A-2　Gauss 関数の積分

2.1　xe^{-ax^2} の積分

(A-2.1)　$$I_1 = \int_0^\infty xe^{-ax^2} dx$$

この積分は，次の置換を用いることによって簡単に計算できる。

(A-2.2)　$$t = ax^2$$

(A-2.3)　$$dt = 2axdx$$

これを式 (A-2.1) に代入すれば

(A-2.4)　$$I_1 = \frac{1}{2a}\int_0^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{2a}$$

積分範囲が $(-\infty, \infty)$ であるときは，被積分関数が奇関数なので，積分はゼロになる。

2.2　e^{-ax^2} の積分

(A-2.5)　$$I_0 = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx$$

この積分は少々テクニックがいる。まず，この積分の二乗を考える。

(A-2.6)　$$I_0^2 = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx \times \int_0^\infty e^{-ay^2} dy = \int_0^\infty e^{-a(x^2+y^2)} dxdy$$

これは xy 平面上の二重積分である。次のような平面極座標に変数変換する。

(A-2.7)　$$x = r\sin\theta$$

(A-2.8)　$$y = r\cos\theta$$

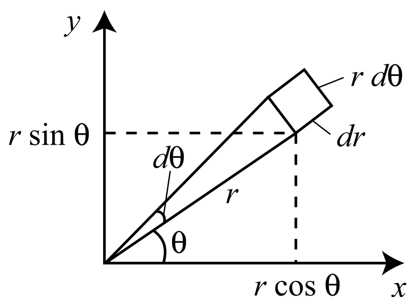
すると

(A-2.9)　$$r^2 = x^2 + y^2$$

積分するときには次の注意が必要である。

(A-2.10)　$$dxdy = rd\theta dr$$

これは，図のように微小面積を求めればわかる。



式 (A-2.9), (A-2.10) を式 (A-2.6) に代入する。第一象限が積分範囲であることに注意すると

$$I_0^2 = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} re^{-ar^2} dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} re^{-ar^2} dr \tag{A-2.11}$$

この積分は既に前節で行った。式 (A-2.4) より

$$I_0^2 = \frac{\pi}{4a} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{\pi}{4a} \tag{A-2.12}$$

結局目的の積分は

$$I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{A-2.13}$$

積分範囲が $(-\infty, \infty)$ であるときは，被積分関数が偶関数なので，積分は I_0 の 2 倍になる。

2.3 $x^n e^{-ax^2}$ の積分

次のように置くことにする。

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx \tag{A-2.14}$$

これを部分積分してみる。

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\infty} x^{(n-1)} \cdot xe^{-ax^2} dx \\ &= -\frac{1}{2a} \cdot \int_0^{\infty} x^{(n-1)} \cdot \left(-2axe^{-ax^2}\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2a} \cdot x^{(n-1)} \cdot e^{-ax^2}\right]_0^{\infty} - \left(-\frac{1}{2a}\right) \cdot \int_0^{\infty} (n-1)x^{(n-2)} e^{-ax^2} dx \\ &= \frac{n-1}{2a} \int_0^{\infty} x^{(n-2)} e^{-ax^2} dx \\ &= \frac{n-1}{2a} I_{n-2} \end{aligned} \tag{A-2.15}$$

つまり，式 (A-2.14) の形の積分は部分積分を繰り返すことによって，n が偶数の場合には式 (A-2.5) の積分に，n が奇数の場合には式 (A-2.1) の積分に帰着する。
積分範囲が $(-\infty, \infty)$ であるとき，n が偶数の場合は被積分関数が偶関数なので積分は I_n の 2 倍，n が奇数の場合は被積分関数が奇関数なので積分はゼロになる。

演習問題

A-2-1. n が自然数（つまり $2n$ は 2 以上の偶数）であるとして，$a > 0$ に対して次の式が正しいことを示せ。

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \equiv \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{A-2.16}$$

A-2-2. n が正の整数（つまり $2n+1$ は正の奇数）であるとして，$a > 0$ に対して次の式が正しいことを示せ。

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \tag{A-2.17}$$

A-2-3. 次の式の両辺を a で微分せよ。

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{A-2.18}$$

A-2-4. 次の式の両辺を a で微分せよ。

$$\int_0^\infty x^1 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \qquad \text{(A-2.19)}$$