第 14 講　不確実性 (2) 保険と資産選択（テキスト 262–267 ページ）

花子「うちのお母さん，ボーナスの運用で悩んでるみたい」
太郎「うちもそう．何かアドバイスできないかな」

---

2 つの状態 (state) があり，確率 α で状態 1 が，確率 $(1-\alpha)$ で状態 2 が実現する．状態 1 における所得を x_1，状態 2 における所得を x_2 とし，所得 x から得られる効用を $U(x)$ とすると，期待効用は次式で表される．

$$EU = \alpha U(x_1) + (1-\alpha)U(x_2) \tag{1}$$

1. 計算による理解

例題 1（損害保険）

葉子は，資産 W を持っている．災害が発生する確率を α，発生しない確率を $(1-\alpha)$ とする．災害が発生すると，資産はゼロになる．発生しなければ資産は W のまま．ただし，次のような損害保険を利用できる．災害が発生したら，保険金 D をもらえる．災害が発生しないときは，保険料 pD を払う ($0 < p < 1$ は定数)．葉子は，資産が x のとき，$U(x) = \log x$ の効用を得るとする．葉子にとっての最適な保険金 D を求めよ．

解答

【図 1】各 state における資産は，

$$\begin{cases} x_1 = 0 + D \\ x_2 = W - pD \end{cases}$$

(1) 式に代入すると，葉子の期待効用は，保険金 D の関数となる．

$$EU = \alpha \log D + (1-\alpha)\log(W - pD) \tag{2}$$

定義域は，

$$0 < D < \frac{W}{p}$$

(2) 式を D で微分する[1]．

$$\begin{aligned} EU' &= \alpha \cdot \frac{1}{D} + (1-\alpha) \cdot \frac{-p}{W-pD} \\ &= \frac{\alpha W - pD}{D(W-pD)} \end{aligned}$$

増減表は次の通り．

D	0		$\frac{\alpha W}{p}$		$\frac{W}{p}$
EU'		$+$	0	$-$	
EU		↗	極大	↘	

したがって，最適な保険金は，

$$D^* = \frac{\alpha W}{p} \tag{3}$$

である． …（答）

[1] 対数関数の微分法と，合成関数の微分法を利用する．

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

補足

保険会社は，災害がないと保険料収入 pD を得る．災害が発生すると保険金 D を支払う．保険会社の期待収益は，$\pi = (1-\alpha) \times pD - \alpha \times D$ である．保険市場が完全競争的であるとすると，$\pi = 0$ より，保険料率は，

$$p^* = \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{4}$$

となる．(4) 式を，保険数理的に公平な料率という (actuarially fair rate).

(4) 式を (3) 式に代入すると，

$$D^* = (1-\alpha)W$$

このとき，

$$x_1^* = x_2^* = (1-\alpha)W \tag{5}$$

が成り立つ．保険数理的に公平であれば，個人はどちらに転んでも同じ資産になるように保険に加入する．完全加入という．問題もあるが対策もある[2]．

例題 2（資産選択（ポートフォリオ））

葉子は，100 万円の資産運用を考えている．安全資産（貨幣）と危険資産がある．安全資産の金利はゼロ．危険資産は，確率 $\frac{1}{5}$ で投資額の 5 倍になり，確率 $\frac{4}{5}$ で投資額の半分になるとする．葉子は，確実な資産 y 万円に対して，$U(y) = \log y$ の効用を得るとする．葉子にとっての最適な資産選択を求めよ．

解答

【図 2】危険資産への投資額を x 万円とする $(0 \leqq x \leqq 100)$.

このとき，good state における資産は，

$$(100-x) + 5x = 100 + 4x$$

である．

bad state における資産は，

$$(100-x) + \frac{1}{2}x = 100 - \frac{1}{2}x$$

したがって，葉子の期待効用は，x の関数となる．

$$EU = \frac{1}{5}\log(100+4x) + \frac{4}{5}\log\left(100 - \frac{1}{2}x\right)$$

x で微分する．

$$\begin{aligned} EU' &= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{100+4x} + \frac{4}{5} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{100-\frac{1}{2}x} \\ &= \frac{200-10x}{5(100+4x)(100-\frac{1}{2}x)} \end{aligned}$$

増減表は次の通り．

x	0		20		100
EU'		+	0	−	
EU		↗	極大	↘	

したがって，$x = 20$ のとき，期待効用が最大となる．

最適な資産選択は，危険資産 20 万円，安全資産 80 万円． $\cdots$（答）

[2]モラルハザード，アドバースセレクションを参照．

2. 図による理解（**図 8.5, 図 8.6**）

例題 1 で，x_1, x_2 を消去する代わりに，D を消去する．最適化問題は，

$$\max_{x_1,\, x_2} EU = \alpha U(x_1) + (1-\alpha)U(x_2)$$

subject to

$$x_2 = W - px_1 \tag{6}$$

と定式化できる．**図 8.5** の右下がりの線分は，(6) 式を図示したもの．

最適化条件は，

$$MRS_{21} = \frac{\alpha U'(x_1)}{(1-\alpha)U'(x_2)} = p \tag{7}$$

である．点 E が均衡を表している．

特に，(4) 式が成り立つとしよう．(7) 式から，$U'(x_1) = U'(x_2)$．つまり，$x_1 = x_2$ が得られる．完全加入は効用関数に依存しない．

例題 2 で，good state の資産を x_2，bad state の資産を x_1 とする．

$$\begin{cases} x_2 = 100 + 4x \\ x_1 = 100 - \frac{1}{2}x \\ 0 \leqq x \leqq 100 \end{cases}$$

x を消去すると，

$$x_2 = 900 - 8x_1, \quad (50 \leqq x_1 \leqq 100) \tag{8}$$

が得られる．(8) 式は，2 点 $(50, 500)$, $(100, 100)$ を端点とする線分を表す[3]．

最適化問題は，次のように定式化される．

$$\max_{x_1,\, x_2} EU = \frac{1}{5}\log x_2 + \frac{4}{5}\log x_1$$

subject to (8).

図 8.6 の点 E が均衡を表している．以下，計算して確かめる．

最適化条件は，

$$MRS_{21} = 8 \tag{9}$$

ここで，

$$MRS_{21} = \frac{\frac{4}{5}\frac{1}{x_1}}{\frac{1}{5}\frac{1}{x_2}} = \frac{4x_2}{x_1}$$

したがって，(9) 式より，$x_2 = 2x_1$．(8) 式より，$(x_1^*, x_2^*) = (90, 180)$．たしかに線分上にある．このとき，$x = 20$．つまり，危険資産に 20 万円投資している．

太郎「効用関数が資産選択に影響するんだ」

花子「うちの保険どうなってるか，お母さんに聞いてみよっと」

[3]**図 8.6** の青色の線分．