ で $x_2$ 円が当たるくじがあるとする（$\alpha_1+\alpha_2=1$）．くじは，表あるいは図で表現できる【板書】．

くじの（数学的）期待値は，

$$x^e = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

である．

2. 期待効用

このくじに対する期待効用 (expected utility) を，

$$EU = \alpha_1 U(x_1) + \alpha_2 U(x_2) \tag{1}$$

と定義する．$U(x)$ は，確実な所得 $x$ 円が得られるときの効用を表す．(1) 式は，個人は不確実な状況で，所得の期待値ではなく，効用の期待値に関心を持つと仮定している．期待効用仮説という．

**例**　10% の確率で 100 万円が当たるくじがある．効用関数を $U(x)=\sqrt{x}$ とすると，このくじの期待効用は，

$$0.1 \times \sqrt{1000000} + 0.9 \times \sqrt{0} = 100$$

3. くじの私的な価格（確実性等価）

くじの期待効用と同じ効用水準を与える確実な所得を $x^*$ とする．

$$\alpha_1 U(x_1) + \alpha_2 U(x_2) = U(x^*) \tag{2}$$

$x^*$ は，くじのために払ってもよいと思う価格（の最大値）を表している．**確実性等価**(certainty equivalent) という．

**例**　上の例では，$100=\sqrt{x^*}$ より，$x^*=10000$ 円．

**例題**

10% の確率で 100 万円が当たるくじがある．花子は確実な所得 $x$ 円に対して $U(x)=x^{\frac{2}{3}}$ の効用を得るとする．花子が払ってもよいと思う，くじの最高価格 (確実性等価) を求めよ．ただし，必要に応じて，$\sqrt{10}=3.16$ を用いよ．

**解答**

(2) 式より，

$$0.1 \times 1000000^{\frac{2}{3}} + 0.9 \times 0^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$$

ここで，

$$0.1 \times 1000000^{\frac{2}{3}} = 10^3$$

したがって，

$$x^{\frac{2}{3}} = 10^3 \Leftrightarrow x = (10^3)^{\frac{3}{2}} = 10^{4.5} = 10000\sqrt{10} = 31600$$

確実性等価は，31,600 円．　$\cdots$(答)

4. 図による理解【板書】

作図の仕方

(1) ヨコ軸上に $x_1, x_2$ をとる．

(2) タテ軸上に $U(x_1), U(x_2)$ をとる．

(3) 内分点 $\alpha_1 U(x_1) + \alpha_2 U(x_2)$ をタテ軸上にとる[1]．

(4) 右にいって，曲線から下に下ろしたところが，確実性等価 $x^*$．

(5) 右にいって，線分 $A_1A_2$ との交点 $E$ から下に下ろしたところが，期待値 $x^e = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$．[2]

効用関数 $U(x)$ の性質により，個人のリスクに対する態度を分類できる．

| | | |
|---|---|---|
| リスク回避的 (risk averse) | $\Leftrightarrow$ | $U''(x) < 0$（上に凸） |
| リスク中立的 (risk neutral) | $\Leftrightarrow$ | $U''(x) = 0$（直線） |
| リスク愛好的 (risk loving) | $\Leftrightarrow$ | $U''(x) > 0$（下に凸） |

（理由）図より，期待値 $x^e$ と確実性等価 $x^*$ の大小関係は次のように分類できる．

| | | |
|---|---|---|
| リスク回避的 | $\Leftrightarrow$ | $x^* < x^e$ |
| リスク中立的 | $\Leftrightarrow$ | $x^* = x^e$ |
| リスク愛好的 | $\Leftrightarrow$ | $x^* > x^e$ |

リスク中立的な個人は，期待値 $x^e$ でくじを買ってもよいと考える．リスク回避者は期待値 $x^e$ では買わない．リスク愛好者は，期待値よりも高い価格を払ってもよいと考える．言葉と整合的.

5. リスクプレミアム

ある個人が，10% の確率で 100 万円が当たるくじを持っている．効用関数が $U(x) = \sqrt{x}$ のとき，彼は，確実性等価 $x^* = 10000$ 円でくじを売ってもよいと考える（はず）.

くじを購入する経済主体を，保険会社と呼ぼう．保険会社は，大量のくじを個人から購入することで，くじ 1 本あたり平均して，$x^e - x^* = 90000$ 円儲けることができる．差額 $(x^e - x^*)$ を，**リスクプレミアム**という.

取引の前後で，個人は無差別．保険会社の利潤の分だけ社会的余剰が増える．保険は，経済厚生を改善する制度である.

**問題**

確率 $\frac{1}{3}$ で 160,000 円，確率 $\frac{2}{3}$ で 10,000 円が当たるくじがある.

(1) 花子は確実な所得 $x$ 円に対して $U(x) = \sqrt{x}$ の効用を得るとする．花子が払ってもよいと思う，くじの最高価格 (確実性等価) を求めよ.

(2) 花子がこのくじを所有しているとする．リスク中立的な経済主体は，(1) の価格でくじを購入することで利益を得る．期待利益の大きさ (リスクプレミアム) を求めよ.

(1) 40,000 円　(2) 20,000 円

---

花子「私の効用関数が，先生にバレた」

太郎「リスクプレミアムって，ちょっとかっこいい」

---

[1] 数直線上に 2 点 $A(a)$，$B(a)$ をとる．線分 $AB$ を，$t : (1-t)$ に内分する点を $C(c)$ とすると，$c = (1-t)a + tb$ が成り立つ.

[2] 中点連結定理を復習してください.